

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Львівська політехніка»

На правах рукопису

МАКАРЧУК ОЛЕКСАНДР ВОЛОДИМИРОВИЧ

УДК 621.313.84

**МЕТОДИ І ЗАСАДИ СТВОРЕННЯ
ВИСОКОШВИДКІСНИХ БЕЗКОНТАКТНИХ
ЕЛЕКТРИЧНИХ МАШИН З ПОСТІЙНИМИ МАГНІТАМИ**

05.09.01 — електричні машини і апарати

**Дисертація на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук**

Науковий консультант:
Щур Ігор Зенонович
доктор технічних наук, професор

Ідентичність усіх екземплярів дисертації
ЗАСВІДЧУЮ
Учений секретар спеціалізованої
вченої ради Д 35.052.02

Коруд В. І.

Львів — 2017

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ.....	5
ВСТУП.....	6
РОЗДІЛ 1. АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ОБГРУНТУВАННЯ ПРИЙНЯТИХ РІШЕНЬ ЩОДО ВИСОКОШВИДКІСНИХ МАШИН ЗІ ЗБУДЖЕННЯМ ВІД ПОСТІЙНИХ МАГНІТІВ	21
1.1. Основні показники номінального режиму та головні розміри.....	21
1.2. Втрати енергії та способи їх мінімізації	31
1.2.1. Додаткові втрати в обмотці статора.....	33
1.2.2. Основні втрати в осерді статора	35
1.2.3. Додаткові втрати в роторі	36
1.2.4. Втрати на тертя та вибір типу підшипникових опór.....	40
1.3. Механічна міцність обертових частин та критичні частоти обертання	45
1.4. Способи охолодження та оцінка теплового стану	52
1.5. Проблеми створення ВБПМ та ймовірні шляхи їх розв’язання.....	57
Висновки до розділу	60
РОЗДІЛ 2. АНАЛІЗ ОСОБЛИВОСТЕЙ ТА ФОРМУЛЮВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ, МЕХАНІЧНИХ ТА ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ	62
2.1. Теоретичні засади методу.....	63
2.1.1. Функції форми	65
2.1.2. Умови однозначності та крайові умови.....	76
2.2. Прикладні задачі теорії електромагнетизму	78
2.2.1. Математичні формулювання.....	78
2.2.2. Алгоритм розв’язання задачі магнітостатики	83
2.3. Прикладні задачі теорії пружності	89
2.3.1. Математичні формулювання.....	90
2.3.2. Алгоритм розрахунку поля зміщень	95
2.4. Прикладна задача теорії теплопередачі	99
2.4.1. Математичне формулювання.....	100
2.4.2. Алгоритм розрахунку температурного поля.....	102
Висновки до розділу	105

РОЗДІЛ 3. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ПРОЦЕСИ ВИСОКОШВИДКІСНИХ БЕЗКОНТАКТНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ МАШИН ЗІ ЗБУДЖЕННЯМ ВІД ПОСТІЙНИХ МАГНІТІВ	107
3.1. Проектний синтез ВБПМ	107
3.1.1. Розміри, обмоткові дані, параметри	107
3.1.2. Зовнішня характеристика	116
3.1.3. Механічна характеристика	123
3.2. Втрати та ККД	128
3.2.1. Основні та додаткові втрати в обмотці статора	128
3.2.2. Основні та додаткові втрати в магнітопроводі	141
3.2.3. Механічні втрати в роторі	150
3.2.4. Алгоритм розрахунку робочих характеристик	151
3.3. Перехідні процеси у ВБПМ як елементі електромеханотронної системи	153
3.3.1. Інтегральні показники електромагнітного поля	153
3.3.2. Магнітно-механічна характеристика	159
3.3.3. Магнітно-механічні параметри	160
3.3.4. Вольт-амперні характеристики напівпровідникових елементів	167
3.3.5. Математичне формулювання задачі та алгоритм її розв'язання.....	170
Висновки до розділу	182
РОЗДІЛ 4. МЕХАНІЧНІ ПРОЦЕСИ ВИСОКОШВИДКІСНИХ БЕЗКОНТАКТНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ МАШИН ЗІ ЗБУДЖЕННЯМ ВІД ПОСТІЙНИХ МАГНІТІВ	185
4.1. Конструкції роторів ВБПМ	185
4.2. Граничний діаметр ротора.....	188
4.2.1. Аналітичний розрахунок напружень у валі, навантаженому відцентровими силами	188
4.2.2. Адекватність математичних моделей розрахунку напружень у валах....	192
4.2.3. Обмеження щодо вибору діаметра ротора	196
4.3. Гранична довжина ротора	198
4.3.1. Аналітичний розрахунок критичних частот обертання	198
4.3.2. Адекватність математичної моделі розрахунку критичних частот	204
4.3.3. Обмеження щодо вибору віддалі між опорами ротора	206
4.4. Опори ротора	212
4.4.1. Вибір типу підшипникових опор.....	212

	4
4.4.2. Опóри на підшипниках кочення	212
4.4.3. Опóри на підшипниках ковзання.....	226
Висновки до розділу	236
РОЗДІЛ 5. СИСТЕМИ ОХОЛОДЖЕННЯ ТА ТЕПЛОВІ ПРОЦЕСИ ВИСОКОШВИДКІСНИХ БЕЗКОНТАКТНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ МАШИН ЗІ ЗБУДЖЕННЯМ ВІД ПОСТІЙНИХ МАГНІТІВ	238
5.1. Конструкції систем охолодження.....	238
5.2. Теплові опори. Аналітичний розрахунок середніх температур	242
5.3. Еквіваленті теплопровідності	249
5.4. Коефіцієнти тепловіддачі з різних типів поверхонь	261
5.5. Теплова заступна схема ВБПМ з двоконтурною радіально-аксіальною системою повітряного охолодження.....	265
5.6. Теплова заступна схема ВБПМ з аксіальною системою повітряного охолодження	278
5.7. Теплова заступна схема ВБПМ з системою каналного рідинного охолодження	287
Висновки до розділу	293
РОЗДІЛ 6. ВЕРИФІКАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ	295
6.1. Генератор (97 кВт, 24000 об/хв)	295
6.2. Генератор-двигун (10 кВт, 70000 об/хв).....	298
6.3. Генератор (110 кВт, 70000 об/хв)	300
6.4. Двигун (15 кВт, 120000 об/хв)	306
6.5. Двигун (5 кВт, 150000 об/хв)	310
6.6. Двигун (2 кВт, 220000 об/хв)	315
Висновки до розділу	320
ВИСНОВКИ.....	323
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	327
ДОДАТОК 1. ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ МАГНІТНОГО ПОЛЯ МСЕ.....	362
ДОДАТОК 2. ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ ПОЛЯ ЗМІЩЕНЬ МСЕ.....	369
ДОДАТОК 3. ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУР МСЕ.....	374
ДОДАТОК 4. ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	384
ДОДАТОК 5. АКТ ПРО ВИКОРИСТАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РОБОТИ.....	394

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

БПМ – безконтактна електрична машина зі збудженням від постійних магнітів;	ТЗ – технічне завдання;
ВАХ – вольт-амперна характеристика;	ТЗС – теплова заступна схема;
ВБПМ – високошвидкісна безконтактна електрична машина зі збудженням від постійних магнітів;	ТО – тепловий опір;
ДПР – давач положення ротора;	ФДН – метод формул диференціювання назад;
ЕМ – електрична машина;	АС – Alternating Current (змінний струм);
ЕМПЕ – електромеханічний перетворювач енергії;	APDL – Ansys Parametric Design Language (вбудована в Ansys мова програмування);
ЕРС – електрорушійна сила;	BLDCM – Brush-Less Direct Current Motor (безщітковий двигун постійного струму);
ККД – коефіцієнт корисної дії;	CFD – Computational Fluid Dynamics (обчислювальна гідрогазодинаміка);
ММП – магнітно-механічні параметри;	DC – Direct Current (постійний струм);
ММХ – магнітно-механічна характеристика;	FEM – The Finite Element Method (метод скінченних елементів);
МРС – магніторушійна сила;	IPM – Interior Permanent Magnet (ротоп із внутрішнім розташуванням полюсів);
МСЕ – метод скінченних елементів;	PMSM – Permanent Magnet Synchronous Motor (синхронний двигун з постійними магнітами);
НДС – напружено-деформований стан;	SPM – Surface Permanent Magnet (ротоп із зовнішнім розташуванням полюсів).
ПКК – проектно-конструкторський комплекс;	
ПМ – постійні магніти;	
САР – система алгебричних рівнянь;	
САДР – система алгебро-диференціальних рівнянь;	
СЕ – скінченний елемент;	
СК – система координат;	

ВСТУП

Дивлячись в історичній перспективі на розвиток електромеханіки як науки, можна помітити, що особливе місце в ній завжди відводилося так званим машинам граничної потужності — електромеханічним перетворювачам енергії, які займають останні щаблі в нормалізованих рядах потужності. Аналіз залежностей граничної потужності електричних машин різних видів від частоти обертання дає право стверджувати, що високошвидкісні машини, які характеризуються найвищими питомими техніко-економічними показниками, мають до них пряме відношення. Можливості їх практичної реалізації обмежуються технічним та технологічним потенціалом промислового виробництва, фізичними властивостями використаних матеріалів, резервами та розвитком суміжних галузей, зокрема наявною елементною базою силової електроніки.

Звісно, технічний прогрес не стоїть на місці. Повсякчас з'являються нові технології та матеріали з «надможливостями». Те, що «вчора» вважалося революційною інновацією, «сьогодні» стає типовим технічним рішенням. Отже, постійно спостерігається неузгодженість між технологічно досяжним рівнем сучасного електромашинобудування та розвитком теорії створення високошвидкісних електричних машин. З іншого боку, методи досліджень теж не залишаються сталими. Дана робота присвячена подоланню цієї неузгодженості, принаймні станом на сьогоднішній день, стосовно безконтактних електричних машин зі збудженням від постійних магнітів (ПМ).

Проведемо невеликий огляд технічних задач, розв'язання яких потребує використання високошвидкісних електричних машин.

Енергозбереження та економія природних ресурсів, що безпосередньо пов'язані з екологічною безпекою, — основний виклик перед нашою технократичною цивілізацією.

Робота сучасних промислових підприємств, машин та механізмів, як правило, супроводжується виділенням значної кількості тепла. Використання його ускладнено внаслідок низького температурного потенціалу. Роботи з утилізації

низькопотенціальної теплової енергії проводяться практично в усіх розвинутих країнах світу й, безперечно, сприймаються як актуальна науково-технічна задача.

Найчастіше джерелами низькопотенціального тепла є техногенні системи: промислові підприємства, газогенераторні та біогазові установки, піролізери, системи водяного охолодження, промислові водостоки, двигуни внутрішнього згоряння транспортних засобів. Також розглядають джерела з енергією природнього походження: геотермальні джерела, сонячні колектори, сонячні концентратори.

Одним з напрямів робіт з використання низькопотенціального тепла є розробка енергетичних установок невеликої потужності (кілька сотень кіловат). З урахуванням того, що на сьогоднішній день найнижча собівартість виробленої електроенергії й найвища ефективність використання палива (до 90%) властива так званим когенераційним установкам з одночасним виробленням електричної і теплової енергій, можна говорити про необхідність застосування високошвидкісних електрогенераторів (частота обертання 30 – 250 тис. об/хв) як типового технічного рішення у цій галузі. Газотурбінні когенераційні станції (рис. В.1) для малої енергетики на базі високошвидкісних турбогенераторів мають переваги, за низкою показників, над великими електростанціями, перш за все, за рахунок швидкості введення в експлуатацію та зменшення необхідного обсягу інвестицій. Подібні установки повністю відповідають сучасній концепції про необхідність децентралізації електропостачання й легко можуть застосовуватися як автономні джерела живлення замських будинків, невеликих селищ, що віддалені від джерел електроенергії та ін.

Іншим прикладом промислового застосування високошвидкісних електричних машин (ЕМ) є турбодетандер-електрогенераторні агрегати (турбодетандери) на базі струминно-реактивних або вихрових турбін — пристрої, призначені для отримання електричної енергії шляхом утилізації енергії стисненого газу або пари, що в даний час безповоротно втрачається у регуляторах і редукторах тиску (рис. В.2) [1,142, 291].

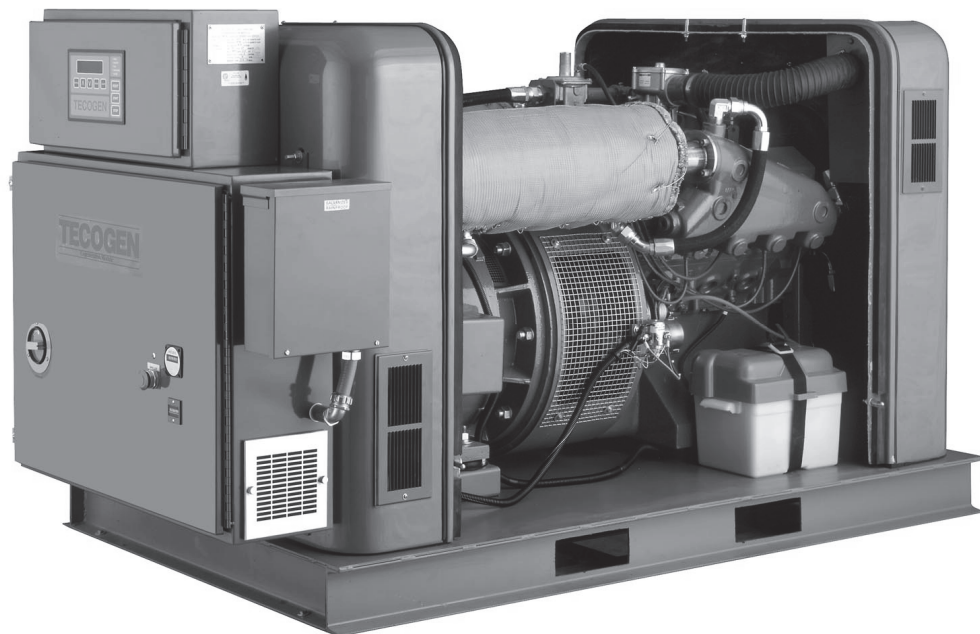


Рис. В.1. Когенераційна установка 60 кВт фірми Tecogen (США), запозичене з [226]

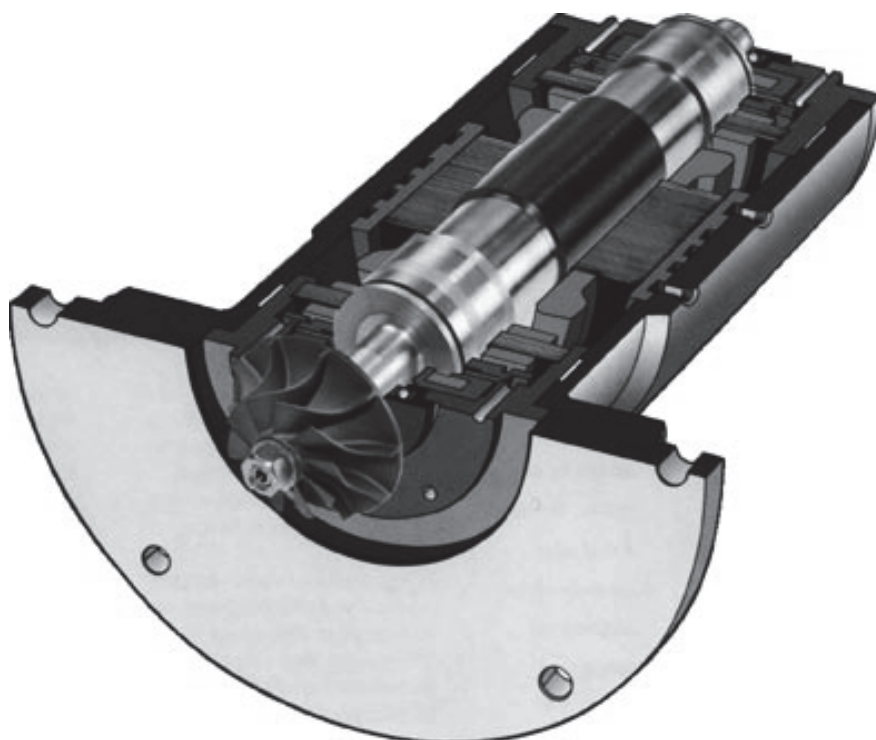


Рис. В.2. Високошвидкісний електрогенератор турбодетандера MTG 160 (160 кВт 45000 об/хв) фірми RMG by Honeywell (Німеччина), запозичене з [142]

Найбільш масове застосування турбодетандерів можливе за їх підключення паралельно до газорозподільних станцій, що знижують тиск природного газу на шляху від магістрального трубопровода до споживачів. Робота турбодетандера практично не потребує витрат палива, енергія отримується екологічно чистим шляхом і не супроводжується викидами CO в атмосферу.

Використання високошвидкісних електричних машин не обмежується лише задачами генерування електроенергії. Установа, яка має пряме відношення до проблем енергоефективності, — система буферизації та накопичення енергії (англ. *Flywheel Storage System*), що містить високошвидкісний двигун/генератор, маховик та систему керування. Ці пристрої нагромаджують кінетичну енергію в обертовій частині з метою зберігання та віддачі, у разі потреби, і є черговим прикладом потреби у високошвидкісних ЕМ (рис. В.3).

Ще один приклад — пристрій для підвищення потужності з одночасним зменшенням витрати палива двигунів внутрішнього згоряння за рахунок збагачення паливної суміші стисненим повітрям. Перший патент на такий пристрій виданий у США в 1911 р. Зараз його називають автомобільний турбокомпресор (англ. *Automotive Turbocharger*). Здійснення повного контролю над процесом турбонаддуву можливе, наприклад, за рахунок розташування між привідною турбіною та турбіною компресора двигун/генератора. Технічна реалізація даного задуму виконана лише в 2014 р., й не у промисловому форматі (рис. В.4).

Високошвидкісна обробка різанням (англ. *High Speed Cutting* – HSC) — прогресивна технологія обробки металів, яка швидко розвивається. Останнім часом ця технологія активно впроваджується на практиці, а створення сучасних високопродуктивних верстатів з числовим програмним керуванням перевело ідею HSC з площини наукових гіпотез до безпосереднього промислового виробництва (рис. В.5). Частота обертання шпінделя таких верстатів сягає 50 – 60 тис. об/хв, а швидкість подачі 5000 мм/хв. Науково доведено й експериментально підтверджено, що за таких режимів температура в зоні різання падатиме, а необхідний крутний момент зменшуватиметься [145, 265].

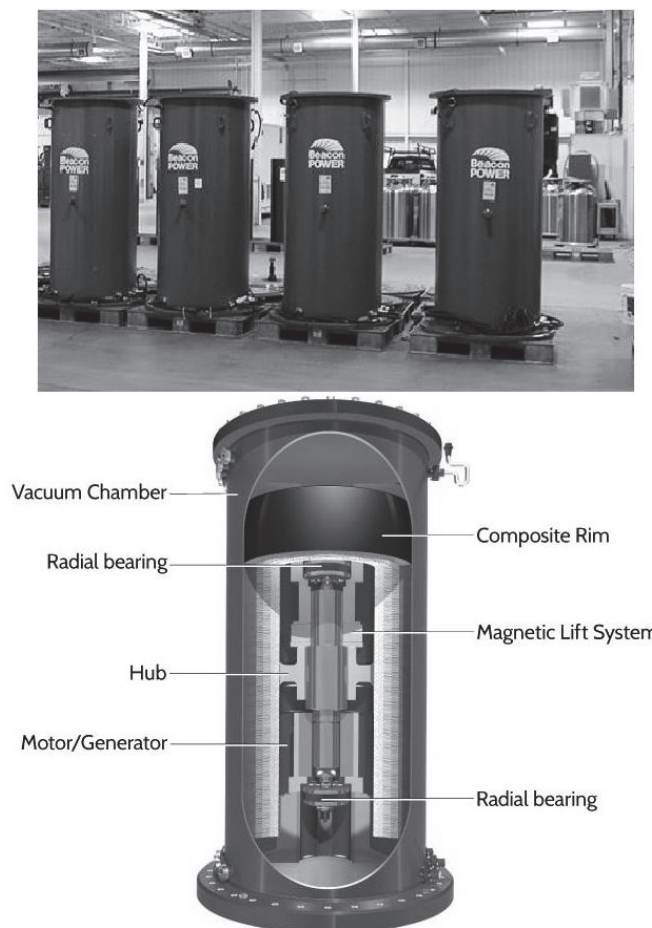


Рис. В.3. Система накоплення та буферизації електроенергії (160 кВт, протягом 4 хв) фірми Beacon's Power (США), запозичене з [288]

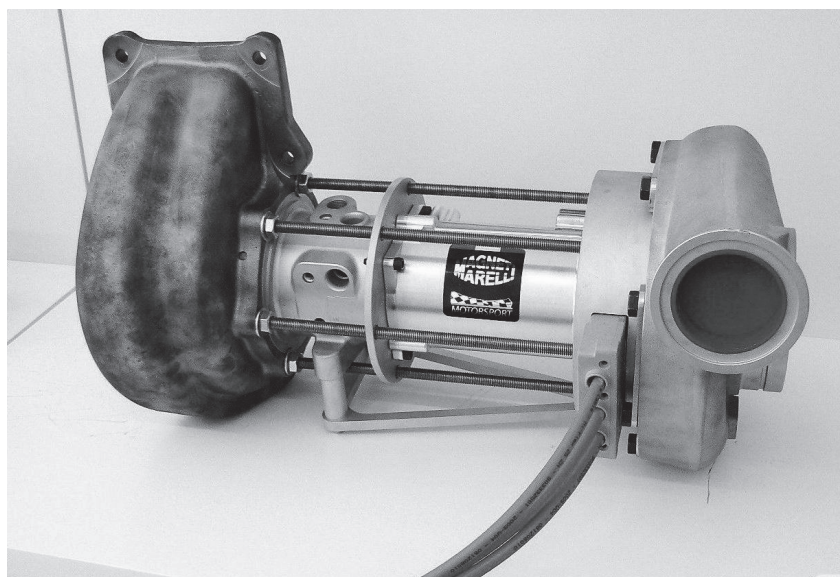
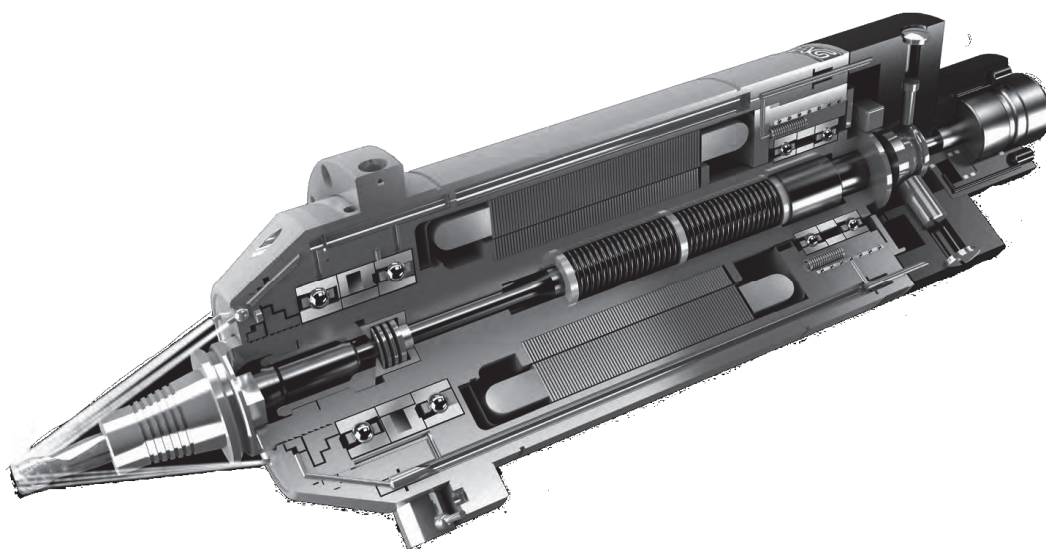


Рис. В.4. Гібридний турбокомпресор фірми Magneti Marelli (Італія), запозичене з [289]



*Рис. В.5. Високошвидкісний електрошпіндель фірми IBAG Switzerland AG
(Швейцарія), запозичене з [145]*

Про постійне зацікавлення дослідженнями високошвидкісних електричних машин свідчать регулярні огляди тенденцій розвитку даного напрямку у світовій науковій періодиці [162,175]. Досвідом створення високошвидкісних машин авіа-космічного застосування діляться автори в [1,121]. Але ми хочемо акцентувати увагу на таких застосуваннях високошвидкісних машин, які, на нашу думку, мають очевидну перспективу впровадження у промислове серійне виробництво. Ось далеко не повний перелік обладнання, в якому використання високошвидкісних безконтактних ЕМ зі збудженням від постійних магнітів є технічно перспективним, особливо привабливим з економічного погляду та може містити значну інноваційну складову [127]: промислові системи аерації та водопідготовки; системи охолодження, кондиціонування й вентиляції; приводи холодильних агрегатів; ефективні відцентрові компресори і т.п.

Актуальність теми.

Виробництво високошвидкісних безконтактних електричних машин зі збудженням від постійних магнітів (ВБПМ) може розглядатися як самостійний напрям електромашинобудування. Широке коло технічних задач, розв'язання яких потребує застосування ВБПМ, диктує підвищені вимоги до їх показників та характеристик. Намагання забезпечити ці вимоги виявляє всю багатовимірність

проблеми та охоплює задачі розвитку теорії проектування, розробку й впровадження новітніх конструкційних рішень, технологічних процесів та ін.

Аналіз проблематики показав, що даний напрям електромеханіки не використовує єдиний комплексний методичний підхід до створення ВБПМ. Розробки таких машин проводяться, як правило, за технічними вимогами окремих споживачів, що не узгоджені між собою, питання уніфікації не розглядаються в принципі. Як результат — розробка методів розрахунку та розв’язання технологічних завдань, що супроводжують виготовлення ВБПМ, з урахуванням переходу на якісно новий рівень енергоощадності та надійності, є актуальною проблемою сучасної електромеханіки.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дослідження проводилися у Національному університеті «Львівська політехніка» відповідно до наукового напрямку Інституту енергетики та систем керування «Ресурсозберігаючі технології та інтелектуальні системи керування в енергозабезпеченні об’єктів економічної діяльності». Теоретичні та практичні результати дисертаційної роботи використані в процесі виконання держбюджетних і госпдоговірних науково-дослідних робіт, під керівництвом або за безпосередньої участі автора:

- науково-дослідна робота «Створення математичних моделей та автоматизованої системи дослідження вентильних двигунів постійного струму: реактивних та зі збудженням від постійних магнітів» («РК ЕМА.2»), (з 01.01.2008 по 31.12.2009, № держреєстрації 0107U005256);
- науково-дослідна робота «Електромеханотронна система перетворення енергії для безредукторних вітроустановок з вертикальною віссю обертання» («ОБЕРТ»), (з 01.01.2010 по 31.12.2010, № держреєстрації 0109U001155);
- науково-дослідна робота «Комбінована система автономного електрозабезпечення на базі вітро- і фотоелектричних перетворювачів енергії» («ВІТРО») (з 01.01.2011 по 31.12.2012, № держреєстрації 0111U001212);

- науково-дослідна робота «Гібридні автономні вітроенергоустановки, що генерують теплову та електричну енергію» (“АБ”) (з 01.01.2013 по 31.12.2014, № держреєстрації 0113U001358);
- госпдоговір №0210/165/11 від 28.11.2007 з НВО «Эрга» (Росія) «Расчет электрогенератора для газовой турбины мощностью 350 Вт»;
- госпдоговір №0280 від 02.03.2009 з НВО «Эрга» (Росія) «Расчет и физическое моделирование генератора ГТК-100»;
- госпдоговір №0280 від 02.03.2009, доп. угода від 28.01.2010 з НВО «Эрга» (Росія) «Расчет обратимой электрической машины для турбокомпрессора ТКР-10»;
- госпдоговір №041 від 24.04.2014 з СП «Електронтранс» (Україна) «Розробка електричного двигуна для прямого привода низькопідлогового трамвая».

Мета і задачі дослідження.

Метою роботи є розробка нових і розвиток існуючих методів створення високошвидкісних безконтактних електричних машин зі збудженням від постійних магнітів та обґрунтування теоретичних й методологічних засад побудови математичних моделей процесів у цих машинах.

Для досягнення цієї мети розв’язано такі завдання:

- здійснено аналіз конструкційних виконань магнітопроводів статора та ротора з ПМ для електричних машин з підвищеною частотою обертання;
- розроблено методи розрахунку статичних характеристик ВБПМ, які враховують основні чинники, що у своєму взаємозв’язку впливають на техніко-економічні показники таких машин;
- виконано аналіз розподілу втрат потужності у ВБПМ, удосконалено існуючі методи їх розрахунку та розроблено нові;
- виконано аналіз проблем методології та принципів побудови математичних моделей процесів, притаманних ЕМ, на основі методу скінченних елементів (МСЕ);

- розроблено нові математичні моделі для розрахунку електромагнітних, механічних та теплових процесів у ВБПМ;
- досліджено механічні міцність та жорсткість роторів ВБПМ для забезпечення їх працездатності в запропонованих у дисертації конструкційних виконаннях;
- здійснено аналіз типів підшипникових опор, систем змащування для напрацювання рекомендацій щодо застосування їх у ВБПМ;
- теоретично обґрунтовано зв'язок головних розмірів ВБПМ з максимально допустимими механічними напруженнями в роторі та вібраційною надійністю машини;
- проведено аналіз систем та способів охолодження ЕМ для напрацювання рекомендацій щодо їх вибору та застосування у ВБПМ;
- розроблено та удосконалено методи розрахунку стаціонарних теплових процесів у ВБПМ;
- експериментально перевірено запропоновані методи розрахунку ВБПМ.

Об'єкт дослідження — електромагнітні, механічні та теплові процеси у високошвидкісних безконтактних електричних машинах зі збудженням від постійних магнітів.

Предмет дослідження — методи, математичні моделі й алгоритми розрахунку, призначені для створення високошвидкісних безконтактних електричних машин зі збудженням від постійних магнітів, а також вплив будови та технологічних особливостей виготовлення на основні показники таких машин.

Методи дослідження.

Основні теоретичні положення дисертації ґрунтуються на фундаментальних засадах класичної електродинаміки, теорії пружності та теорії теплопередачі.

Теоретичні дослідження процесів перетворення енергії здійснювалися з використанням аналітичних та чисельних методів. Аналітичні методи ґрунтувалися на математичному апараті лінійної алгебри, диференційному та інтегральному численнях, теорії інваріантного наближення функцій. Чисельне розв'язання задач магнітостатики, електродинаміки, теорії пружності й теорії теплопередачі

здійснювалося з використанням МСЕ. Чисельне інтегрування систем алгебро-диференціальних рівнянь (САДР) по часу виконувалося неявним методом Ейлера. Розв'язання нелінійних систем алгебричних рівнянь (САР) проводилося методом Ньютона, лінійні САР високих порядків розв'язувалися релаксаційним методом або методом LDL-факторизації.

Для прийняття низки технічних рішень застосовувалася структурна та параметрична оптимізація, а також евристичний аналіз.

Для розв'язування задач електротехніки, електромеханіки, гідрогазодинаміки і теплопередачі використовувався багатофункційний математичний пакет MathCAD, для потреб геометричного моделювання — AutoCAD. Чисельне розв'язування задач електродинаміки, розрахунок напружено-деформованого стану роторів та розрахунок температурних полів проводився з використанням пакету скінченно-елементного аналізу Ansys Multiphysics та мови програмування APDL (англ. *Ansys Parametric Design Language*).

Результати теоретичних досліджень підтверджувалися відповідними експериментальними перевірками.

Наукова новизна отриманих результатів.

У дисертаційній роботі вперше вирішено важливу науково-технічну проблему з розробки теоретичних засад та методологічних основ створення ВБПМ як системи з розподіленими параметрами, що, у порівнянні з відомими підходами, підвищує адекватність результатів проектного синтезу таких машин й позбавляє від необхідності виготовлення дороговартісних фізичних макетів та проведення їх експериментальних випробувань.

У результаті вирішення цієї проблеми одержано такі нові наукові результати:

1. Отримано й обґрунтовано функціональні залежності головних розмірів ВБПМ від частоти обертання з огляду на допустимі механічні напруження в роторі та з урахуванням значення 1-ої критичної частоти обертання, що гарантують механічну міцність та жорсткість машини.

2. Вперше запропоновано метод розрахунку додаткових втрат у полюсній системі ротора ВБПМ на підставі розв'язку рівняння Гельмгольца для провідного

напівпростору в двовимірній постановці, що дозволяє оцінити енергоефективність ВБПМ вже на початкових етапах проектно-конструкторських робіт.

3. Запропоновано метод та алгоритм розрахунку додаткових втрат у пазовій частині обмотки статора на підставі опису електромагнітного поля в двовимірному формулюванні, що дає змогу врахувати вплив потоку пазового розсіювання, основного магнітного потоку та насичення магнітопроводу в їх взаємозв'язку.

4. Отримано аналітичні вирази для розрахунку еквівалентних коефіцієнтів теплопровідності анізотропних у тепловому відношенні тіл, зокрема для обмотки й осердя статора ВБПМ, з використанням яких розроблено методи теплового розрахунку ВБПМ, що відповідають системам охолодження IC15 та IC37 та дають можливість оцінити правильність вибору основних електромагнітних навантажень машини та ефективності обраного способу її охолодження.

5. Отримали подальший розвиток методи розв'язання фундаментальних для нелінійної теорії електричних машин задач розрахунку явної магнітно-механічної характеристики та магнітно-механічних параметрів у двовимірній польовій постановці, й на основі отриманих розв'язків удосконалено математичні моделі для розрахунку перехідних процесів і статичних характеристик з урахуванням особливостей конструкції ВБПМ, що дає змогу врахувати насичення магнітопроводу, вищі просторові гармоніки магнітного поля в повітряному проміжку та вплив реакції якоря у взаємозв'язку цих чинників.

6. Удосконалено математичну модель для розрахунку електромеханічних перехідних процесів у електромеханотронній системі, що складається з ВБПМ, напівпровідникового комутатора та давача положення ротора, й дає змогу врахувати взаємозв'язок дійсної форми поперечного перерізу магнітопроводу, його насичення, двовимірного просторового розподілу векторного магнітного потенціалу, нелінійності вольт-амперних характеристик напівпровідникових елементів силових кіл.

Практичне значення результатів.

Здійснено програмну реалізацію системи аналізу проектних рішень створення ВБПМ, яка передбачає інтерактивний вибір властивостей активних матеріалів,

конструкції та типу обмотки статора, конструкцій ротора та підшипникових опор, систем змащування та охолодження, а також проведення розрахунків розмірів, обмоткових даних, статичних робочих характеристик та попередню оцінку теплового стану машини.

Розроблено прикладне програмне забезпечення для оперативного аналізу показників створюваної ВБПМ й проведення параметричної та структурної оптимізації її конструкції.

Здійснено програмну реалізацію математичних моделей, призначених для розрахунку:

- електромеханічних перехідних процесів у електромеханотронній системі, що складається з ВБПМ, напівпровідникового комутатора та давача положення ротора;
- повних втрат в пазовій частині обмотки статора;
- додаткових втрат в полюсній системі ротора;
- поля механічних напружень в роторі, навантаженому відцентровими силами;
- критичних частот обертання ротора;
- поля температур у ВБПМ з системами повітряного охолодження типу IC0145 (0146, 0147), IC15 (16, 17) та рідинного охолодження — ICW37 (97) або ICU37 (97).

Запропоновано спосіб опису вольт-амперних характеристик (ВАХ) напівпровідникових елементів силового комутатора, який може використовуватися для моделювання процесів у електронних схемах, що містять напівпровідникові ключі на основі біполярних, MOSFET, IGBT транзисторів або тиристорів.

З використанням розроблених методів та створених математичних моделей запропоновано та захищено патентами України нові типи пристроїв на базі безконтактних електричних машин зі збудженням від ПМ.

Створене математичне та методичне забезпечення відповідає сучасному світовому рівню розвитку електромеханіки й може впроваджуватися як ефективний дидактичний інструмент для підготовки студентів-електромеханіків.

Окреслено напрями подальшого розвитку теорії ВБПМ: розробка підходів до оцінювання ефективності застосування магнітного екранування ротора з метою зниження поверхневих втрат і температури полюсної системи, використання нових матеріалів та удосконалення конструкції ротора з метою зниження його маси, впровадження методів обчислювальної гідрогазодинаміки для створення довершених алгоритмів розв'язання задач тепломасопереносу в ВБПМ.

Розроблені рекомендації та прикладне програмне забезпечення використані за виконання ряду госпдогвірних й держбюджетних тем та впроваджені у розробках ТзОВ СП «Електронтранс» (м. Львів), КБ «Квант» (м. Київ), Львівського науково-дослідного радіотехнічного інституту (м. Львів), ВАТ «Електромаш» (м. Херсон), ВАТ "Західенерго" (м. Львів), НВО «Эрга» (м. Калуга, Росія), а також у навчальному процесі для підготовки спеціалістів та магістрів електромеханіки з дисциплін «Основи моделювання електромеханотронних перетворювачів», «Програмні засоби моделювання електричних машин та апаратів». Матеріали дисертації покладено в основу дисципліни «FEM-аналіз в задачах електромеханіки» для підготовки здобувачів вищої освіти ступеня доктора філософії.

Особистий внесок автора.

Теоретичні положення, технічні рішення, розрахунки та інші результати, які представлені в дисертаційній роботі, отримані автором особисто. В друкованих працях, опублікованих у співавторстві, здобувачу належить: [79,88] – постановка задачі, розрахунок магнітного поля, аналіз отриманих результатів; [89,261,262] – програмна реалізація алгоритмів, розрахунок магнітного поля, аналіз результатів; [139] – розділ 10 «Математична модель вентильного двигуна постійного струму зі збудженням від постійних магнітів»; [245,247] – математичне формулювання задач, розробка алгоритмів та програмна реалізація математичних моделей; [246,259,260] – ідея способу перевірки рівня адекватності, розробка методик розрахунку, програмна реалізація; [298,299,300] – постановка задач, їх математичне формулювання та програмна реалізація; [78,86,103] – аналіз існуючих методів дослідження, програмна реалізація, проведення математичних експериментів; [104] – програмна реалізація, аналіз результатів; [163] – концептуальні пропозиції та інформаційне забезпечення

для проведення класифікації стратегій керування; [108,111] – обґрунтування прийнятих рішень, аналіз конструкційних виконань, розробка математичних моделей та їх програмна реалізація.

Спільно зі співавторами проводилося обговорення основних стратегічних напрямів та концепцій, виконання конструкторських, технологічних та патентних робіт.

Апробація роботи.

Основні результати наукових досліджень та конструкторських розробок доповідалися, обговорювалися та отримали схвальні відгуки на міжнародних і національних наукових конференціях, симпозиумах та семінарах, серед яких: X-а та XI-а Міжнародна науково-технічна конференція «Проблеми автоматизированного электропривода. Теория и практика», м. Алушта, 2002, 2003 р.; IV-а та VI-а Міжнародна наукова конференція «Математичне моделювання в електротехніці, електроніці та електроенергетиці», м. Львів, 2003, 2009 р.; IV-а Міжнародна науково-технічна конференція «Електромеханічні системи, методи моделювання та оптимізації», м. Кременчук, 2006 р.; Україно-Польській семінар «Проблеми альтернативної енергетики», м. Львів, 2010 р.; XXI, XXIV, XXV Seminarium Techniczne «Problemy eksploatacji maszyn i napędów elektrycznych» PEMINE, Rytro, (Польща), 2012, 2015, 2016 р.; XXII, XXIII, XXV Sympozjum Srodowiskowe PTZE «Zastosowania elektromagnetyzmu w nowoczesnych technikach i informatyce», Sandomierz, 2012, Mikolajki, 2013, Warszawa, 2015, (Польща); семінар НАН України «Моделі та методи комп'ютерного аналізу електричних кіл та електромеханічних систем», м. Львів, 2015 р.

Публікації результатів роботи.

Основні результати дисертаційної роботи опубліковані у 30 наукових працях (10 без співавторів), серед яких 1 монографія, 17 статей в наукових фахових виданнях України (з них 3 індексуються у Scopus), 9 в закордонних періодичних наукових виданнях (з них 4 індексуються у Scopus); 1 в матеріалах і тезах доповідей міжнародних конференцій, 1 патент України на винахід та 1 на корисну модель.

Структура й об'єм дисертації.

Дисертація складається із вступу, 6-ти розділів, висновків до роботи, списку використаної літератури, переліку використаних позначень та додатків. Повний обсяг становить 395 стор. Робота містить: 135 ілюстрацій до тексту, 64 з них на 36 окремих сторінках; 34 таблиці до тексту, 4 з них на 5 окремих сторінках; перелік скорочень на одній сторінці; список використаних джерел із 331 найменування на 35 сторінках; 5 додатків на 34 сторінках. Обсяг основного тексту становить 285 сторінок.

Автор висловлює щирю подяку доктору технічних наук, професору Фільцу Роману Володимировичу, багаторічна творча співпраця з яким сприяла вирішенню багатьох теоретичних проблем; науковому консультанту, доктору технічних наук, професору Щуру Ігореві Зеноновичу за постійну увагу до даної роботи, дієву участь у проведенні наукових досліджень, роботу з її захисту та пропагуванню результатів; колегам по роботі за моральну підтримку.

Окрему подяку автор хоче висловити декану електричного факультету Ченстоховської політехніки (Польща), професору Andrzej Ruseki за люб'язно надану можливість використовувати ліцензійно чисту копію програми Ansys.

РОЗДІЛ 1.

АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ОБГРУНТУВАННЯ ПРИЙНЯТИХ РІШЕНЬ ЩОДО ВИСОКОШВИДКІСНИХ МАШИН ЗІ ЗБУДЖЕННЯМ ВІД ПОСТІЙНИХ МАГНІТІВ

Здійснюючи огляд літературних джерел, присвячених проблематиці створення ВБПМ, встановлено три основних напрями науково-технічних досліджень, що ведуться фахівцями в усьому світі.

Перший напрям — дослідження електромагнітних процесів у таких машинах. До нього ж віднесемо проблеми адекватного розрахунку втрат потужності електромагнітного походження у ВБПМ.

Другий напрям — проблеми, пов'язані з механікою високошвидкісних машин. До нього долучимо задачі з визначення напружено-деформованого стану (НДС) обертових частин, розрахунку критичних частот обертання, мінімізації втрат у підшипникових опорах, балансування та ін.

Третій напрям стосується визначення теплового стану ВБПМ. Усвідомлюючи те, що параметри номінального режиму окреслюються виключно тепловим станом електромеханічного перетворювача енергії (ЕМПЕ), теплові розрахунки, в контексті створення високошвидкісних машин, сприймаються нами як невід'ємна частина процесу проектування, а не як його деяка додаткова опція.

У цьому розділі розглянемо детально вищезгадані напрями.

1.1. Основні показники номінального режиму та головні розміри

Під основними показниками номінального режиму розумітимемо: для генераторів — фазну напругу за відомої частоти обертання та коефіцієнта потужності; для двигунів — частоту обертання за відомого моменту на валу та напруги живлення.

Математичне моделювання як метод наукового дослідження набрало такої популярності, що аналітичні підходи в проектуванні, здається, перебувають у стані поступового, але незворотного занепаду. Якщо судити за кількістю публікацій в

останньому десятилітті про роль таких тривіальних задач електромеханіки як розрахунок зовнішньої характеристики генератора та механічної характеристики двигуна, може скластися враження, що ці питання вже вирішені остаточно або їх рішення не становить наукового інтересу. Сучасні вчені, використовуючи високоадекватні математичні моделі на базі МСЕ, не відчують жодних проблем з розрахунком статичних характеристик [159,184,251,297,314,323] та параметрів усталеного режиму [182,301].

Виникає закономірне питання, а на підставі яких міркувань вони отримують вхідну інформацію для своїх моделей — розміри активної частини, обмоткові дані, необхідні властивості активних матеріалів? Відповідь, на нашу думку, очевидна — використовуються існуючі методики проектних розрахунків, більшість з яких, стосовно машин зі збудженням від ПМ, розроблена у 80-х роках ХХ століття. Їх адекватність повністю відповідає традиційним вхідним допущенням про відсутність насичення магнітопроводу, синусоїдальну форму струмів, відсутність вищих гармонік у магніторушійній силі (МРС) якорної обмотки, заміну реального розподілу радіальної складової вектора магнітної індукції у повітряному проміжку розрахунковим значенням потоку та ін. Стосовно розрахунку безконтактних генераторів зі збудженням від ПМ, — в основному використовують теорію двох реакцій, що дозволяє описати процеси в машині САДР зі сталими коефіцієнтами, інші аналітичні та графоаналітичні методи, фазорні та векторні діаграми тощо [10,26,208,210,292].

Ціла низка авторів пропонує виконувати проектний розрахунок безконтактного генератора зі збудженням від ПМ як синхронної машини загальнопромислового призначення [38,183,296], а робочий магнітний потік під навантаженням визначати за кривою розмагнічування ПМ графоаналітично [2,26] на підставі інтерполяційних формул [120,178,214].

Поступово ці методи стали вважати класичними, а їх застосування знайшло своє місце не лише в наукових статтях [106,177], дисертаціях [38,48] та монографіях [72, 292], а й у підручниках [19,26,164].

Спроба врахування насичення магнітопроводу або не проводиться взагалі, або

використовуються різноманітні «уточнюючі» коефіцієнти, методики визначення яких неоднозначні [58,154]. У роботі [190] намагаються врахувати насичення на підставі статичних значень індуктивностей по осях d та q , а автор [54], на додачу, здійснює гармонічний аналіз усталеного режиму.

Основний вид технічних об'єктів, де застосовуються високошвидкісні безконтактні генератори — автономні системи електропостачання [36,37,231]. В них, як правило, навантаження підключають через керовані або некеровані випрямлячі, а тому їх ще називають вентильними генераторами [19, 20].

Особливістю роботи синхронного генератора на випрямне навантаження є безперервно повторювані несиметричні перехідні процеси, внаслідок яких машина перебуває в деякому квазіусталеному режимі. Істотний вплив на величину та форму випрямленої напруги під навантаженням здійснює індуктивний характер джерела живлення (генератора), напруги на його обмотках та вентилях, а також характер навантаження зі сторони випрямленої напруги. Зі збільшенням навантаження змінюються співвідношення між фазними напругами та струмами й цими величинами на стороні DC. Випрямлена напруга на комутаційному періоді вже не змінюється по огинаючих фазних або лінійних напруг, як це має місце в режимах, близьких до неробочого ходу. Тому розроблено методики, автори яких намагалися врахувати ці взаємозв'язки. Так, у [18,19,189] для розрахунку зовнішньої характеристики генератора пропонують використовувати d,q -перетворення та графоаналітичні методи на основі векторних діаграм. Автор [26] наголошує на необхідності врахування впливу випрямляча, але використовує ту саму теорію двох реакцій.

Ми переконані, що арсенал сучасної електромеханіки, а саме запропонована в 1981 р. професором Фільцом Р.В. нелінійна теорія електричних машин [154,155], містить необхідні методи, безсумнівними перевагами яких ми скористалися [79,81, 298,300].

Розуміючи, що наявність нелінійних електромагнітних зв'язків між режимними величинами у високошвидкісних генераторах з ПМ зумовлена не лише насиченням магнітопроводу, а й специфічними вольт-амперними характеристиками

напівпровідникових елементів, ми прийняли наступне рішення: для розрахунку зовнішньої характеристики безконтактного генератора зі збудженням від ПМ на початковому етапі процесу проектування використовувати основні положення теорії Парка-Горева [260]; для врахування насичення головного магнітного кола — концепцію диференційних параметрів; взаємозв'язок впливів вищих просторових гармонік МРС якірної обмотки, дійсної геометрії поперечного перерізу магнітопровода машини, наявність напівпровідникового випрямляча та характеру навантаження в ланці DC, враховувати на етапі уточнення проектних рішень за допомогою високоадекватних математичних моделей, що побудовані на підставі теорії електромагнітного поля [77,258] або на підставі комбінованих методів, з одночасним використанням підходів, характерних для систем з розподіленими та зосередженими параметрами [80,83]. В подальшому викладі, якщо це не викликатиме непорозумінь, ці підходи (методи, моделі, і т.п.) називатимемо польовими та коловими.

Перед початком розмови про розрахунок характеристик безконтактних магнітоелектричних двигунів варто звернути увагу на певну неузгодженість термінів, що використовуються для класифікації цих машин у англomовних наукових виданнях та російсько- чи україномовних.

Міжнародна наукова спільнота електромеханіків розрізняє два різновиди таких машин залежно від способу керування ними:

BLDCM (англ. *Brush-Less Direct Current Motor*) — це машини, живлення яких здійснюється від джерела постійного струму імпульсно по фазах, у відповідності до положення ротора, форма фазного струму таких машин нагадує трапецію;

PMSM (англ. *Permanent Magnet Synchronous Motor*) — машини, спроектовані для роботи від джерела синусоїдальної напруги або струму, початкові фази та частота яких, як правило, залежатимуть від кута повороту ротора.

Перший зі згаданих способів керування надалі називатимемо дискретним, а другий — неперервним.

Найбільш поширеним але не єдиним алгоритмом дискретного керування BLDCM є 6-тактова комутаційна схема [163,191,195]. Відповідна послідовність

комутації електричних контурів записана у табл. 1.1. Умовні напрями фазних струмів, у відповідності до номеру такту, показані на рис. 1.1, *а*. Напрямок результуючої МРС за цього способу керування змінюється стрибкоподібно й займає послідовно одне шести визначених просторових положень (рис. 1.1, *б*).

За неперервного керування фазор результуючої МРС обертається неперервно, а його величина є сталою в часі [245,246,247], отже, можна говорити про створення обертового магнітного поля (рис. 1.2).

У російсько- чи україномовних виданнях такі двигуни не розрізняють за способом керування й називають вентильними двигунами або безконтактними. В роботі вжито другий термін, як більш усталений.

Спираючись на власний досвід у створенні високошвидкісних двигунів з ПМ [51,85], можемо сказати, що без зворотного зв'язку за положенням ротора їх динамічна стійкість невисока, особливо у машинах з повехневим розташуванням ПМ. У режимах роботи з частотним пуском та регулюванням частоти обертання можливе випадіння двигуна з синхронізму, наприклад, під дією збурень випадкового характеру. Повторне втягування в синхронізм відбувається нестабільно, навіть за умови приблизного вирівнювання частот обертання ротора та поля статора, й найчастіше потребуватиме повної зупинки та повторного запуску. Це суттєво знижує експлуатаційні якості таких двигунів, а практичне застосування такого режиму обмежене, хоча у публікаціях [27,329] досліджується саме цей різновид безконтактних машин — без зворотного зв'язку та за умови гармонічного живлення.

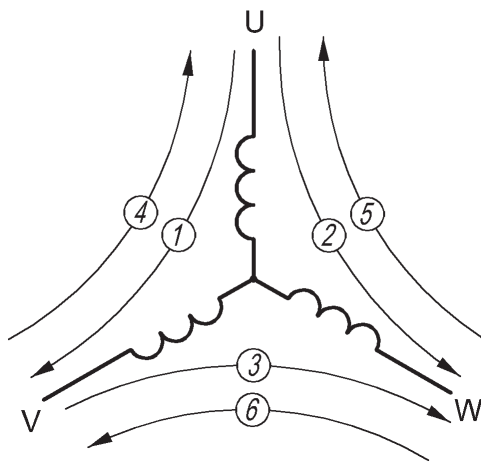
Питання розробки систем керування високошвидкісними безконтактними машинами нерозривно пов'язані з питаннями їх проектування. Постійно ведуться роботи зі створення та удосконалення систем керування, що не містять давача положення ротора, а синхронізація процесу комутації відбувається за допомогою математичної обробки форм сигналів струмів та/або напруг за алгоритмом дискретного [63,85,194,207,328], або неперервного [3] керування. Бездавачева система з коректором коефіцієнта потужності розглядається у [315], а в [165] використовується швидкодіюча система з аналоговим керуванням. Розробці приводів малої потужності з квазісинусним живленням присвячені праці [242,285].

Комутаційна послідовність

Позн. контуру (фази) \ № такту	1	2	3	4	5	6
U	+	+	0	-	-	0
V	-	0	+	+	0	-
W	0	-	-	0	+	+

Примітки: (+) – початок контуру комутується на $+u_{DC}$; (-) – початок контуру комутується на $-u_{DC}$; (0) – початок контуру не заживлюється, (u_{DC} – напруга живлення двигуна).

а)



б)

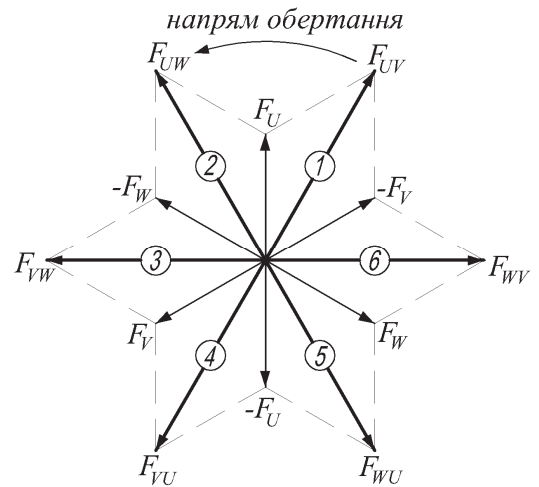


Рис. 1.1. Принцип роботи двигунів типу BLDCM

а) напрями фазних струмів у відповідності до номерів тактів комутаційної послідовності (див. табл. 1.1.); б) фазорна діаграма MPC якоря

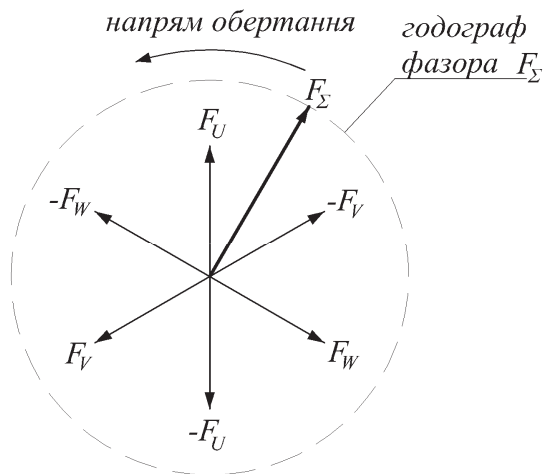


Рис. 1.2. Фазорна діаграма MPC якоря для двигуна типу PMSM

З огляду на вищенаведені аргументи, ми прийняли рішення віддати перевагу дискретній системі керування, а двигуни типу BLDCM вважати найбільш прийнятними для застосування як високошвидкісні.

Аналіз публікацій, присвячених проблемам створення високошвидкісних двигунів, виявив стан справ, подібний до ситуації з високошвидкісними генераторами. Визначення частоти обертання під навантаженням на валу здійснюють, в основному, з використанням FEM-аналізу (англ. *The Finite Element Method*) [47,123,199,211,223,232,266,276,321] або застосовуючи теорію двох реакцій Парка-Горева та теорію кіл [10,26,60,72,178,181,204,276,292,331]. Наприклад, у [309] використовується колова математична модель у dq -координатах для вирішення типових задач електроприводу, а автор [219] застосовує гармонічний аналіз.

Не відмовляються дослідники й від аналітичних методів [104,139,140,232]. Причому використовують їх у оптимізаційних задачах стосовно ВБПМ [136,284], що, на нашу думку, цілком виправдано, а FEM-аналіз, з цією ж метою, застосовано у [102, 156,179].

Форма фазних напруг та струмів у двигунах типу BLDCM далека від синусоїдальної. Автор [100] зауважує, що BLDCM двигун на позакомутаційному інтервалі представляє собою несиметричну індуктивно зв'язану систему, дві фази якої увімкнено послідовно до джерела живлення, а одна відімкнена від нього. Це відповідає однофазному режиму. Здійснити математично коректне зведення вихідної САДР у фазних координатах до САДР зі сталими коефіцієнтами, з використанням d,q -перетворення, неможливо. Тому пропонується аналітичне розв'язання вихідної САДР, очевидно, що в лінійній постановці.

Ми повністю погоджуємося з цим застереженням та впевнені, що особливості керування BLDCM повинні враховуватися на етапі первинного проектного розрахунку, особливо для розрахунку частоти обертання двигуна під навантаженням. Порівняно простий спосіб, що задовольняє вищезгадану вимогу й не потребує використання спеціалізованого програмного забезпечення, викладений у [99]. Саме він застосований у дисертації для розрахунку механічної

характеристики високошвидкісних двигунів, але з власними доповненнями та удосконаленнями.

Основні проблеми створення високошвидкісних двигунів вивчаються та систематизуються давно [2,158]. Але й в останній час з'являються роботи, присвячені їм повністю [133,184,220]. Треба зазначити, що багато дослідників використовують комплексний підхід до задач проектування ВБПМ, тобто беруть до уваги не лише взаємозв'язки електромагнітного походження, а й тепловий стан [180] та/або проблеми міцності конструкції [127,128].

Різні способи живлення PMSM та BLDCM, а також принципово різні експлуатаційні вимоги до машин цих двох видів спричиняють відмінності у їх конструкціях, зокрема у конструкціях активної частини роторів.

У багатьох публікаціях беруться до уваги вимоги механічної міцності та вібраційної надійності. З огляду на це, аналізуються переваги та недоліки роторів різних конструкцій [16,40,46,89,114,267,299], деколи доволі екзотичних [215,220, 233]. Це питання також є предметом винахідницької діяльності [14,15,108-111,319, 325].

В англomовних виданнях вживають спеціальні аббревіатури для конкретизації конструкції ротора з ПМ — ротори з поверхневим розташуванням полюсів називають SPM (англ. *Surface Permanent Magnet*) [199], а з внутрішнім — IPM (англ. *Interior Permanent Magnet*). Переваги роторів типу IPM розглядаються у [24,122, 236,281,294].

Порівняно невелика кількість праць присвячена аналізу типів обмоток машин зі збудженням від ПМ та їх конструкціям [195,234,257]. Безпазові машини зі збудженням від ПМ розглядаються у [8].

Всупереч прихильникам традиційних підходів [72,73], хочемо наголосити на особливостях та відмінностях, притаманних проектуванню ВБПМ.

Наприклад, немає єдиної думки щодо способу визначення головних розмірів ВБПМ, довжини l_δ та діаметру розточки D . Класично, зв'язок між ними встановлює стала Арнольда [119] —

$$C_A = \frac{nl_\delta D^2}{S} = \frac{8,603}{k_{w1} B_\delta A}, \quad (1.1)$$

де k_{w1} – обмотковий коефіцієнт для першої гармоніки електрорушійної сили (ЕРС). Натомість, у [18] категорично пропонується аналогічний вираз

$$C_A = \frac{nl_\delta D^2}{S} = \frac{6,1}{\alpha_\delta k_f k_{w1} B_\delta A}, \quad (1.2)$$

куди включено коефіцієнт полюсного перекриття α_δ та коефіцієнт форми поля k_f . Значення C_A за (1.1) та (1.2) дорівнюватимуть лише при $\alpha_\delta \approx 0,64$ ($k_f = 1,11$), що не завжди відповідає дійсності, особливо для роторів у вигляді суцільного циліндра. Тому в подальшій роботі над методикою проектного синтезу ВБПМ ми використовуватимемо (1.1).

Вибір величини робочого повітряного проміжку теж виконують або традиційно, враховуючи лише реакцію якоря [29,210], або зважаючи й на перевантажувальну здатність машини та ймовірність незворотного розмагнічування полюсів з ПМ [184,233,293].

Рівень пульсацій електромагнітного моменту та фазних ЕРС беруть під увагу в [87,102,103], використовуючи математичний апарат різного рівня складності.

Ці й багато інших факторів нашоухують на думку про потребу у принципово інших підходах до проектування ВБПМ.

Також хочемо звернути увагу на теоретичні засади створення математичних моделей ВБПМ та коло задач, що вирішують за їх допомогою.

Для первинного проектування ЕМ цілком достатньо розв'язати задачу магнітостатики — за відомими фазними струмами та положенням ротора розрахувати магнітний потік та/або електромагнітний момент. Це здійснюють за допомогою колових або польових математичних моделей, що описують ЕМ як систему зі зосередженими чи розподіленими параметрами. Колові моделі використовують [81,93,101]. Лінійні колові моделі електричних машин — основний інструмент електроприводу, використані у [32,115], хоча мають місце й спроби врахувати насичення магнітопроводу, скориставшись результатами попередньо

проведених польових досліджень [298,300]. Польові моделі на основі МСЕ використані в дослідженнях [37,88], автори статті [116] розв'язують рівняння Максвелла в інтегральній формі, а в [92] порівнюються колові та польові підходи.

Після розрахунку статичних характеристик машини актуальними стають запитання вищого рівня складності: яка максимальна перевантажувальна здатність машини, що не загрожує незворотним процесом розмагнічування полюсів; яка величина реактивного моменту, що виникає за рахунок притягання полюсів ротора до зубцевого шару осердя статора; чому дорівнює похідна dI/dt , що обмежуватиме максимальну частоту обертання двигуна; які величини додаткових втрат в статорі та роторі, зумовлені вихровими струмами; величини часів розгону та динамічного гальмування та ін. Лише моделі призначені для розрахунку динамічних характеристик — перехідних електромагнітних чи електромеханічних процесів, можуть дати на них відповідь.

Як правило, такі моделі є комбінованими, тобто в своєму математичному формулюванні використовують колові та польові рівняння одночасно. Використовуючи поняття магнітно-механічних параметрів (ММХ) [79,154], та підготувавши спеціалізоване математичне забезпечення [76,84], ми обрали наступну стратегію в питаннях створення математичних моделей ВБПМ. Моделі для перехідних електромеханічних процесів будуватимемо на підставі явної ММХ, отриманої за двовимірного формулювання задачі магнітостатики, а рівняння динаміки фігуруватимуть у коловому формулюванні. Такі моделі надають можливість математично коректно описати нелінійні електромагнітні зв'язки та реальну форму магнітопроводу. двовимірний розподіл вектора магнітної індукції враховує вищі просторові гармоніки в складі МРС обмотки статора, їх вплив на величину електромагнітного моменту, фазну ЕРС та ін. Програмна реалізація алгоритмів таких моделей забезпечує прийнятну швидкість на обчислювальних системах класу «персональний комп'ютер», не кажучи вже про спеціалізовані робочі станції, розподілені обчислювальні кластери чи суперкомп'ютери.

Проте такий підхід, в принципі, не передбачає визначення поля густини струму в струмопровідних ділянках активної зони машини. Тому за розрахунку

втрат, спричинених вихровими струмами ми використовуватимемо польові моделі, що ґрунтуються на рівняннях динаміки у польовому формулюванні (п. 3.2).

Ми обмежили своє дослідження розглядом машин з частотою обертання, що не перевищує 200 тис. об/хв, але останні досягнення у галузі матеріалознавства та неспинний розвиток технології електромашинобудування дає змогу вже зараз говорити про створення машин зі значно вищим потенціалом. Так, у [331] йдеться про початок розробки двигуна на 500 тис. об/хв потужністю 1 кВт.

1.2. Втрати енергії та способи їх мінімізації

Найбільша кількість публікацій, що стосується ВБПМ, присвячена теоретичним та експериментальним дослідженням процесу перетворення енергії, який неминує призводити до її втрат. Саме на адекватному визначенні втрат сконцентровані основні зусилля дослідників даного напрямку електромеханіки й наші також.

Джерела втрат, які в машинах загальнопромислового призначення вважаються основними, у високошвидкісних машинах відходять на другий план, натомість, виникають нові, що проявляють себе як пріоритетні.

Спираючись на матеріали наукових публікацій та на власні дослідження ми провели порівняння складових втрат потужності у ВБПМ та у звичайній безконтактній електричній машині зі збудженням від постійних магнітів (БПМ). На рис. 1.3, на якісному рівні, продемонстровано результати цього порівняння. Отриманий результат, який опосередковано підтверджується у роботах [235,276, 320], демонструє разючу різницю між цими розподілами.

Половину від усіх втрат ВБПМ складають механічні, до яких, крім тертя в підшипниках, віднесено аеродинамічне тертя ротора з газом довкілля. Натомість у БПМ, що працюють за частот обертання до 3000 об/хв, ці втрати можна віднести до класу другорядних.

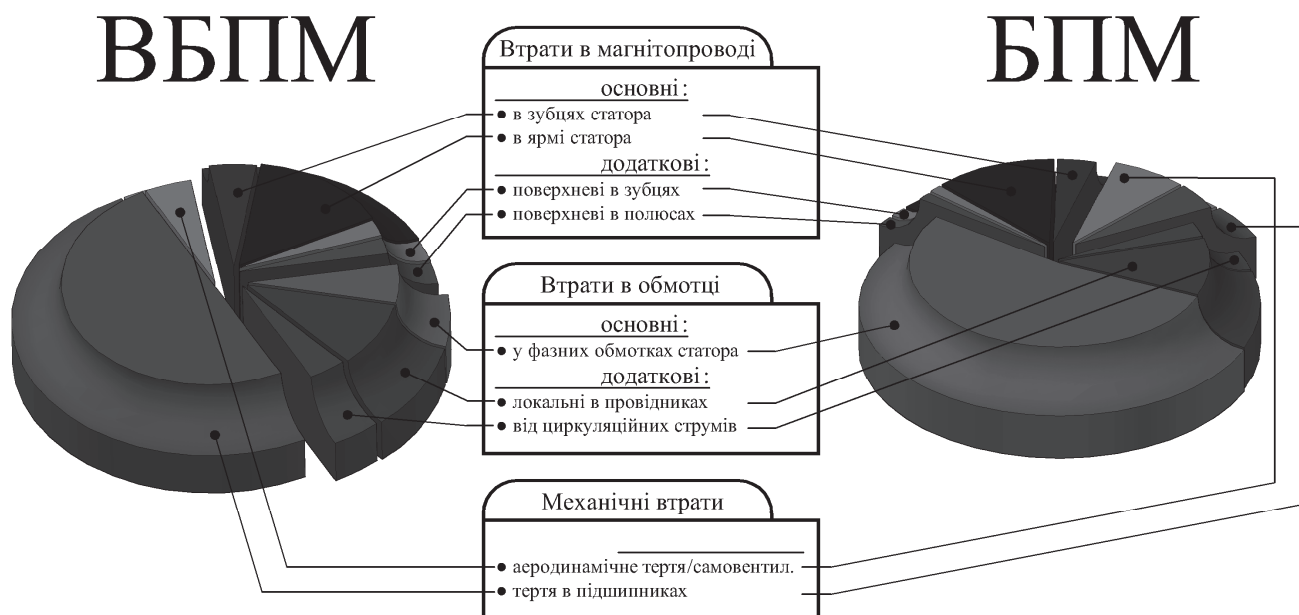


Рис. 1.3. Види втрат та їх порівняння у ВБПМ та БПМ



Рис. 1.4. Провідникові матеріали для змінного струму високої частоти, запозичене з [216]

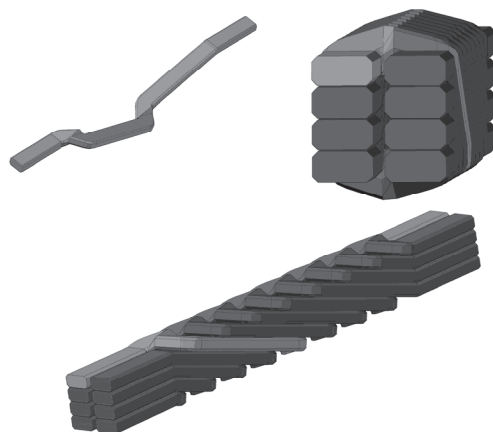


Рис. 1.5. Конструкція транспонованого стрижня Ребеля

Повні втрати в обмотці статора, які складаються з основних (I^2R) та додаткових, зумовлених дією вихрових струмів, також співвідносяться між собою не типово. Ефект витіснення струму викликає різко нерівномірний розподіл поля густини струму за площею перетину провідника обмотки в пазу машини, що збільшує додаткові втрати в міді обмотки якоря ВБПМ. Вони стають більшими за основні. Якщо для машин з частотою струму в якорі ~ 50 Гц додаткові втрати в міді обмоток складають $10\div 40\%$ від основних, то у ВБПМ вони можуть перевищувати їх у кілька разів, а тому саме термінологічне поняття «додаткові втрати в міді» стає суперечливим.

Серед різновиду втрат у магнітопроводі машини появляється впливовий чинник — поверхневі втрати в ПМ. Невірний їх розрахунок або нехтування ними можуть звести нанівець усі зусилля зі створення ВБПМ.

Способи визначення додаткових втрат чи в міді, чи в магнітопроводі вимагають детальнішого аналізу.

1.2.1. Додаткові втрати в обмотці статора

Додаткові втрати в обмотці статора традиційно визначають на підставі функцій Емде. Оціночним показником виступає коефіцієнт Фільда, який демонструє, у скільки разів розрахунковий активний опір провідника з урахуванням ефекту витіснення струму буде більшим за його опір на постійному струмі $K_R = R_{AC}/R_{DC}$. Це класичний підхід за якого струми всіх провідників у пазу вважаються однаковими [124,160,161]. Дослідженню цього явища присвячено багато й сучасних робіт [78,86,185,206].

Для зменшення даного виду втрат традиційно використовують кілька конструкційних рішень [161]:

- поділ ефективного провідника обмотки на елементарні;
- збільшення кількості паралельних гілок обмотки;
- транспозицію елементарних провідників.

Поділ провідника на певну кількість елементарних, ізольованих один від одного провідників, що сполучаються гальванічно лише на кінцях паралельної гілки, призведе до зменшення додаткових втрат за рахунок зменшення висоти

окремого провідника. Для машин з частотою струму 50 Гц існує поняття критичного значення K_R , яке у випадку правильно спроектованої обмотки не перевищує $\approx 1,33$. Додаткові втрати в таких машинах не перевищують 33% від основних. На жаль, для ВБПМ такий критерій стає непридатним. Якщо за робочих частот прагнути досягнення критичного значення K_R , то розміри елементарного провідника стають настільки малими, що виготовлення обмотки буде неможливим або технологічно складним. Тому прийнятним значенням K_R вважатимемо величину з діапазону 6 – 15, а розміри провідника вибиратимемо з огляду на значення глибини проникнення [160].

Кілька розробників ВБПМ пропонують для виготовлення обмоток статора використовувати так званий ліцендрат (англ. *Litz-wire*) [166,210,219,250] — багатожильний провід, кожна жила якого вкрита ізолюючим лаком та переплетена з іншими (рис. 1.4). Основне його призначення — передача електричної енергії на високій частоті. Кількість жил у такому провіднику може сягати кількох сотень.

На жаль, поділ провідника на елементарні не є панацеєю. Він спричиняє втрати від так званих циркуляційних струмів, що замикаються по контурах, утворених окремими елементарними провідниками паралельної гілки. Кожен з цих контурів займає в пазах своє унікальне положення, отже їх потокозчеплення будуть не однаковими. Це й призводить до виникнення паразитних струмів i , пов'язаних з ними, втрат [9]. Радикальне вирішення даної проблеми у стрижньових обмотках — транспозиція елементарних провідників (рис. 1.5). Технологічна складність виготовлення таких стрижнів, на нашу думку, не повинна ставати на заваді використанню транспозиції у обмотках ВБПМ.

Досягнути істотного зменшення додаткових втрат за рахунок збільшення кількості паралельних гілок не завжди вдається. Адже кількість провідників в пазу ВБПМ, як правило, мала, й за максимально можливої кількості паралельних гілок висота провідника все одно залишатиметься істотною.

Безумовно, розрахунок даного виду втрат з урахуванням насичення магнітопроводу, можливого проникнення в паз поля збудження та поділу ефективного провідника на елементарні можливий за використання чисельних

методів на основі МСЕ [172,229,261,262,317]. Аналітичним підходам теж віддають належне, завдячуючи їх відносній простоті та швидкодії [8, 185]. Низка цікавих результатів отримана за дослідження явища витіснення струму в обмотках високочастотних трансформаторів та дроселів [170,206,279].

Враховуючи такі передумови, додаткові втрати в обмотці статора визначатимемо: на етапі аналізу проектних рішень — спираючись на розв'язки, отримані для прямокутних стрижнів, розташованих у відкритому прямокутному пазу, без урахування впливу основного магнітного поля та насичення магнітопроводу; на етапах уточнення проектних рішень та оптимізації — з використанням польової математичної моделі, що враховуватиме розподіл вектора густини струму в провідниках обмотки, з урахуванням реальної форми паза, насичення магнітопроводу та за наявності поля збудження.

1.2.2. Основні втрати в осерді статора

Не залишена без уваги проблема визначення втрат в осерді статора. Основні втрати в магнітопровідних елементах електричної машини традиційно знаходять за виразом, що враховує інтегрально всі причини їх виникнення. Ці причини, як відомо, зумовлені гістерезисом, вихровими струмами та низкою додаткових чинників, зокрема неоднорідністю ступеня перемагнічування матеріалу. Такий підхід пройшов багатолітню апробацію й для машин з робочою частотою перемагнічування в околі 50 Гц дає цілком задовільний результат [119,182,292].

За підвищеної частоти, характерної для ВБПМ, кожен зі згаданих чинників починає проявляти себе по різному, що не може бути враховано за традиційного інтегрального підходу в принципі [112]. Проблема полягає у відсутності даних про питомі втрати у магнітом'яких матеріалах за таких частот. Крім цього, для виготовлення осердь ВБПМ використовують листи магнітопровідного матеріалу, наприклад електротехнічної сталі, товщина яких менша за звичні 0,5 мм. Це вносить додаткову похибку у традиційну методика, адже всі емпіричні коефіцієнти та рекомендації ґрунтуються на експериментальних даних, отриманих, як правило, на взірцях товщиною саме 0,5 мм [280].

Незважаючи на такі обставини, у [243] використовують класичні підходи і для

високошвидкісних машин, а у [249] застосовують їх для безконтактних машин з широтно-імпульсним регулюванням напруги.

Нами вирішено скористатися способом обчислення основних втрат [68], який надає можливість вносити необхідні корективи та враховувати вплив частоти перемагнічування, інтенсивності магнітного поля та товщини листа окремо для кожного чинника. Іншими словами, цей спосіб робить можливим визначення втрат у матеріалі для довільних значень частоти перемагнічування, магнітної індукції та товщини листа шихтованого осердя на підставі інформації про питомі втрати в сталі за нормованих значень частоти, індукції та товщини листа.

Відповідальним технічним рішенням, за проектування ВБПМ, є вибір матеріалу осердя статора. Сучасне електромашинобудування як матеріал осердь статорів використовує не лише кремнієві електротехнічні сталі [43,205]. Автор [250] проводить повний аналіз втрат високошвидкісної машини, осердя якої виготовлено з листового аморфного заліза [256]. Варто звернути увагу на кобальтові сплави заліза типу VACOFLUX та VACODUR [305], які мають низькі питомі втрати в частотному діапазоні >1 кГц й порівняно високу індукцію насичення. Протягом останніх 7-10 років інтенсивно розвивається лінійка порошкових матеріалів під назвою Somaloy [306]. Крім непоганих магнітних властивостей, їм притаманний значний питомий електричний опір. В осердях, виготовлених з цього матеріалу, можна істотно зменшити втрати від вихрових струмів. Порошкові магнітом'які матеріали на основі чистого заліза, заліза з кобальтом та заліза з оловом порівнюються між собою у [7].

Отже, різновидів магнітом'яких матеріалів, придатних для виготовлення осердь ВБПМ, доволі багато. Їх фізичні властивості, наведені в табл. 1.2, допоможуть здійснити вірний вибір, беручи до уваги не лише кон'юнктурні аргументи.

1.2.3. Додаткові втрати в роторі

Увага дослідників практично постійно прикута до проблеми визначення втрат від вихрових струмів, що спричинені проникненням поля вищих гармонік з повітряного проміжку в приповерхневий шар полюсної системи ротора. Питомий електричний опір ПМ на основі інтерметалічних сполук SmCo або NdFeB вищий

ніж у міді лише в 20-80 разів (див. табл. 1.2). Теплова дія вихрових струмів у таких роторах може призводити не лише до розмагнічування полюсів, а й до їх руйнування. Пріоритетність даної проблематики складно переоцінити, адже теплове необоротне розмагнічування може остаточно пошкодити всю полюсну систему машини, виготовлену з рідкісноземельних ПМ, вартість яких порівняно висока.

Таблиця 1.2

Фізичні властивості магнітом'яких матеріалів, за даними [43,50,205,256,268,305,306]

Листові матеріали					
Назва матеріалу, його марка	Товщина листа, мм/ коефіцієнт заповнення	Питомі втрати ¹, Вт/кг	Індукція насичення ², Тл	Питомий електр. опір, Ом·м	Густина, кг/м³
Сталь електротех. 2421	0,28/0,93	10,7 (0,75/0,4) 19,5 (1,0/0,4)	1,35 (1,0) 1,47 (2,5)	$0,50 \cdot 10^{-6}$	7650
Electrical Steel 20PNF1500	0,20/0,93	15,0 (1,0/0,4) 59,0 (1,0/1,0)	1,57 (2,5) 1,62 (5,0)	$0,50 \cdot 10^{-6}$	7650
Electrical Steel 30PNF1600	0,30/0,945	16,0 (1,0/0,4) 90,0 (1,0/1,0)	1,56 (2,5) 1,62 (5,0)	$0,59 \cdot 10^{-6}$	7600
Electrical Steel 35PNF1800	0,35/0,95	18,0 (1,0/0,4) 120,0 (1,0/1,0)	1,56 (2,5) 1,62 (5,0)	$0,59 \cdot 10^{-6}$	7600
Аморфне залізо Metglass 2605SA1	- />0,79	1,9 (1,0/0,4) 6,0 (1,0/1,0) 250 (1,0/10)	1,57 (-)	$1,3 \cdot 10^{-6}$	7180
Сплав Fe та Co VACOFLUX 48	0,35/-	14 (1,0/0,4) 55 (1,0/1,0)	2,15 (0,8) 2,27 (4,0)	$0,44 \cdot 10^{-6}$	8120
Сплав Fe та Co VACOFLUX 50	0,35/-	17 (1,0/0,4) 62 (1,0/1,0)	2,10 (0,8) 2,25 (4,0)	$0,44 \cdot 10^{-6}$	8120
Сплав Fe та Co VACODUR 50	0,35/-	19 (1,0/0,4) 62 (1,0/1,0)	2,05 (0,8) 2,20 (4,0)	$0,43 \cdot 10^{-6}$	8120
Сплав Fe та Co VACOFLUX 17	0,35/-	27 (1,0/0,4) 100 (1,0/1,0)	1,5 (0,8) 1,75 (4,0)	$0,39 \cdot 10^{-6}$	7940
Порошкові матеріали					
Назва матеріалу, його марка	Питомі втрати, Вт/кг (¹)	Індукція насичення, Тл (²)	Питомий електр. опір, Ом·м		
Somaloy 700	30 (1,0/0,4) 100 (1,0/1,0)	2,0 (10,0)	$450 \cdot 10^{-6}$		
Finemet FT3	50 (1,0/10,0)	1,2 (0,8)	$1,2 \cdot 10^{-6}$		

Примітки. 1 – у чисельнику індукція [Тл], у знаменнику частота [кГц], за яких проводилося вимірювання; 2 – напруженість магнітного поля [кА/м], за якої проводилося вимірювання.

Це спонукає підходити до задачі вибору матеріалу ПМ не лише з метою отримання максимального потоку в мінімальному об'ємі, а зважати також на електропровідність матеріалу, його механічні властивості (див. табл. 1.4) та

сумісність допустимих температурних режимів матеріалу ПМ з рештою активних частин машини. Наприклад, у [283,324] аналізують роботу ВБПМ, полюси якої виготовлено з фериту, а додаткові втрати в них відсутні повністю. Автори в [96] займаються дослідженням питомих втрат у матеріалі типу AlNiCo.

Рис. 1.6 містить типові криві розмагнічування для магнітотвердих матеріалів різних типів, а інформація з табл. 1.3 узагальнює їх фізичні властивості.

Задача розрахунку втрат в полюсах з ПМ розглядається в багатьох роботах, що свідчить про її актуальність. Частина робіт присвячена наближеним методикам, що ґрунтуються на емпіричному досвіді дослідників [168,244,326]. Але частіше застосовуються аналітичні [172,176,213,228,263,287,318,322] або чисельні методи, втілені у високоадекватних дво- та тривимірних польових моделях, які вимагають використання спеціалізованого програмного забезпечення [77,197,212,255,273,274].

Можна стверджувати, що у прикладних наукових дослідженнях стало нормою порівнювати результати аналітичних обчислень з результатами FEM-аналізу [75,192].

Зусилля дослідників [171,301,330] спрямовані на комплексне врахування втрат у матеріалі полюсів, металевих бандажах різноманітних конструкцій та екрануючих елементах. На вплив конструкції осердя статора та типу обмотки на рівень додаткових втрат в роторі звертають увагу в [197,327]. Доцільність сегментації магнітів доводять у [222,274,287,326].

Одна з останніх робіт на дану тематику, ще офіційно не опублікована, присвячена експериментальним дослідженням так званих гістерезисних втрат у полюсній системі індуктора [282].

Проведений аналіз підходів до вирішення даного питання нашою думкою про доцільність розробки такої методики розрахунку додаткових втрат потужності, яка, без використання високоадекватних математичних моделей, дозволить обчислювати їх величину з достатньою для інженерних потреб точністю.

Класична задача електродинаміки про розповсюдження плоскої хвилі у безмежному провідному напівпросторі описує векторне поле густини струму в одновимірній постановці [160], й дає змогу обчислювати відповідні втрати.

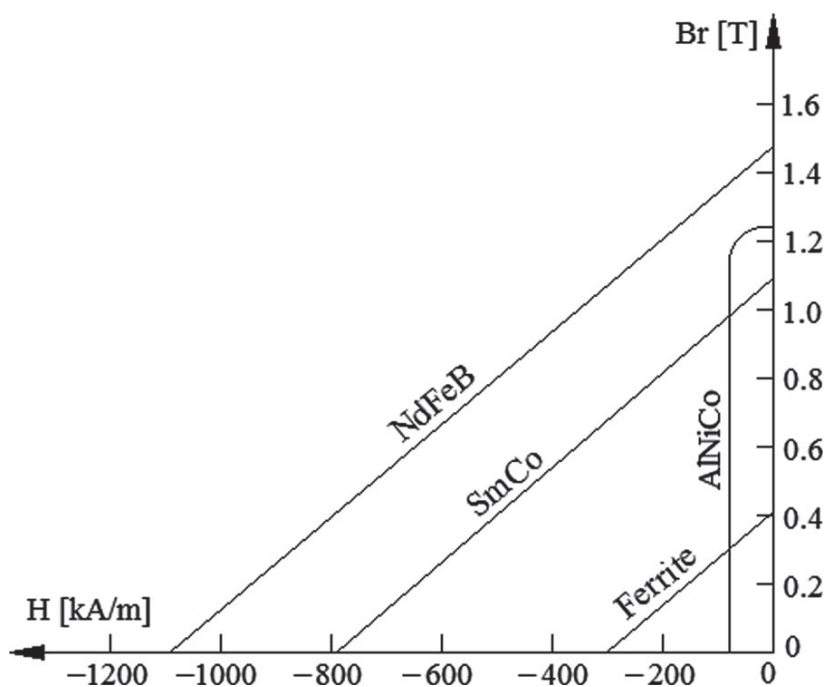


Рис. 1.6. Типові криві розмагнічування ПМ на основі FeBa, FeS, AlNiCo, NdFeB, SmCo за кімнатної температури, за матеріалами [282]

Таблиця 1.3

Фізичні властивості магнітотвердих матеріалів,
за даними [90,143,144,146,196,270,293,294]

Назва матеріалу, його марка	Залишкова індукція, Тл	Коерцитивна сила, кА/м	Питомий електр. опір, Ом·м	Густина, кг/м ³	Робоча температура, °С
<i>Сплави заліза з хромом та кобальтом (FeCrCo)</i>					
25X15K,27X12K,30X23K	0,8-1,2	25-55	$0,75 \cdot 10^{-6}$	7800	600
CROVAC 12/500	1,15-1,25	47-55	$0,70 \cdot 10^{-6}$	7600	480
<i>Порошкові матеріали на основі заліза, барію або стронцію (FeBa,FeSr)</i>					
28BA170, 30PA210, 30CA320, Y33H Y40	0,39 0,39 0,39 0,41-0,43 0,45-0,46	165 205 285 220-250 255-355	$>10^4$	4900-5100	250
<i>Сплави заліза з алюмінієм, нікелем та кобальтом (AlNiCo)</i>					
AlNiCo-5 AlNiCo-8 Koerzit 500 (порошок)	1,25-1,30 0,83-0,90 1,24	47,7-52,5 110-123 51	$0,47 \cdot 10^{-6}$	7300	450-550
<i>Рідкісноземельні порошкові матеріали на основі неодиму, заліза та бору (NdFeB)</i>					
VACODYM 6XX, 7XX, 8XX	1,00-1,47	830-1115	$(1,2 \div 1,6) \cdot 10^{-6}$	7600-7800	50-230
<i>Рідкісноземельні порошкові матеріали на основі самарію та кобальту (SmCo)</i>					
VACOMAX 225, 240 VACOMAX 145,170, 200	1,04-1,12 0,90-1,01	730-820 660-755	$(0,6 \div 0,9) \cdot 10^{-6}$ $(0,4 \div 0,7) \cdot 10^{-6}$	8400	300-350 250

Ідея розрахунку втрат на підставі розв'язання двовимірного рівняння Гельмгольца для машин з аксіальним напрямом проходження магнітного потоку викладена у [209]. Однак розрахункові формули, наведені автором, потребують адаптації для машин з радіальним напрямом потоку в проміжку, та, на нашу думку, незручні для використання. Але саме ця ідея покладена в основу аналітичної методики розрахунку поверхневих та пульсаційних втрат у полюсах ВБПМ, що представлена в цій дисертації [75].

1.2.4. Втрати на тертя та вибір типу підшипникових опёр

Втрати на тертя в опорах ВБПМ складають найбільшу частку порівняно з іншими видами втрат (див. рис. 1.3), тому питання вибору типу підшипникових опор, оцінка їх переваг та недоліків — одна з першочергових задач розробки конструкції ротора.

Конструктор, обираючи різновид підшипникових опор для ВБПМ, розглядає два альтернативних варіанти — підшипники кочення або ковзання.

За критерій попереднього вибору типу підшипника деякі автори рекомендують обирати інтегральний показник — добуток частоти обертання на еквівалентне навантаження підшипника. Однак навіть для серійних підшипників кочення, добуток максимально допустимої частоти обертання на динамічну вантажність коливається в доволі широких межах. Тому, проаналізувавши декларовані параметри найкращих високошвидкісних підшипників кочення провідних виробників SKF, IBAG (Швеція), Kooyo (Японія), SNR (Франція), IBC (Німеччина) [188,253,312,313], побудовано залежності максимально допустимої частоти обертання підшипників кочення n_{\max} (рис. 1.7, а) та їх динамічної вантажності C_r (рис. 1.7, б) від середнього діаметра d_m

$$d_m = \frac{D + d}{2}, \quad (1.3)$$

де D , d – діаметри зовнішнього та внутрішнього кілець підшипника, відповідно.

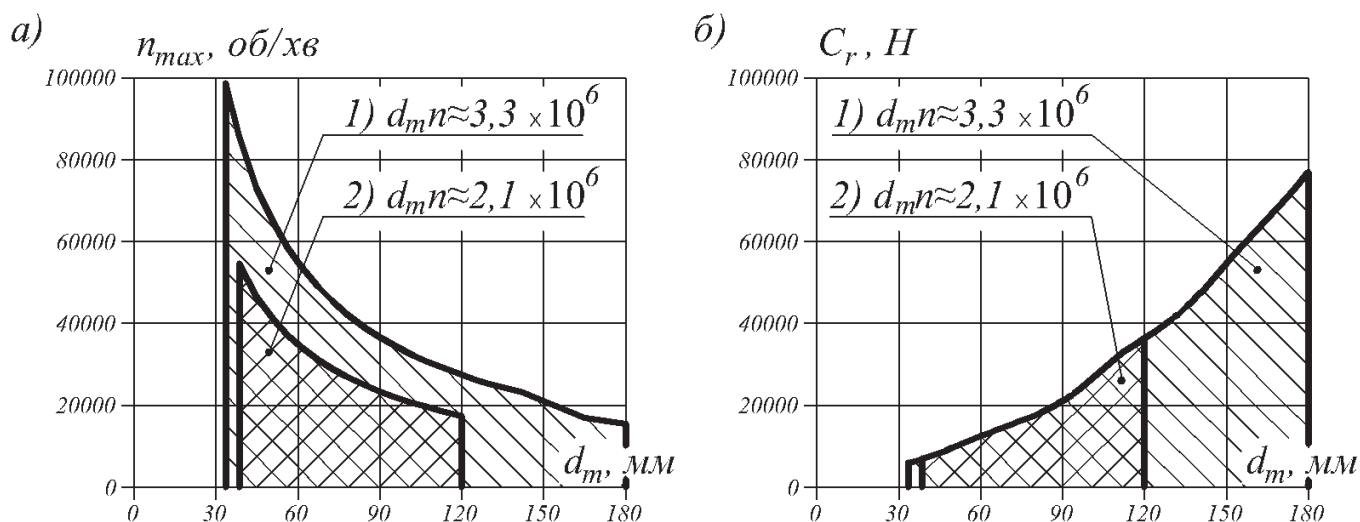


Рис. 1.7. Область застосування підшипників кочення

1) змащування рідкою оливою; 2) змащування консистентним мастилом

Таблиця 1.4

Порівняльна характеристика підшипників

Підшипники кочення	Підшипники ковзання
<i>Переваги</i>	
<ul style="list-style-type: none"> • порівняно низькі втрати на тертя і, як наслідок, високий ККД та менший нагрів; • порівняно менший момент тертя при пуску; • менші габаритні розміри в осьовому напрямі; • простота обслуговування та заміни; • в окремих випадках не потребує примусового змащування; • порівняно невисока вартість внаслідок масового виробництва підшипників; • спрощення ремонту машини внаслідок взаємозамінності підшипників. 	<ul style="list-style-type: none"> • максимальна частота обертання обмежується лише механічною міцністю шийки вала; • максимальна вантажність обмежується лише допустимими габаритами; • допускається робота в агресивних середовищах; • допускається робота за вібраційних та ударних навантажень; • можливе роз'ємне конструктивне виконання; • допускають регулювання проміжку і, як наслідок, точне встановлення геометричної осі обертання вала.
<i>Недоліки</i>	
<ul style="list-style-type: none"> • обмеження застосування за високих частот обертання та порівняно високих навантажень; • непридатність для роботи в умовах значних вібраційних та ударних навантажень; • порівняно вищий рівень шуму; • порівняно більші габаритні розміри в радіальному напрямі; • підвищена чутливість до неточностей монтажу. 	<ul style="list-style-type: none"> • порівняно високі втрати на тертя і, як наслідок, занижений ККД; • необхідність у примусовому змащуванні; • нерівномірне зношування шийки та вкладки; • для виготовлення застосовуються дорогі матеріали; • порівняно висока трудомісткість виготовлення.

Зважаючи на те, що у підшипниках ковзання, за умови виникнення рідинного тертя, обмеження за частотою обертання значно вищі ніж у підшипників кочення, можна стверджувати: якщо за відомого значення d_m частота обертання або еквівалентне навантаження виходять за межі областей, заштрихованих на рисунках, перевагу належить віддати підшипникам ковзання. В інших випадках, думаємо доцільно обирати підшипники кочення.

Додатково здійснено порівняльний аналіз підшипників двох видів, який допоможе у здійсненні однозначного вибору (табл. 1.4).

Чималий досвід створення підшипників кочення, узагальнений у [12,41,62, 105,113], суттєво допомагає дослідникам у нових розробках [30]. Найдосконаліші способи визначення втрат у підшипниках кочення надають фірми-розробники цих вузлів і ми використовуватимемо один з них [188, 313].

За вибору альтернативного варіанту опор — підшипників ковзання, ситуація інша. Звичайно, на ринку представлені виробники, що випускають серійно високотехнологічні підшипники ковзання для значних лінійних швидкостей, наприклад, фірми Caro-prometa [290] (Австрія) та Sartorius [118] (Німеччина) (рис. 1.8). Однак конструювання підшипникових вузлів високошвидкісних машин, у переважній більшості випадків потребує спеціального проектного розрахунку, який передбачає не лише вибір серійного підшипника за відомою вантажністю, як це має місце у випадку використання підшипників кочення.

Розрахунок підшипників ковзання, що працюють у режимі рідинного тертя ґрунтується на гідродинамічній теорії змащування Осборна Рейнольдса, що розвинута у багатьох спеціалізованих виданнях [135,157,241,278]. Переважна більшість цих методик зводиться до графоаналітичного розв'язання системи нелінійних рівнянь, які отримані шляхом алгебризації, за різного рівня деталізації узагальненого диференційного рівняння Рейнольдса

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\gamma_m}{\eta_m} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\gamma_m}{\eta_m} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12\gamma_m v_y + 6 \frac{\partial(\gamma_m v_x h)}{\partial x} + 6 \frac{\partial(\gamma_m v_z h)}{\partial z} + 12h \frac{\partial \gamma_m}{\partial t}, \quad (1.4)$$

де v_x , v_y , v_z – проекції швидкості поверхні цапфи відносно поверхні вкладки на осі системи координат OXYZ (вісь Z збігається з віссю обертання);

h , p – товщина змащувального шару та тиск на поверхні ковзання, відповідно;
 η_m , γ_m – динамічна в'язкість оливи та її густина, відповідно.

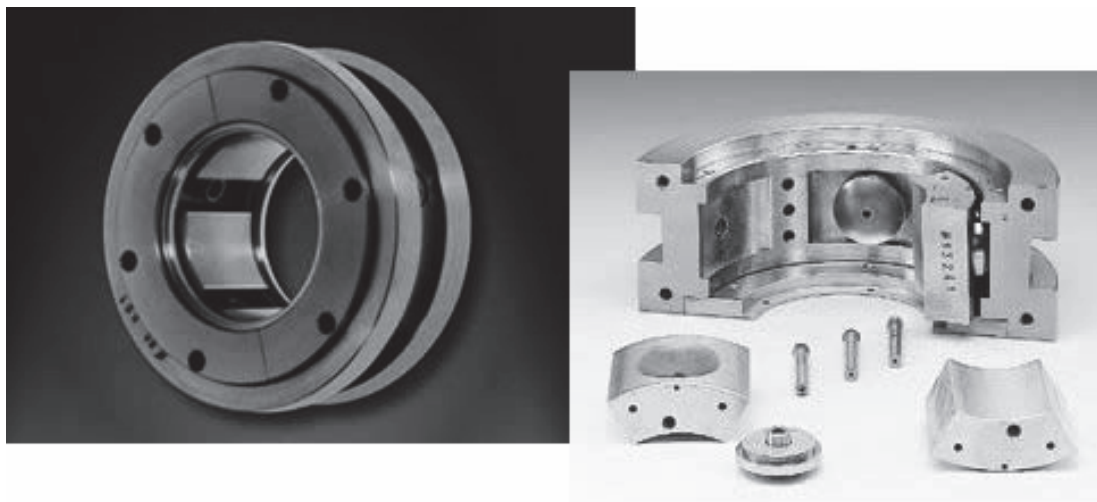


Рис. 1.8. Багатоклиновий підшипник ковзання з самоустановлювальними пелюстками фірми Sartorius (Німеччина), запозичене з [118]

Ці методи, оперуючи низкою відносних безрозмірних величин, потребують виконання послідовності однотипних розрахунків, наближаючи проектувальника до бажаного результату, а їх і так порівняно невисока точність залежить від поліграфічної якості виконання графіків, номограм, таблиць та акуратності вибору значень з цих довідникових джерел. Вони доволі добре відомі, застосовуються як для гідродинамічних, так і для гідростатичних підшипників, й навіть «увіковічені» у стандартах [201-203]. Але, на жаль, не передбачають застосування обчислювальної техніки. Результати проектного розрахунку підшипників ковзання використовуються для визначення втрат на тертя.

Вважаємо за необхідне формалізувати ці алгоритми та адаптувати їх для використання комп'ютера, що дозволить автоматизувати процес проектування підшипникових вузлів.

У випадках, коли частота обертання вала перевищує 70-90 тис. об/хв, використання підшипників з рідинним змащуванням стає недоцільним. Їх ресурс роботи істотно зменшується, а втрати потужності на тертя можуть перевищувати

потужність на валу. Застосування газу як змащувального матеріалу підшипників ковзання дає можливість істотно покращити техніко-економічні показники ВБПМ.

Розповсюджені газові підшипники, змащувальний шар яких утворює повітря. Рівень втрат у них порівняно нижчий, а обмеження на частоту обертання практично відсутні. Але існують проблеми з несучою здатністю та динамічною стійкістю, що безпосередньо пов'язані зі зростанням осьового розміру цапфи. Тим не менше, істотних успіхів у проектуванні таких систем досягнули [74]. Різні конструкції газових опор та рекомендації щодо їх вибору містяться у [52]. Переваги та недоліки так званих пелюсткових газових підшипників розглядають у [21]. Методика розрахунку газових опор та втрат у них викладена у [113] й адаптована нами для використання обчислювальної техніки.

На завершення розгляду підшипникових опор варто згадати про активний магнітний підвіс [277]. Передові позиції у створенні таких опор займає фірма SKF [217,218,316]. Результати наукових досліджень у цьому напрямі наведено у [186]. Здійснюються спроби використання комбінованих газоманітних опор, що мають низку переваг у порівнянні з просто газовими за показниками несучої здатності та жорсткості [64,117].

На жаль, доступна література не містить даних про інженерні методики розрахунку втрат у магнітному підвісі, тому ми не долучили цей вид опор до запропонованої нами системи аналізу проектних рішень.

Останніми розглянемо втрати аеродинамічного походження, що виникають за рахунок тертя поверхні ротора з газом, що її оточує. Цей вид втрат повністю залежить від властивостей та швидкості руху даного газу. Розподіл вектора швидкості в повітряному проміжку, в свою чергу, зумовлений тангенціальним потоком, від обертання ротора, осьовим потоком, від дії стороннього нагнітаючого насоса, та так званими завихреннями Тейлора, спричиненими відцентровими силами. Ґрунтовні дослідження цього виду втрат проведено у [168,295], де пропонується розрізняти характер руху газового потоку в проміжку на підставі теорії подібності, за числом Рейнольдса.

З'ясовано, що розподіл швидкостей в потоці залежить від шорсткості твірних поверхонь каналу [6,57,69,70,295]. Шорсткість зменшує градієнт швидкості та збільшує втрати на тертя. Методика розрахунку аеродинамічних втрат запозичена нами з [168,295].

1.3. Механічна міцність обертових частин та критичні частоти обертання

Класична теорія проектування електричних машин відводить питанням розрахунку НДС елементів конструкції, можна сказати, другорядну роль. Це зумовлено низкою причин. По-перше, в електромеханіці практично всі традиційні види механічних розрахунків носять характер перевіркових, тобто за відомими, наперед визначеними розмірами перевіряється міцність та/або жорсткість конструкційного елемента — вала, бандажа, елемента кріплення тощо. По-друге, результати цих розрахунків, як правило, не впливають на вибір головних розмірів машини та основних електромагнітних навантажень. Так, беручи до уваги величезний досвід попереднього проектування різних видів електричних машин [29,119,124,125,138,161], напрацьовано доволі чіткі рекомендації щодо економічно доцільного співвідношення головних розмірів, електромагнітних навантажень та значень «машинної сталі» для машин загальнопромислового призначення, які не враховують НДС елементів конструкції.

Для високошвидкісних машин питання механічної міцності та вібраційної надійності виходять на перший план. Тут вони визначатимуть можливість технічної реалізації проекту в цілому. Більше того, на допустиму область зміни головних розмірів накладаються істотні обмеження, зумовленні саме вищезгаданими причинами.

Вважається, що конструкція залишається працездатною, якщо механічні напруження, що виникають в ній під дією зовнішніх сил, не перевищують деякої межі пружності, або за яких деформації залишаються пружними.

Питання про допустимі значення механічних напружень постійно актуальне внаслідок появи матеріалів з унікальними механічними властивостями, поступової зміни методів та засобів промислового виробництва, вдосконалення технологій

тощо. Серед відомих підходів щодо їх вибору використовуватимемо табличний метод [11], а концентрацію напружень враховуватимемо за допомогою нормованих коефіцієнтів концентрації.

Теоретичним підґрунтям для вищезгаданих досліджень обрано теорію пружності [66,135], в термінах якої необхідно здійснити адекватний розрахунок НДС елементів конструкції ротора ВБПМ.

Очевидним рішенням даної задачі є математиче моделювання на основі чисельних методів. Беззаперечним лідером тут знову виступає МСЕ [33,53]. Його багаторічна апробація дає право стверджувати, що адекватність FEM-моделей повністю відповідає відправним допущенням.

Аналітичні підходи у визначенні НДС, незважаючи на свою консервативність, займають гідне місце серед арсеналу сучасних методів досліджень [107]. Їх перевага очевидна — максимально досяжна достовірність результатів за використання мінімальних обчислювальних ресурсів.

Ну й, звичайно, для перевірки чи підтвердження теоретичних гіпотез використовуються експериментальні методи [39].

У табл. 1.5 зібрано інформацію про механічні властивості матеріалів, що можуть використовуватися для виготовлення роторів ВБПМ.

Питання механічної міцності роторів ВБПМ тісно пов'язані з питаннями коливної динаміки та вібраційної надійності машини. Коливання роторів ВБПМ можуть викликатися різними причинами. Розглянемо лише ті з них, чий вплив, на нашу думку, є найзначнішим.

Незрівноваженість ротора. Це найбільш впливовий чинник, зумовлений неспівпадінням центра мас поперечних перерізів ротора з геометричним центром цих перерізів. Під дією власної маси горизонтально розташований ротор прогинається так, що його вісь — пружна лінія, стає пласкою кривою, розташованою у вертикальній площині. Якщо ротор ідеально зрівноважений, то за його обертання, площина, в якій розташовано пружну лінію, не змінюється, коливання в системі відсутні, прогин не залежить від часу.

Механічні властивості матеріалів для роторів ВБІМ [11,200,225,252,293]

Назва матеріалу, його марка	Термічна обробка	Межа плинності, МПа*	Густина, кг/м ³	Модуль Юнга, Па	Коеф. Пуассона
<i>Конструкційні сталі</i>					
40X	Загартування НВЧ, з глибиною шару 1,8-2,2 мм, відпуск	510	7600–7800	$(1,9 \div 2,1) \cdot 10^{11}$	0,25–0,3
45X	Загартування, відпуск	590			
12ХН3А	Цементация, загартування в маслі, відпуск	690			
Inconel 718	Загартування, відпуск	1034	8193	$2,04 \cdot 10^{11}$	0,3
<i>Магнітотверді сплави заліза з хромом та кобальтом (FeCrCo)</i>					
25X15K,	М'який відпуск	400	7600–7800	$2,1 \cdot 10^{11}$	0,3
27X12K, 30X23K	Загартування, відпуск	700			
CROVAC 12/500	М'який відпуск	620	7600		
<i>Магнітотверді порошкові матеріали на основі заліза, барію або стронцію (FeBa, FeSr)</i>					
28BA170, 30PA210, 30CA320, Y33H, Y40	–	895	4900-5100	$1,8 \cdot 10^{11}$	0,28
<i>Магнітотверді сплави заліза з алюмінієм, нікелем та кобальтом (AlNiCo)</i>					
AlNiCo-5 AlNiCo-8 Koerzit 500	–	345	7300	–	–
<i>Магнітотверді рідкісноземельні порошкові матеріали на основі неодиму, заліза та бору (NdFeB)</i>					
VACODYM 6XX, 7XX, 8XX	–	600–1250	7500–7800	$(1,4 \div 1,7) \cdot 10^{11}$	–
<i>Магнітотверді рідкісноземельні порошкові матеріали на основі самарію та кобальту (SmCo)</i>					
VACOMAX 225, 240	–	400-900	8400	$(1,4 \div 1,7) \cdot 10^{11}$	–
VACOMAX 145, 170, 200	–	600-1100	8400	$(1,0 \div 1,3) \cdot 10^{11}$	–
<i>Арамідні та вугільні волокна для бандажування</i>					
Kevlar	–	3000	1440	$1,2 \cdot 10^{11}$	–
Twaron, Heraclon	–	3600	1300	$(1,1 \div 1,2) \cdot 10^{11}$	–
РУСЛАН-СВН-Н	–	2800	–	$(1,1 \div 1,2) \cdot 10^{11}$	–
Tenax® IMS65	–	6000	1780	$2,9 \cdot 10^{11}$	–
<i>Титанові сплави</i>					
B120VCA	–	1000	4850	$1,02 \cdot 10^{11}$	0,3
BT3-1	–	830-1080	4500	$1,15 \cdot 10^{11}$	0,3

Примітка. *Для магнітотвердих композитних матеріалів — межа міцності на стискання; для арамідних та вугільних волокон — межа міцності на розрив.

У випадку обертання незрівноваженого ротора в кожному перерізі виникає відцентрова сила, пропорційна до величини ексцентриситету в ньому. Ця сила є основною причиною поперечних коливань ротора. Частота вимушених коливань у цьому випадку дорівнює частоті обертання ротора.

Неоднакова жорсткість перерізів вала відносно ортогональних осей. У роторах, що складаються з полюсів та вала як окремих деталей, переріз останнього у місці кріплення полюсів має різну жорсткість в напрямках головних осей інерції. Прогин ротора від власної маси в цьому випадку залежить від його кутового положення. За обертання такого ротора вимушуюча сила пульсуватиме з частотою кратною до кутової частоти обертання. Зрозуміло, що частоти поперечних коливань роторів дорівнюватимуть частотам вимушуючих сил.

Сили неконсервативного характеру. До таких сил відносять сили внутрішнього та зовнішнього тертя. Внутрішнє тертя містить дві основні складові, зумовлені конструкційним демпфуванням та гістерезисом матеріалів ротора. Конструкційне демпфування проявляється внаслідок мікрозсувів окремих деталей ротора між собою. Так, для складених роторів — це зсув між полюсами ротора та валом. Сухе або кулонове тертя не залежить від площі контактуючих поверхонь й пропорційне силі, що перпендикулярна до них, отже, впливатиме на нього лише попередній натяг елементів кріплення полюсів.

Гістерезис матеріалу ротора залежить одночасно від багатьох чинників, які практично неможливо аналізувати поодиночі. Експериментальні дослідження підтверджують дуже складну природу цього явища та встановлюють залежність гістерезисного демпфування від амплітуди коливань, їх частоти та температури матеріалу [141].

Зовнішнє тертя містить складову, зумовлену рухом ротора в своєму власному середовищі (повітря, природний газ, масляний туман тощо), а також складову від тертя в підшипникових опорах. Особливу небезпеку представляють неконсервативні сили, що виникають в несучому масляному шарі підшипників ковзання. Доведено, що саме вони можуть бути причиною автоколивань ротора [52].

Піддатливість опор. Не абсолютна жорсткість опор сама по собі не є

причиною виникнення коливань ротора. Але в сукупності з чинниками, розглянутими вище, пружність масляного шару у підшипниках ковзання, пружність підшипників кочення разом з технологічними проміжками та люфтами, піддатливість підшипникових опор здійснюють нелінійний вплив на динаміку обертової системи.

Динамічні збурення випадкового характеру. До таких збурень можна віднести раптові короткі замикання для генераторів або перевантаження для двигунів; раптове розбалансування ротора внаслідок його поломки.

Найважливішою механічною характеристикою ротора ВБПМ можна вважати його *критичну частоту обертання*.

Під критичними кутовими швидкостями або частотами обертання ротора розумітимемо такі кутові швидкості, за яких частота впливу зовнішніх збурень, наприклад, зумовлених силами від механічного небалансу, одностороннього магнітного тяжіння ротора до статора та радіальних сил іншого походження, збігається з частотою власних поперечних коливань ротора. Настає резонанс коливань, за якого істотно зростає прогин вала та вібрація опорних елементів конструкції. Це явище пов'язано з небезпекою виходу з ладу окремих вузлів, що в решті решт призведе до руйнування машини. Робота машини за таких частот обертання не допускається. Номінальна частота обертання ротора n_n повинна бути нижчою або вищою найменшої критичної частоти $n_{кр}$. Якщо $n_n < n_{кр}$ ротор називають жорстким, якщо $n_n > n_{кр}$ — гнучким.

Кажуть, що за критичної частоти обертання ротор втрачає стійкість. Теоретичні дослідження доводять, що навіть ідеально збалансований ротор, який не сприймає жодних зовнішніх силових впливів, за критичної частоти обертання знаходиться в стані нестійкої рівноваги [28,66,271]. Якщо прямолінійна форма осі вала з будь-яких причин буде порушена, то ротор втратить стійкість, як і за наявності ексцентриситета маси або з інших причин.

Для консервативної системи, тобто для системи без демпфування, амплітуди поперечних коливань за критичної частоти обертання прямують до нескінченності.

Конструкційне та гістерезисне демпфування істотно впливає, власне, на амплітуди коливань, а самі значення критичних частот слабо залежать від нього.

Ротор, що обертається з кутовою частотою ω , крім власного руху може здійснювати прецесійний рух, тобто такий, коли рух пружної лінії вала може бути незалежним від власного обертання. На рис. 1.9 схематично показано прецесійний рух ротора. Кутова швидкість вектора \bar{r} називається швидкістю прецесії. Якщо напрям обертання вектора \bar{r} збігається з напрямом обертання ротора, то такий рух ротора називають прямою прецесією (рис. 1.9, а), якщо напрями протилежні — зворотною (рис. 1.9, б).

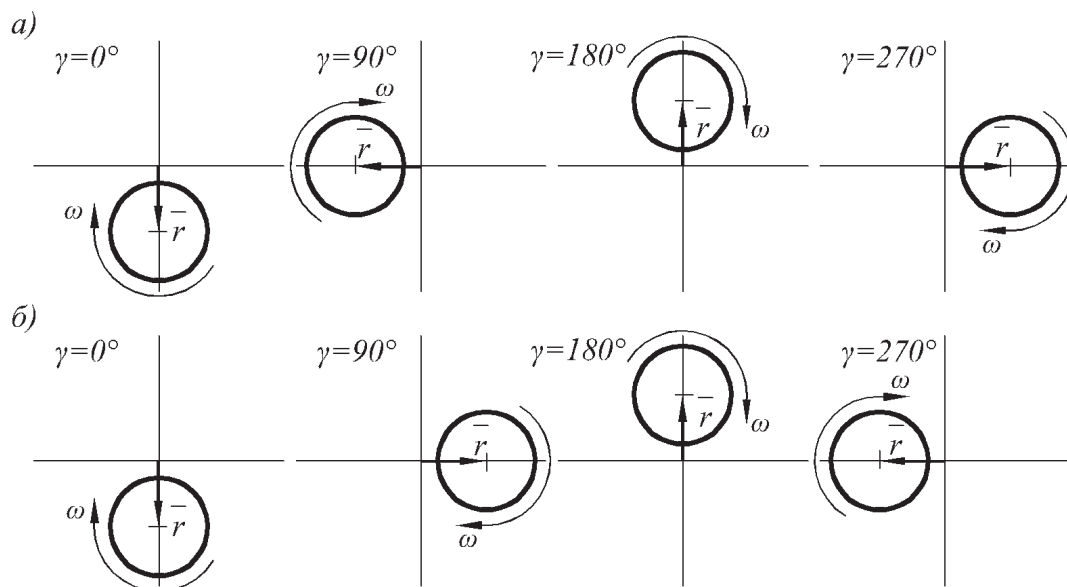


Рис. 1.9. Прецесійний рух пружної лінії ротора

а) пряма прецесія; б) зворотна прецесія

З'ясовано, що критична частота обертання залежить від багатьох чинників:

- співвідношення розмірів ротора та його форми;
- пружних властивостей матеріалів, з яких виготовлено елементи ротора;
- пружних властивостей підшипникових опор;
- внутрішнього (в матеріалі) та зовнішнього (в підшипниках) тертя;
- конструкційного демпфування.

Останні три чинники складно врахувати й вони часто носять ймовірнісний характер тому в подальшому враховуватися не будуть.

Проведений аналіз та власні дослідження [82] дозволяють стверджувати, що для вивчення динаміки роторів використовуються як аналітичні, так і чисельні методи [22,129], серед яких FEM-аналізу віддають очевидну перевагу [91,286]. Експериментальними дослідженнями в цьому напрямі теж займаються, але, внаслідок складності постановки експерименту, публікацій результатів порівняно небагато [34,304].

Вирішено для визначення критичних частот виконувати модальний аналіз матриці жорсткості конструкції за допомогою МСЕ.

Заключною й однією з найвідповідальніших операцій технологічного процесу складання ВБПМ є балансування ротора. У відповідності до сучасних вимог [45, 74] воно повинно відбуватися за умов, близьких до експлуатаційних — частота обертання ротора, осьові та радіальні навантаження на опори та ін.

Підвищена точність балансування високошвидкісних роторів зумовлена збільшенням дисбалансу ротора за тривалої експлуатації і наявністю залежності між граничною частотою обертання й незрівноваженістю ротора. Як правило, спочатку проводять поелементне статичне, а в окремих випадках і динамічне балансування деталей ротора [307]. Динамічне балансування здійснюють на зарезонансних балансувальних верстатах або у власних опорах [4,227].

Керуючись світовим досвідом та з урахуванням правила подібності, встановлено класи точності балансування G (англ. *Grade*), які визначають вимоги до якості балансування жорстких роторів машин типового застосування. Ці класи побудовано на основі значень добутку допустимого залишкового питомого дисбалансу, $[г \cdot мм/кг]$ на частоту обертання $[с^{-1}]$ й виражено у $[мм/с]$. Так, наприклад, клас точності $G2,5$ застосовують для компресорів, двигунів та генераторів з висотою осі обертання, що перевищує 80 мм та частотою обертання, що більша за 950 об/хв, газових та парових турбін, приводів металообробних верстатів; клас $G1,0$ — для приводів шліфувальних верстатів; а найточніший клас $G0,4$ — для шпінделів та приводів високоточного обладнання й гіроскопів.

1.4. Способи охолодження та оцінка теплового стану

Очевидним є твердження про те, що збільшення частоти обертання призводить до зменшення маси активних матеріалів, розмірів машини та підвищення її питомих техніко-економічних показників. З іншого боку, це спричиняє зростання втрат в одиниці об'єму та зменшення відносної поверхні охолодження машини. Отже, «цінність» адекватної оцінки теплового стану ВБПМ, порівняно з іншими видами аналізу підвищується, а її результат може вважатися одним з показників якості виконання проекту [147,308].

Про актуальність наукових досліджень даного напрямку свідчить захист 4 дисертаційних робіт, присвячених аналізу теплового стану високошвидкісних машин і машин зі збудженням від ПМ, лише протягом останніх 6 років [173,198,240,269].

Серед усіх можливих способів охолодження високошвидкісних ЕМ відразу хочемо відокремити машини з природним охолодженням, або, як їх називають термоінерційні машини. Можна стверджувати, що цей спосіб охолодження не може вважатися прийнятним для машин з порівняно високим тепловим навантаженням.

Системи з примусовим повітряним охолодженням поділяють на прямі (безпосередні) та непрямі [23,97].

За прямого охолодження повітря проходить через машину й відбиратиме тепло від її тепловиділяючих елементів безпосередньо. За обдування зовнішньої поверхні машини теплопередача відбувається від активних частин до її корпусу. Таку систему називають непрямою.

Частковим випадком примусового повітряного охолодження, непрямого або безпосереднього, може вважатися самовентиляція — рух повітря в машині здійснюється за рахунок вентилятора насадженого на вал. Але розробка конструкції ефективних вентиляторів, що працюють в діапазоні частот обертання до 200 тис. об/хв, представляє собою тему окремого дослідження. Тому вважатимемо, що таке охолодження здійснюється за рахунок подачі повітря від зовнішнього джерела.

Принципові обмеження примусового повітряного охолодження вимагають

застосування автономних систем, у яких застосовується рідкий холодоагент, наприклад, всілякі антифризи, вода, олива та ін.

Конвекційні системи рідинного охолодження [97] поділяють на три типи:

- каналне охолодження — тепловіддача здійснюється через активні та конструкційні елементи до рідкого холодоагенту, що проходить у каналах, виконаних у конструкційних елементах;
- безпосереднє омивання проточним холодоагентом конструкційних елементів, що замкнені у герметизовані порожнини;
- безпосереднє струменеве охолодження — теплообмін здійснюється з холодоагентом, який струменями подається на поверхні тепловиділяючих елементів.

Найбільш універсальним та надійним типом конвекційних систем охолодження визнано каналне охолодження. Саме його рекомендують застосовувати в машинах з нерухомими обмотками [269,302].

В авіакосмічній електромеханіці знайшла застосування випарна система охолодження — на тепловиділяючих поверхнях відбувається теплообмін з киплячим шаром холодоагенту. Температура поверхні, що охолоджується в такий спосіб, стабілізується на рівні температури кипіння холодоагенту. Складність практичної реалізації таких систем та порівняно низький ресурс істотно обмежують їх застосування.

Типовим рішенням задачі оцінки теплового стану ЕМ вважається застосування теплових заступних схем (ТЗС), деколи доволі складних та розгалужених [173,239,269,295], що називаються «*thermal network*». Ці заступні схеми мнемонічно допомагають записати лінійну САР, розв'язком якої є перевищення температури в активних елементах машини. Вона, по суті, представляє собою одновимірний розв'язок рівняння теплопровідності. Зосереджені параметри цих ТЗС розраховуються на підставі класичної теорії теплопередачі [71,95], однак він супроводжується низкою проблем, одна з яких — визначення інтегральних коефіцієнтів теплопровідності багатокомпонентних матеріалів [240, 308].

ТЗС з успіхом застосовуються з метою первинної оцінки теплового стану високошвидкісних машин [134,169,272]. Аналітичне чи емпіричне дослідження температури ЕМ, як правило супроводжується порівнянням та перевіркою з результатами FEM-аналізу [61,173,224,237,259]. Тому можна стверджувати, що найкращим інструментом для розробки та обґрунтування структури ТЗС тої чи іншої системи охолодження є спеціалізовані математичні моделі, призначені для розв'язання рівняння теплопровідності у дво- чи тривимірній постановці.

Нагадаємо, що розробка такої структури ТЗС, яка відповідатиме пропонованим системам охолодження, найбільш повно враховуватиме основні шляхи теплопередачі, а з іншого боку, міститиме мінімальну кількість елементів (теплових опорів), є одним із завдань нашого дослідження.

Комплексне дослідження взаємного впливу теплових та механічних навантажень проводилося в роботах [35,295]. Цікаві статистичні дані стосовно існуючих реалізацій ВБЕМ наведено у [238,240] (рис. 1.10, а). Автор дисертації [295] вирахував лінії граничної потужності високошвидкісних асинхронних машин, обравши за критерій лінійну швидкість на поверхні ротора (рис. 1.10, б).

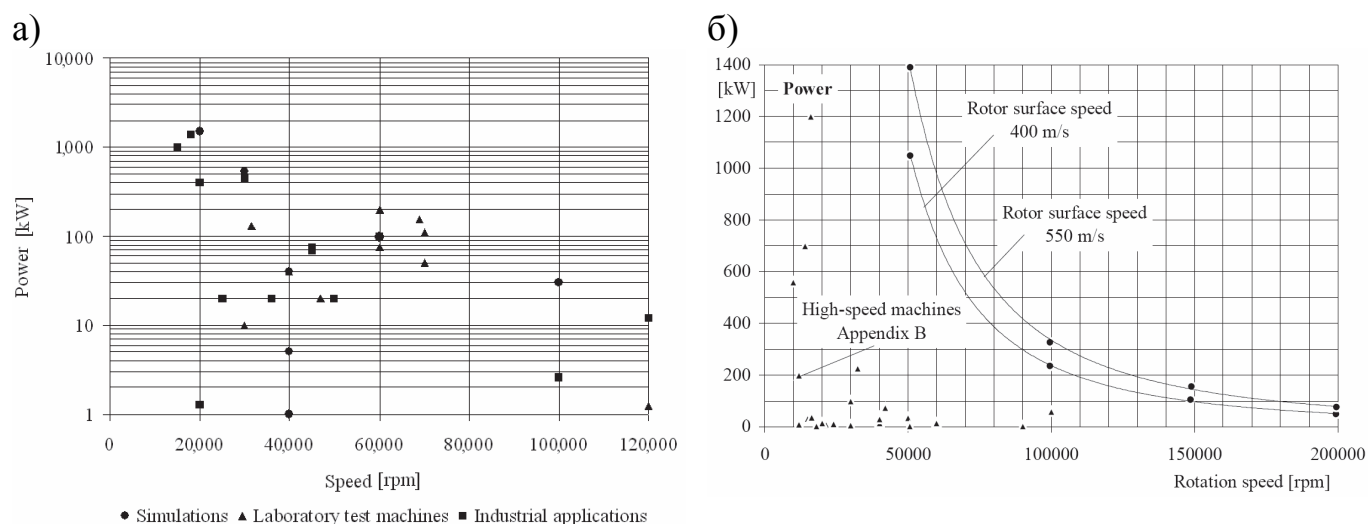


Рис. 1.10. Простір існування високошвидкісних машин:

- а) промислові та лабораторні реалізації ВБЕМ, запозичене з [240];
 б) лінії граничної потужності високошвидкісних асинхронних машин, [295]

Системи рідинного охолодження з успіхом застосовуються авторами [259,

302], а у [269], додатково, звертають увагу на факт покращення охолодження за умови просочення лобових частин спеціальним теплопровідним компаундом.

Супутня задача теплового аналізу, яка кардинально впливає на відповідність результатів аналітичних або чисельних методів розрахунку температур експериментальним значенням, — окреслення крайової умови. Для переважної більшості практичних застосувань вона представляє собою умову Коші й залежить від коефіцієнтів тепловіддачі.

Величину коефіцієнта тепловіддачі можна визначити на підставі теоретичного розгляду процесу конвекційного теплообміну [17,67]. Однак це можливо лише для найпростіших випадків та за умови введення спрощуючих допущень. В інженерній практиці коефіцієнти тепловіддачі реальних систем визначаються за емпіричними формулами, що отримані на підставі обробки експериментальних даних та за допомогою математичного апарату теорії подібності.

Теорія подібності, як вчення про подібність фізичних явищ, цілком успішно застосовується для аналізу процесів, пов'язаних з тепломасообміном. Згідно неї фізичні явища вважаються подібними за умови [95]:

- застосування до якісно однакових явищ, що аналітично описуються однаковими рівняннями;
- подібні явища повинні проходити в геометрично подібних системах;
- співставлення лише однорідних величин, що мають однаковий фізичний зміст й розмірність та відбуваються у подібних точках простору та у подібні моменти часу;
- подібність двох явищ означає подібність всіх величин, що характеризують це явище.

Теорія подібності оперує рядом так званих чисел подібності (інваріантів) — безрозмірних співвідношень (комплексів) складених з величин, що характеризують дане явище. Числа подібності зберігають свої значення для всіх, подібних між собою явищ. Отже, теорія подібності дає змогу, не розв'язуючи диференціальних рівнянь, на підставі обробки експериментальних даних отримати рівняння

подібності, які справедливі для всіх подібних між собою процесів, зокрема для процесів тепломасообміну.

У нашому дослідженні використовуються наступні числа подібності:

- число Рейнольдса, що характеризує гідромеханічну подібність течій, є безрозмірним відношенням сил інерції до сил в'язкості; його величина визначає перехід від ламінарної течії до турбулентної

$$\text{Re} = \frac{V_m \cdot L}{\nu_m}, \quad (1.5)$$

де V_m – характерна, зазвичай, середня швидкість руху рідини або газу в початковому перерізі системи, м/с;

L – характерний геометричний розмір системи (довжина, діаметр тощо), м;

ν_m – кінематичний коефіцієнт в'язкості рідини або газу, м²/с;

- число Прандтля – окреслює теплофізичні властивості рідини або газу

$$\text{Pr} = \frac{\eta_m \cdot c_p}{\lambda}, \quad (1.6)$$

де η_m – коефіцієнт динамічної в'язкості рідини або газу, Па · с;

c_p – питома теплоємність речовини, Дж/кг · К;

λ – коефіцієнт теплопровідності, Вт/м · К;

- число Нуссельта – безрозмірний коефіцієнт тепловіддачі, що характеризує ефективність процесу конвекційного теплообміну

$$\text{Nu} = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda}, \quad (1.7)$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі, Вт/м² · К;

- число Грасгофа, що характеризує підйомну силу, яка викликає вільний конвекційний рух рідини або газу; виникає за рахунок різниці густин шарів речовини з різними температурами

$$\text{Gr} = g\beta \frac{L^3}{\nu^2} \Delta T, \quad (1.8)$$

де g – прискорення вільного падіння, м/с^2 ;

β – температурний коефіцієнт об'ємного розширення середовища, K^{-1} ;

ΔT – температурний напір, K .

Використовуючи теорію подібності, автор [295] дає рекомендації щодо способу розрахунку коефіцієнтів тепловіддачі в каналі з рухомою стінкою — повітряному проміжку ЕМ.

Незважаючи на те, що апарат теорії подібності застосовується вже понад 130 років, опис процесу тепломасопереносу, який є процесом розподілим в просторі, за допомогою локальних усереднених коефіцієнтів тепловіддачі, вносить найбільшу похибку в теплові розрахунки. Дослідження в цих напрямках традиційно належали до галузі гідрогазодинаміки [126,132,151]. Однак розвиток обчислювальної гідрогазодинаміки CFD (англ. *Computational Fluid Dynamics*) надає можливість й електромеханікам долучитися до них. Так, розподіл коефіцієнта тепловіддачі на поверхнях статора та ротора отримано у [239]. Використовуючи CFD методи, знайдено розподіли значень локальних коефіцієнтів тепловіддачі вздовж повітряного проміжку, лобових частин, радіуса опорного газового підшипника [193,198,240,302, 303]. Ці та інші результати дали змогу верифікувати класичні методи розрахунку коефіцієнтів тепловіддачі, використані нами.

1.5. Проблеми створення ВБПМ та ймовірні шляхи їх розв'язання

Опрацювання літературних джерел, присвячених безконтактним ЕМ зі збудженням від ПМ й високошвидкісним ЕМ та власний досвід створення ВБПМ виявив наступні проблеми:

1. Відсутній єдиний комплексний методичний підхід до створення ВБПМ, що враховує основні особливості електромеханічного перетворення енергії в таких машинах. Розробки ВБПМ проводяться, як правило, за технічними вимогами окремих споживачів, що не узгоджені між собою. Супутні питання — механічна міцність та жорсткість конструкції, оцінка теплового стану та ін., не пов'язують безпосередньо з електромагнітними процесами у ВБПМ.

2. ВБПМ притаманні принципові відмінності у перерозподілі втрат енергії, у порівнянні з БПМ, розрахованою на роботу з частотою обертання до 3000 об/хв, а загальноприйняті методи їх розрахунку не забезпечують необхідну точність їх визначення. Додаткові втрати в обмотці статора ВБПМ, як правило, перевищують основні. Аналітичні методи розрахунку додаткових втрат (поверхневих та пульсаційних) у полюсній системі ВБПМ, ґрунтуються на порівняно грубих допущеннях або не відображають фізичної природи явища й, по суті, є емпіричними.

3. Практично всі методи, що передбачають розрахунок втрат на тертя в підшипниках ковзання по своїй суті є графоаналітичними й не призначені для безпосереднього використання обчислювальної техніки та автоматизації даного виду розрахунків. Відсутні однозначні рекомендації щодо вибору типу підшипникових опор залежно від частоти обертання.

4. Існуючі колові математичні моделі динамічних електромеханічних процесів у ВБПМ, як правило побудовані з використанням перетворення координат та не враховують вплив системи керування. FEM-аналіз цих машин часто зводиться до розв'язання задачі магнітостатики.

5. Аналітичні підходи для оцінювання міцності та жорсткості тіл обертання навантажених відцентровими силами не можуть застосовуватися для роторів ВБПМ, яким притаманна нерівномірність розподілу маси, різна жорсткість відносно головних осей та інші конструкційні особливості.

6. Відсутня інформація про структуру теплових заступних схем машин з конвекційними системами примусового повітряного та рідинного охолодження, які найбільш придатні для охолодження ВБПМ.

7. Застосування еквівалентних коефіцієнтів теплопровідності багатокомпонентних структур здатно істотно зменшити розмірність задачі розрахунку поля температури, однак існуючі методики їх визначення, здебільшого побудовані на статистичній обробці експериментальних даних.

Отже, аналіз існуючої ситуації показує, що незважаючи на зацікавленість промислово-виробничих комплексів у випуску науково-місткого та високотехнологічного обладнання, яке в своєму складі містить ВБПМ, до цього часу не створено

методів комплексної проробки проектних рішень таких машин. Недостатньо глибоко опрацьовано теоретичні положення та інженерні методи визначення їх показників, відсутні надійні засоби інформаційно-обчислювальної підтримки процесу створення ВБПМ, що зможуть гарантувати відповідність проекту вимогам технічного завдання (ТЗ).

У зв'язку з цим та з огляду на поставлену в дисертаційній роботі мету дослідження, необхідно розробити проектно-конструкторський комплекс (ПКК), що поєднуватиме теоретичну базу, практичні рекомендації та прикладне програмне забезпечення, призначенне для створення ВБПМ. Такий ПКК повинен містити (рис. 1.11):

- систему аналізу проектних рішень;
- систему аналізу конструкторських рішень;
- систему FEM-аналізу.

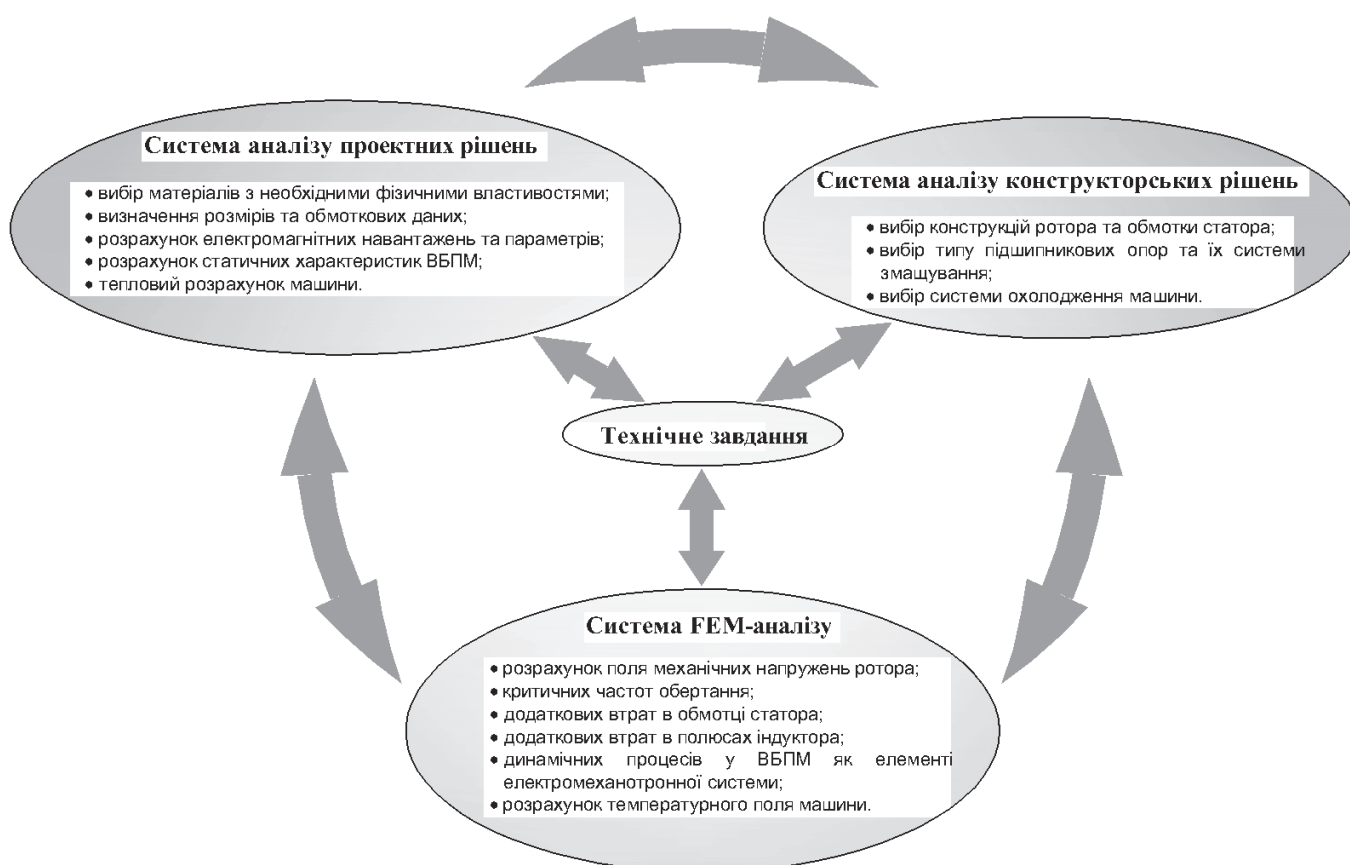


Рис. 1.11. Структура проектно-конструкторського комплексу створення ВБПМ

Система аналізу проектних рішень повинна передбачати можливість вибору

матеріалів з необхідними фізичними властивостями, визначення розмірів та обмоткових даних. Ця система також повинна забезпечувати розрахунок статичних характеристик ВБПМ та попереднє оцінювання її теплового стану.

Система аналізу конструкторських рішень повинна містити рекомендації стосовно вибору конструкцій ротора та обмотки статора, типу підшипникових опор й способів їх змащування і охолодження. Разом з системою аналізу проектних рішень вона забезпечуватиме підготовку вхідної інформації для високоадекватних математичних моделей, що об'єднані в систему FEM-аналізу.

Система FEM-аналізу повинна містити математичні моделі, складені на підставі рівнянь, що описують фізичні поля різної природи, й призначені для розрахунку динамічних електромеханічних процесів у ВБПМ як елементі електромеханотронної системи, додаткових втрат в статорі та роторі, НДС ротора та його критичних частот обертання, температурного поля ВБПМ, відповідно до обраного способу охолодження.

Такий ПКК, на нашу думку, вирішуватиме всі основні проблемні питання у створенні ВБПМ та гарантуватиме відповідність проекту вимогам технічного завдання без потреби експериментального підтвердження.

Висновки до розділу

1. Розрахунок статичної зовнішньої характеристики високошвидкісного безконтактного генератора зі збудженням від ПМ, з метою коректного врахування насичення магнітопроводу, здійснюватимемо на підставі концепції диференційних параметрів та теорії двох реакцій.

2. Для розрахунку механічної характеристики високошвидкісного безконтактного двигуна зі збудженням від ПМ застосовуватимемо аналітичні розв'язки диференційних рівнянь стану BLDCM, що дасть змогу врахувати вплив способу керування.

3. Найбільш прийнятним способом керування високошвидкісним безконтактним двигуном зі збудженням від ПМ, зважаючи на техніко-економічну

доцільність, є дискретна 6-тактова комутаційна схема зі зворотним зв'язком за положенням ротора, що відповідає режимові BLDCM.

4. Ротори із поверхневим розташуванням ПМ, як такі, що забезпечують максимальне питоме значення електромагнітного моменту, обираємо як одну з пріоритетних конструкцій обертової частини ВБПМ.

5. Розрахунок додаткових втрат в обмотці статора виконуватимемо на підставі чисельного розв'язання рівнянь електродинаміки в квазістаціонарному наближенні з використанням МСЕ та з урахуванням дійсної форми паза, насичення магнітопровода та наявності поля збудження — основних чинників, що впливають на процес витіснення струму в пазу.

6. Нормовані значення питомих втрат в осерді статора потребують уточнення стосовно довільних значень частоти перемагнічування, магнітної індукції та товщини листа осердя.

7. Допустимі значення механічних напружень в роторах різних конструкцій визначатимемо на підставі табличного методу (за рекомендаціями), а концентрацію напружень враховуватимемо за допомогою нормованих коефіцієнтів концентрації.

8. Для визначення НДС роторів обираємо чисельний розрахунок стаціонарного поля механічних напружень з використанням МСЕ, а для обчислення значень критичних частот — модальний аналіз, теж на основі МСЕ.

9. Обґрунтування структури ТЗС та перевірку методики визначення її параметрів здійснюватимемо, спираючись на результати розрахунку стаціонарного поля температури у тривимірному формулюванні.

10. Формулювання крайової умови в задачах теплопередачі здійснюватимемо на основі теорії подібності та чисел подібності.

РОЗДІЛ 2.

АНАЛІЗ ОСОБЛИВОСТЕЙ ТА ФОРМУЛЮВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ, МЕХАНІЧНИХ ТА ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

МСЕ в цій роботі відіграє роль одного з основних інструментів наукового дослідження. Теорія методу відома давно й добре розвинена, але досвід його практичного використання в задачах електромеханіки виявив низку невирішених проблем.

У підходах до розв'язання будь-яких технічних задач відповідного рівня складності завжди можна виділити два напрями: математичний (теоретичний) та інженерний (практичний). Якщо цю тезу поширити на задачі, які передбачають розв'язання МСЕ і які розглядаються в цій дисертації, тоді можна говорити, що теоретики займаються: обґрунтуванням методу, підкреслюючи його математичну природу та називаючи його варіаційно-різницеvim; аналізом збіжності та стійкості; оцінюванням похибок дискретизації та заокруглення [130,137]. Здається, що вони забувають при цьому основне призначення МСЕ — розв'язання фізичних задач.

Представники другого напрямку, розв'язуючи порівняно складні задачі, часто нехтують строгим обґрунтуванням своїх прийомів та методик, а повністю покладаються на системи виявлення помилок, інтегровані в спеціалізоване програмне забезпечення, деколи штучно обмежуючи себе його функціональними можливостями.

Власний досвід застосування так званих «важких» пакетів FEM-аналізу до розв'язання задач електромеханіки виявив специфіку та потребу в глибокому розумінні теорії МСЕ на рівні постановок задач та алгоритмів їх розв'язування. Лише за цієї умови з'являється можливість формулювати нетипові задачі з предметної галузі, а найголовніше — гарантувати «фізичність» отриманих результатів ще на етапах створення відповідних імітаційних моделей.

Питанням постановки прикладних задач та їх алгоритмізації стосовно теорій електромагнетизму, пружності, теплопередачі присвячено цей розділ.

2.1. Теоретичні засади методу

Різноманітність підходів у формулюваннях МСЕ — варіаційний, на основі методу нев'язок, прямий та ін. [98,130,131], — спонукає до пошуку однозначних стратегій. У цьому питанні ми спираємося на рекомендації провідного розробника спеціалізованого програмного забезпечення [174]. Незважаючи на низку модифікацій, сутність МСЕ може бути описана наступною послідовністю дій:

- область розрахунку розділяється на підобласті — скінченні елементи (СЕ);
- залежні змінні (ступені свободи) задачі наближаються інтерполюючою функцією для кожного СЕ, отже, значення залежних змінних у вузлових точках СЕ стають невідомими задачі;
- підстановка інтерпольованих значень невідомих у визначальне рівняння або у еквівалентне до нього породжує систему рівнянь з невідомими ступенями свободи;
- розв'язання даної системи рівнянь, що дає змогу знайти наближений розв'язок задачі.

Варіаційний або енергетичний підхід утворює цілий потужний напрямок серед методів побудови співвідношень для МСЕ. За розгляду деяких фізичних полів помічено, що варіація залежної змінної ξ яка забезпечує інтегралу

$$P = \int_V f(V, \xi, \xi') dV \quad (2.1)$$

стаціонарне значення, являє собою розв'язок певного визначального рівняння для даного виду поля.

В (2.1) позначено: f – деяка функція, яка, як правило, характеризує енергію або густину енергії в області розрахунку поля; P – функціонал, як проекція функції f на певний скалярний простір; $\xi' = \frac{d\xi}{dV}$ – похідні залежної змінної за просторовими координатами.

Стаціонарні значення можуть бути мінімумом, максимумом або точкою перегину. Ці випадки схематично показано на рис. 2.1. Отже, функція f повинна

бути принаймні двічі диференційованою.

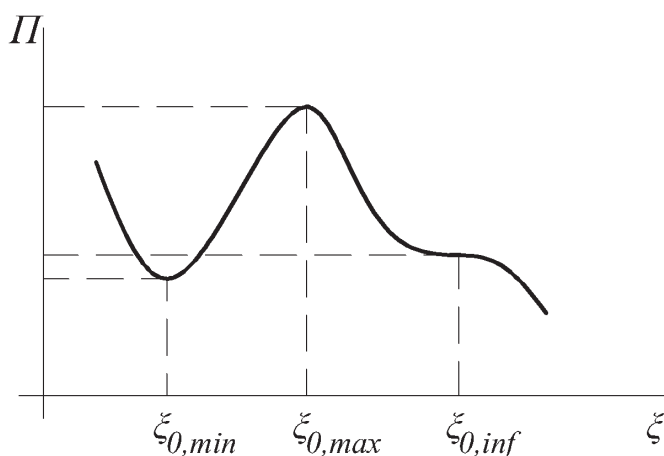


Рис. 2.1. Типи стаціонарних точок

Варіаційний підхід у МСЕ дозволяє знайти такі значення ξ , за яких

$$\frac{d\Pi(\xi_0)}{d\xi} = 0. \quad (2.2)$$

У даній роботі варіаційний підхід у формулюванні МСЕ використано для розв'язання задач теорії пружності.

Альтернативним підходом є різновид на основі методу Галеркіна як частковий випадок більш загального — методу зважених нев'язок [137].

Функціональна поведінка залежної змінної, за будь-якого формулювання, наближається за допомогою спеціальних функцій форми, що отримуються на підставі інтерполяції степеневими многочленами різних порядків. Таке наближення неодмінно призводить до виникнення похибки — нев'язки. В даному підході знаходять таке поле залежної змінної, що нормоване середнє значення цієї нев'язки, в межах кожного СЕ, прямує до нуля. Якщо вагові функції, які використовуються для нормування нев'язки, є вищезгаданими функціями форми СЕ, то такий підхід називають методом Галеркіна, в інших випадках — методом зважених нев'язок.

Для задач теорій теплопровідності та електромагнетизму нами застосовано метод Галеркіна.

Детально застосування варіаційного підходу розглядається у п. 2.3, а підходу на основі методу Галеркіна у пп. 2.2, 2.4.

2.1.1. Функції форми

Як вже згадувалося вище, залежна змінна задачі у МСЕ наближається спеціальними інтерполяційними функціями. Серед широкого набору існуючих поліноміальних рядів лише деякі здатні задовольнити всі вимоги, що накладаються варіаційною постановкою задачі.

Тут, на підставі аналізу спеціалізованої літератури [33,98,130] висловлені рекомендації щодо класу залежностей, придатних для функцій форми. Акцентується увага на перевагах використання локальних координатних систем, що долають проблему не інваріантності неповних степеневих многочленів у глобальному базисі. Обрано спосіб математичної нотації, який, на нашу думку, доволі вдало формалізує операції знаходження просторових інтегралів і похідних та може використовуватися безпосередньо в алгоритмах програмних реалізацій даних операцій.

Шукані функції повинні бути диференційованими стільки разів, скільки похідних у функціоналі варіаційної задачі. Наявність похідних n -го порядку вимагає присутності членів, як мінімум, n -го степеня. В такий спосіб буде задовольнятися вимога міжелементної неперервності нормальних і тангенціальних проекцій залежної змінної на переходах через границі між елементами.

Інша вимога випливає з фізичних особливостей задач теорії пружності та є наслідком принципу мінімуму потенціальної енергії, який застосовується для знаходження функціоналу — інтегрування співвідношень, що пов'язують сили та зміщення (залежні змінні), повинно давати нульову енергію деформації, за умови руху тіла, яке вважається абсолютно твердим. Тобто, якщо рухоме тіло абсолютно тверде, його пружні деформації відсутні.

Ще одна вимога — функція повинна дозволяти наближати поле сталих деформацій.

У МСЕ на основі методу Галеркіна, для забезпечення міжелементної неперервності шуканого поля залежної змінної, порядок цього степеневого многочлена може бути на одиницю нижчий за найвищий порядок похідних у визначальному рівнянні задачі. Ця вимога є слабшою, у порівнянні з варіаційним

підходом, завдяки застосуванню теореми Остроградського-Гауса в процесі мінімізації нев'язки (див. п. 2.4.2).

Як вже згадувалося, звернемо увагу на особливості використання координатних систем у МСЕ. Формулювання крайової задачі звичайно здійснюється у так званій глобальній системі координат (СК). Вона є зручною для визначення положення кожного вузла SE, його орієнтації в площині чи просторі, формалізації крайової умови та вимушуючих сил. Однак інтерполюючі функції, записані в глобальній системі координат й побудовані на підставі неповних степеневих многочленів, не інваріантні в цій СК [153] та незручні для обчислення значень інтегралів, необхідних для побудови елементної матриці. Тому використано локальну СК, початок якої розташовано в межах SE.

Локальна СК, що визначає положення точки всередині SE за допомогою безрозмірного параметра, абсолютна величина якого не перевищує одиницю, в літературі отримала назву природної (англ. *Natural*) СК [130,264]. Природні координати — безрозмірні. Вони «прив'язані» до SE, а не до глобальної СК, але є функціями глобальних координат, у яких окреслено положення конкретного SE. Основною метою використання системи природних координат є визначення положення точки, що розташована в середині SE в координатній системі, пов'язаній з вузлами цього елемента. Також природна СК відіграє важливу роль за використання SE з викривленими границями (ізопараметричні SE) [130].

Двовимірні функції форми

Для двовимірних задач електромагнетизму використано 4-вузловий елемент, що, згідно загальноприйнятої класифікації [174], отримав назву PLANE13. У задачах магнітостатики використовується його єдиний ступінь свободи — значення z -проекції векторного магнітного потенціалу. Цей елемент побудований на підставі інтерполяційного полінома Лагранжа. Шукана скалярна функція A_z в середині цього SE представляє собою неповний степеневий многочлен, що містить 4 доданки

$$A_z = c_0 + c_1s + c_2t + c_3st, \quad (2.3)$$

або у векторному представленні

$$A_z = \vec{L}[s, t]\vec{c}, \quad (2.4)$$

де $\vec{L}[s, t] = \begin{bmatrix} 1 & s & t & st \end{bmatrix}$ – рядок базисних функцій у природній СК;

$\vec{c} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}_*$ – стовпець коефіцієнтів.

Повторимося, що базис s, t орієнтований по відношенню до СЕ та нормований так, що координати довільної точки, яка належить СЕ, можуть змінюватися лише в діапазоні значень від -1 до +1. Відомі координати вузлів СЕ i, j, k, l (див. рис. 2.2) дозволяють розрахувати стовпець коефіцієнтів полінома. Для цього запишемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 s_i + c_2 t_i + c_3 s_i t_i &= A_{zi}; \\ c_0 + c_1 s_j + c_2 t_j + c_3 s_j t_j &= A_{zj}; \\ c_0 + c_1 s_k + c_2 t_k + c_3 s_k t_k &= A_{zk}; \\ c_0 + c_1 s_l + c_2 t_l + c_3 s_l t_l &= A_{zl}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

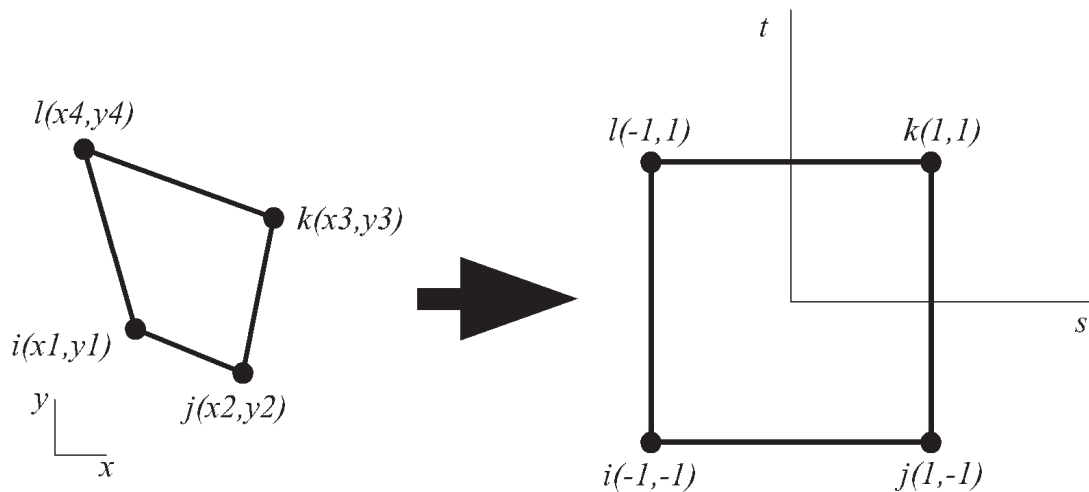


Рис. 2.2. Координати вузлів двовимірного СЕ у глобальній та природній СК

або у векторній формі

$$\mathbf{L}\vec{c} = \vec{A}_z, \quad (2.6)$$

де $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & s_i & t_i & s_i t_i \\ 1 & s_j & t_j & s_j t_j \\ 1 & s_k & t_k & s_k t_k \\ 1 & s_l & t_l & s_l t_l \end{bmatrix}$ – матриця вузлових значень базисних функцій;

$\vec{A}_z = \begin{bmatrix} A_{zi} & A_{zj} & A_{zk} & A_{zl} \end{bmatrix}_*$ – стовпець вузлових значень функцій.

Розв'язавши (2.6)

$$\vec{c} = \mathbf{L}^{-1} \vec{A}_z \quad (2.7)$$

та підставивши (2.7) у (2.4), отримуємо вираз інтерполянти функції A_z :

$$A_z = \vec{L}[s,t] \mathbf{L}^{-1} \vec{A}_z = \vec{N}[s,t] \vec{A}_z, \quad (2.8)$$

де $\vec{N}[s,t] = \|N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4\|$ – рядок, значення елементів якого залежать лише від положення вузлів, у яких окреслено \vec{A}_z .

Якщо функцією A_z , в межах одного СЕ, наближається деяка потенціальна функція, то рядок \vec{N} називається функцією форми СЕ.

Використання локальної СК дає змогу виконати аналітичне обернення матриці \mathbf{L}

$$\mathbf{L} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{L}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

та у відповідності до (2.8) визначити елементи рядка для функції форми

$$\vec{N} = \|N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4\| = \frac{1}{4} \|(1-s)(1-t) \quad (1+s)(1-t) \quad (1+s)(1+t) \quad (1-s)(1+t)\|. \quad (2.9)$$

Процедури МСЕ потребують виконання інтегрування за площею елемента функції форми. Також обов'язковим є знаходження просторових частинних похідних. Ці операції спрощуються, якщо інтерполяційні співвідношення записані у СК, зв'язаній з елементом, тобто у природній СК.

Пам'ятаючи, що функція форми визначається як

$$\vec{N} = \vec{L}[s,t] \mathbf{L}^{-1}, \quad (2.10)$$

можна довести [153], що частинні похідні по s, t дорівнюють

$$\vec{N}^{<s>} = \frac{\partial \vec{N}}{\partial s} = \vec{L}[s,t] \mathbf{D}_s \mathbf{L}^{-1}; \quad \vec{N}^{<t>} = \frac{\partial \vec{N}}{\partial t} = \vec{L}[s,t] \mathbf{D}_t \mathbf{L}^{-1}, \quad (2.11)$$

$$\text{де } \mathbf{D}_s = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ і } \mathbf{D}_t = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ – матриці диференціювання рядка базисних}$$

функцій за змінними s та t , відповідно.

Похідні i -ої компоненти функції форми N_i ($i = \overline{1, 4}$) (2.9) за своїм аргументом у площині (s, t) пов'язані з відповідним вектором у площині (x, y) матрицею Якобі:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad (2.12)$$

або скорочено

$$\vec{N}_i^{<s,t>} = \mathbf{J} \cdot \vec{N}_i^{<x,y>}. \quad (2.13)$$

Для частинних похідних усіх компонентів функції форми справедливою буде формула

$$\mathbf{N}^{<s,t>} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{N}^{<x,y>}, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \text{де } \mathbf{N}^{<s,t>} &= \begin{vmatrix} \vec{N}_1^{<s,t>} & \dots & \vec{N}_4^{<s,t>} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{L}[s,t] \mathbf{D}_s \mathbf{L}^{-1} \\ \vec{L}[s,t] \mathbf{D}_t \mathbf{L}^{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial s} & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial s} \\ \frac{\partial N_1}{\partial t} & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial t} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -1+t & 1-t & 1+t & -1-t \\ -1+s & -1-s & 1+s & 1-s \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.15)$$

– матриця розміру (2×4) з частинними похідними функції форми у базисі (s, t) ;

$$\mathbf{N}^{<x,y>} = \begin{vmatrix} \vec{N}_1^{<x,y>} & \dots & \vec{N}_4^{<x,y>} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (2.16)$$

– матриця розміру (2×4) з частинними похідними функції форми у базисі (x, y) .

Формально похідні (2.16) визначаються як

$$\mathbf{N}^{<x,y>} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{N}^{<s,t>}. \quad (2.17)$$

Компоненти матриці Якобі визначаються через координати вузлів СЕ у базисі (x, y) . Нехай компоненти радіус-вектора довільної точки, що належить СЕ, становлять

$$x = \vec{N} \cdot \vec{x}; \quad y = \vec{N} \cdot \vec{y}, \quad (2.18)$$

де $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}; \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix}$ – вектор-стовпці вузлових значень функцій x, y ,

відповідно, які надалі називатимемо стовпцями дискрет.

Частинні похідні цих компонент x, y є компонентами матриці Якобі. Отже, для СЕ з номером $[e]$

$$\mathbf{J}^{[e]} = \mathbf{N}^{<s,t>} \mathbf{C}_m^{[e]}, \quad (2.19)$$

де

$$\mathbf{C}_m^{[e]} = \begin{pmatrix} \vec{x}^{[e]} & \vec{y}^{[e]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

– матриця з координатами вузлів СЕ у базисі (x, y) .

Частинні похідні функції A_z , в межах СЕ, можливо визначити через вузлові значення функції \vec{A}_z за виразом

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_z}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{N}^{<x,y>} \vec{A}_z \quad . \quad (2.21)$$

Аналітичне знаходження поверхневого інтегралу, в межах одного СЕ, можливе за виразом [254]

$$\int_{S^{[e]}} A_z[x, y] dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 A_z[s, t] |\mathbf{J}| ds dt, \quad (2.22)$$

де $|\mathbf{J}| = \det(\mathbf{J})$.

Для чисельного знаходження таких інтегралів використовується формула

Гауса [174]

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 A_z[s,t] ds dt = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l \vartheta_j \vartheta_i A_z(x_i, y_j), \quad (2.23)$$

де ϑ_i, ϑ_j – вагові коефіцієнти;

x_i, y_j – координати розташування точок інтегрування.

Тривимірні функції форми

Для тривимірних задач використано 8-вузловий СЕ, що, згідно [174], отримав назви: SOLID185 для задач теорії пружності зі ступенями свободи — проекціями вектора зміщень на координатні осі СК x, y, z ; SOLID70 для задач теорії теплопровідності з одним ступенем свободи — вузловим значенням температури; SOLID96 для задач теорії електромагнетизму зі ступенями свободи — просторовими проекціями вектора векторного магнітного потенціалу. Вони теж побудовані на підставі інтерполяційного полінома Лагранжа.

Шукана функція ξ в середині цього СЕ представляє собою неповний степеневий многочлен, що містить 8 доданків

$$\xi = c_0 + c_1 s + c_2 t + c_3 r + c_4 st + c_5 tr + c_6 rs + c_7 str, \quad (2.24)$$

або у векторному представленні

$$\xi = \vec{L}[s,t,r] \vec{c}, \quad (2.25)$$

де $\vec{L}[s,t,r] = \begin{bmatrix} 1 & s & t & r & st & tr & rs & str \end{bmatrix}$ – рядок базисних функцій;

$\vec{c} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \end{bmatrix}_*$ – стовпець коефіцієнтів.

Відомі координати вузлів СЕ i, j, k, l, m, n, o, p (див. рис. 2.3) роблять можливим розрахунок стовпця коефіцієнтів полінома

$$\mathbf{L} \vec{c} = \vec{\xi}, \quad (2.26)$$

де $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & s_i & t_i & r_i & s_i t_i & t_i r_i & r_i s_i & s_i t_i r_i \\ 1 & s_j & t_j & r_j & s_j t_j & t_j r_j & r_j s_j & s_j t_j r_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & s_p & t_p & r_p & s_p t_p & t_p r_p & r_p s_p & s_p t_p r_p \end{bmatrix}$ – матриця вузлових значень

базисних функцій;

$\vec{\xi} = \|\xi_i \ \xi_j \ \xi_k \ \xi_l \ \xi_m \ \xi_n \ \xi_o \ \xi_p\|_*$ – стовпець вузлових значень функції (дискрет).

Розв'язавши (2.26), отримуємо вираз інтерполянти функції ξ

$$\xi = \vec{L}[s,t,r]\mathbf{L}^{-1}\vec{\xi} = \vec{N}[s,t,r]\vec{\xi}, \quad (2.27)$$

де $\vec{N}[s,t,r] = \|N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8\|$ – функція форми SE.

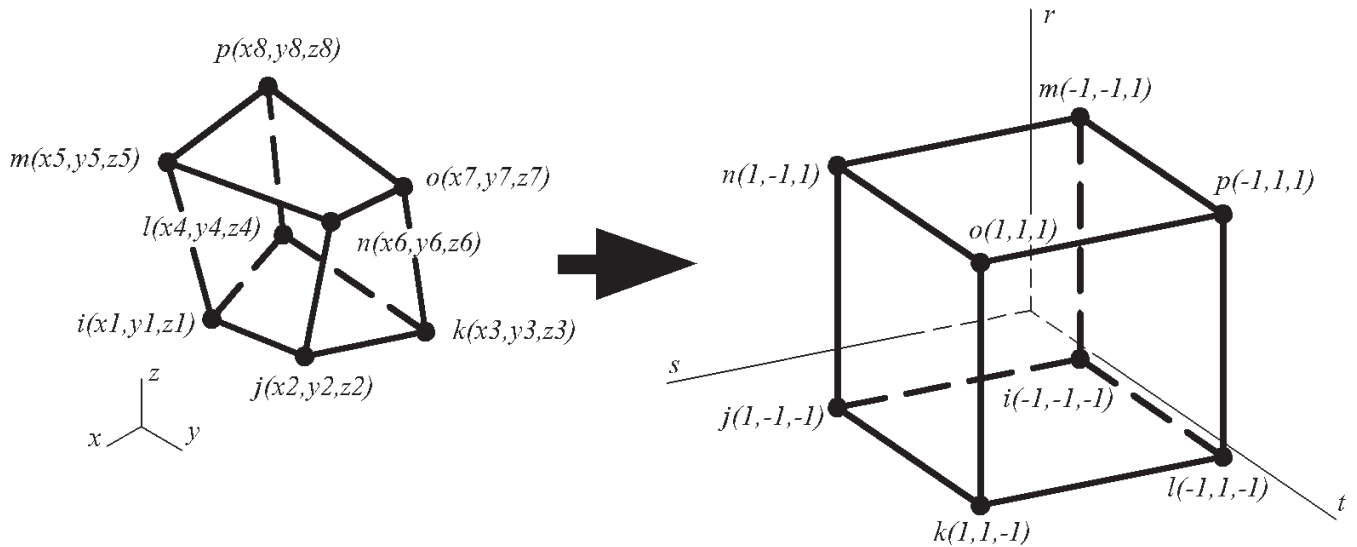


Рис. 2.3. Координати вузлів тривимірного SE у глобальній та природній СК

Аналітичне обертання матриці \mathbf{L} дає змогу визначити елементи функції форми:

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \|N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8\| = \\ &= \frac{1}{8} \|(1-s)(1-t)(1-r) \ (1+s)(1-t)(1-r) \ (1+s)(1+t)(1-r) \ (1-s)(1+t)(1-r) \cdot \\ &\quad (1-s)(1-t)(1+r) \ (1+s)(1-t)(1+r) \ (1+s)(1+t)(1+r) \ (1-s)(1+t)(1+r)\| \end{aligned} \quad (2.28)$$

За аналогією з двовимірним варіантом (2.10), (2.11), частинна похідна дорівнює

$$\vec{N}^{<s>} = \frac{\partial \vec{N}}{\partial s} = \vec{L}[s,t,r]\mathbf{D}_s\mathbf{L}^{-1}, \quad (2.29)$$

де $\mathbf{D}_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – матриця диференціювання рядка базисних

функцій за змінною s .

Похідні за іншими координатами:

$$\begin{aligned} \vec{N}^{<t>} &= \frac{\partial \vec{N}}{\partial t} = \vec{L}[s, t, r] \mathbf{D}_t \mathbf{L}^{-1}; \\ \vec{N}^{<r>} &= \frac{\partial \vec{N}}{\partial r} = \vec{L}[s, t, r] \mathbf{D}_r \mathbf{L}^{-1}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

а $\mathbf{D}_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D}_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – матриці

диференціювання за змінними t та r , відповідно.

Похідні i -ої компоненти функції форми N_i ($i = \overline{1, 8}$) (2.28) за своїм аргументом в просторі (s, t, r) становлять

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} \\ \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

або, скорочено

$$\vec{N}_i^{<s,t,r>} = \mathbf{J} \cdot \vec{N}_i^{<x,y,z>}. \quad (2.32)$$

Для частинних похідних усіх компонент справедливою буде формула

$$\mathbf{N}^{<s,t,r>} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{N}^{<x,y,z>}, \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \text{де } \mathbf{N}^{<s,t,r>} &= \left\| \vec{N}_1^{<s,t,r>} \quad \dots \quad \vec{N}_8^{<s,t,r>} \right\| = \left\| \begin{array}{l} \vec{L}[s,t,r] \mathbf{D}_s \mathbf{L}^{-1} \\ \vec{L}[s,t,r] \mathbf{D}_t \mathbf{L}^{-1} \\ \vec{L}[s,t,r] \mathbf{D}_r \mathbf{L}^{-1} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial N_1}{\partial s} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial s} \\ \frac{\partial N_1}{\partial t} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial t} \\ \frac{\partial N_1}{\partial r} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial r} \end{array} \right\| = \\ &= \frac{1}{8} \left\| \begin{array}{cccc} -1+t+r-tr & 1-t-r+tr & -1-t+r+tr & -1+t-r+tr \\ -1+s+r-rs & -1-s+r+rs & 1+s-r-rs & 1-s-r+rs \\ -1+t+s-st & -1+t-s+st & -1-t-s-st & -1-t+s+st \\ -1+t-r+tr & 1-t+r-tr & 1+t+r+tr & -1-t-r-tr \\ -1+s-r-rs & -1-s-r-rs & 1+s+r+rs & 1-s+r-rs \\ 1-t-s+st & 1-t+s-st & 1+t+s+st & 1+t-s-st \end{array} \right\| \quad (2.34) \end{aligned}$$

– матриця розміру (3x8) з частинними похідними функції форми у базисі (s, t, r) ;

$$\mathbf{N}^{<x,y,z>} = \left\| \vec{N}_1^{<x,y,z>} \quad \dots \quad \vec{N}_8^{<x,y,z>} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial z} \end{array} \right\| \quad (2.35)$$

– матриця розміру (3x8) з частинними похідними функції форми у базисі (x, y, z) .

Отже, похідні (2.35) —

$$\mathbf{N}^{<x,y,z>} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{N}^{<s,t,r>}. \quad (2.36)$$

Матриця Якобі для СЕ з номером $[e]$ визначається аналогічно до (2.19)

$$\mathbf{J}^{[e]} = \mathbf{N}^{<s,t,r>} \mathbf{C}_m^{[e]}, \quad (2.37)$$

де

$$\mathbf{C}_m^{[e]} = \left\| \begin{matrix} \vec{x}^{[e]} & \vec{y}^{[e]} & \vec{z}^{[e]} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{matrix} \right\| \quad (2.38)$$

– матриця з координатами вузлів СЕ у базисі (x, y, z) .

За потреби, перехід до координат глобальної СК (x, y, z) здійснюється за допомогою спеціальної матриці $\mathbf{N}[s, t, r]$, яка формується на підставі (2.28). Координати довільної точки всередині СЕ у локальній СК (s, t, r) перераховуються в координати в СК (x, y, z) за виразом

$$\left\| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ \vdots \\ y_8 \\ y_8 \\ y_8 \end{matrix} \right\| = \mathbf{N}[s, t, r] \vec{\xi} \quad (2.39)$$

Частинні похідні функції ξ —

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} \end{matrix} \right\| = \mathbf{N}^{<x, y, z>} \vec{\xi} \quad (2.40)$$

Аналітичне знаходження об'ємного інтегралу, в межах одного СЕ, можливе за виразом [254]

$$\int_{V^{[e]}} \xi[x, y, z] dx dy dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \xi[s, t, r] |\mathbf{J}| ds dt dr, \quad (2.41)$$

де $|\mathbf{J}| = \det(\mathbf{J})$.

Для чисельного знаходження таких інтегралів використовується формула Гауса [174]

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \xi(s, t, r) ds dt dr = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l \vartheta_k \vartheta_j \vartheta_i \xi(x_i, y_j, z_k), \quad (2.42)$$

де $\vartheta_k, \vartheta_j, \vartheta_i$ – вагові коефіцієнти;

x_i, y_j, z_k – координати розташування точок інтегрування.

2.1.2. Умови однозначності та крайові умови

Окреслення крайових умов, за формулювання крайових задач для нових нетипових об'єктів, це та частина творчого процесу наукового дослідження, яка, на нашу думку, містить найвищу ймовірність прийняття помилкових рішень. Крім цього, така формальна прив'язка задачі до фізичного об'єкту завжди викликає труднощі та характеризується низкою особливостей, що виходять за межі чіткого термінологічного поняття — «крайова умова». Повний, математично формальний опис цих особливостей, який однозначно ідентифікує процес, повинен містити наступні умови:

- геометричні, що характеризують форму та розміри об'єкта дослідження;
- фізичні, що задають фізичні властивості матеріалів, середовищ та тіл;
- часові, які окреслюють ознаки протікання процесу в часі;
- крайові умови, що розкривають особливості протікання процесу на границі розрахункової області.

Такий перелік автор [95] називає умовами однозначності, що, на наш погляд, термінологічно вдало відображає сутність цих умов.

Нагадаємо собі класичні види крайових умов та дамо коротку характеристику особливостей їх застосування у формулюваннях крайових задач, що матимуть відношення до процесу створення ВБПМ.

У типових задачах математичної фізики найчастіше використовуються крайові умови Діріхле, Неймана і Коші, які ще називають крайовими умовами першого, другого та третього роду відповідно.

Крайова умова Діріхле на границі області розрахунку L задає значення залежної змінної ξ . Наприклад,

$$\xi = f(x, y, z) \text{ на } L. \quad (2.43)$$

Це можуть бути фіксовані значення проекцій зміщення або зовнішніх сил, заданий розподіл температури або векторного магнітного потенціалу. Також умову Діріхле використовуватимемо для вказання осей (площин) симетрії за розгляду магнітних полів. Для нестационарних полів залежна змінна на границі області може задаватися як функція координат та часу.

Крайова умова Неймана на границі L задає нормальну похідну залежної змінної

$$\frac{\partial \xi}{\partial \bar{n}} + \zeta = 0 \text{ на } L, \quad (2.44)$$

де \bar{n} – нормаль до L ;

ζ – довільна функція точки.

Таку умову використовуватимемо для абсолютно теплоізованих поверхонь, — так званих адіабатичних стінок, площин симетрії у задачах теплопередачі або умов паралельності (перпендикулярності) магнітного потоку.

Якщо залежна змінна та її похідна на границі області пов'язані між собою рівнянням виду

$$\frac{\partial \xi}{\partial \bar{n}} + \zeta + \eta \xi = 0 \text{ на } L, \quad (2.45)$$

де ζ, η – відомі функції точки, то кажуть, що задана крайова умова Коші.

Типовим прикладом потреби в (2.45) є необхідність спряження границі нерухомого середовища, наприклад твердого тіла, з плинним середовищем, наприклад з рідиною або газом у задачах теплопередачі.

Якщо границя розбита на кілька ділянок з крайовими умовами різних типів, то такі умови називають змішаними. На практиці зустрічаються більш складні, так звані неklasичні крайові умови, що містять похідні вищих порядків.

2.2. Прикладні задачі теорії електромагнетизму

Загальновідомо, що система рівнянь Максвела разом з матеріальним рівнянням є замкненою і застосовується для формулювання повного спектру задач електромагнетизму. Однак, специфіка МСЕ та особливості задач, дотичних до проблематики створення ВБПМ, потребують дефініції одного так званого визначального рівняння в термінах векторного магнітного потенціалу. Тоді стає можливим використання підходу, що використовує метод Галеркіна. Структура цього рівняння легко піддається аналізу, що дозволяє, перегрупувавши його доданки та врахувавши додаткові допущення, отримувати математичні формулювання суміжних задач, які по суті є його частковими випадками. Наприклад, задача магнітостатики (режим заданих струмів), задача розповсюдження поля у електропровідному напівпросторі, задача з рухомими границями магнітопровідного середовища та ін. Підхід на основі методу Галеркіна також полегшує вибір шляхів алгоритмізації та програмної реалізації даних задач.

2.2.1. Математичні формулювання

Беручи до уваги означення поняття векторного магнітного потенціалу \bar{A} ,

$$\bar{B} = \text{rot } \bar{A}, \quad (2.46)$$

де \bar{B} – вектор індукції магнітного поля, запишемо закон електромагнітної індукції з використанням диференційного оператора Гамільтона ∇ :

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \bar{A}) = -\nabla \times \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right). \quad (2.47)$$

Для декартової системи координат $\nabla = \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z}$, де $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – одиничні орти, відповідно, за координатними осями x, y, z декартової СК. Зауважимо, що символами $\nabla \times$ позначатимемо оператор rot , $\nabla \cdot$ – оператор div , а ∇ – оператор grad .

Отже,

$$\nabla \times \left(\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) = 0, \quad (2.48)$$

показуючи, що сума векторів електричного поля й похідної по часу векторного потенціалу буде безвихровим полем так, що це може бути записано через градієнт скалярного поля:

$$\nabla U = -\bar{E} - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \quad \text{або} \quad \bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \nabla U, \quad (2.49)$$

де U – скалярний електричний потенціал зовнішнього поля;

\bar{E} – вектор напруженості електричного поля.

Враховуючи узагальнений закон Ома

$$\bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}), \quad (2.50)$$

де $\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$ – матриця питомої електричної провідності середовища;

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ – питомі електропровідності у напрямках x, y, z відповідно;

\bar{v} – вектор швидкості руху середовища, можна стверджувати, що сумарний вектор густини струму, який фігурує у (2.50) складається з трьох компонент

$$\bar{J} = \bar{J}_s + \bar{J}_e + \bar{J}_v, \quad (2.51)$$

де $\bar{J}_s = -\sigma \nabla U$ – складова вектора густини струму, зумовлена зовнішнім електричним полем;

$\bar{J}_e = -\sigma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$ – складова, зумовлена змінним в часі магнітним полем;

$\bar{J}_v = \sigma(\bar{v} \times \bar{B})$ – складова, спричинена рухом провідника зі швидкістю \bar{v} у магнітному полі інтенсивністю \bar{B} .

Зрозуміло, що в задачах магнітостатики \bar{J}_e, \bar{J}_v дорівнюють нулеві.

Компонент \bar{J}_s можна розглядати як густину струму джерел, а \bar{J}_e та \bar{J}_v – як густини «вихрових» струмів.

Враховуючи рівняння Пуассона у вигляді $\text{rot}(\mathbf{k} \text{rot} \bar{A}) = \bar{J}$, де $\mathbf{k} = \mu^{-1}$ – обернена матриця магнітної проникності середовища, вирази (2.50), (2.51) та

властивість подвійного векторного добутку [65] $\nabla \times (\nabla \times \bar{A}) \equiv \nabla (\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A}$,
отримуємо

$$\nabla (\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A} = \sigma \left(-\nabla U - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \bar{v} \times \nabla \times \bar{A} \right), \quad (2.52)$$

а беручи до уваги калібрування Кулона $\nabla \cdot \bar{A} = 0$, отримуємо рівняння

$$\nabla^2 \bar{A} = \sigma \nabla U + \sigma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \bar{v} \times \sigma \nabla \times \bar{A}, \quad (2.53)$$

яке доводить факт того, що векторний потенціал у кулонівському калібруванні завжди підпорядковується рівнянню Пуассона.

З іншого боку, скористаємося даним калібруванням як додатковою умовою для потенціалу

$$\nabla \times (\kappa \nabla \times \bar{A}) - \nabla (\kappa \nabla \cdot \bar{A}) + \sigma \nabla U + \sigma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \bar{v} \times \sigma \nabla \times \bar{A} = 0. \quad (2.54)$$

Саме рівняння (2.54) використовуємо для подальших перетворень [174]. Воно свідчить, що в будь-якій точці поля немає ні витоку ні стоку ліній повного струму та разом з крайовими умовами складає зміст математичного формулювання задачі розрахунку нестационарного магнітного поля з урахуванням навантажень електромагнітного та механічного походження. Поле густини струму визначатиметься формулою (2.50) або

$$\bar{J} = \sigma \left(-\nabla U - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + [\bar{v} \times \bar{B}] \right). \quad (2.55)$$

Зрозуміло, що розв'язання (2.54), в загальному випадку, вимагатиме виконання інтегрування як за просторовими, так і за часовою координатами.

Проаналізуємо кожен з доданків (2.54) та запишемо їх у двовимірній декартовій СК. Тобто, вектори \bar{B} та \bar{H} матимуть лише дві просторові проекції. Це, з однієї сторони, зробить чисельні алгоритми розрахунку поля достатньо швидкодіючими, а з іншої, — дасть змогу проводити ці розрахунки на обчислювальній техніці з доволі посередньою продуктивністю.

Допущення, що покладені в основу такого розрахунку, вважаються

загальноприйнятими [56], тобто поле розглядається в квазістаціонарному наближенні. Однак, його двовимірне формулювання диктує необхідність у прийнятті низки додаткових тверджень, а саме:

- вектори густин струмів та векторного магнітного потенціалу мають лише одну складову, наприклад, J_z та A_z ;
- характеристики намагнічування сталей та постійних магнітів однозначні, тобто, нехтуючи гістерезисом, приймаємо, що зв'язок між вектором \bar{B} індукції магнітного поля й вектором \bar{H} напруженості магнітного поля є взаємооднозначний. Робоча точка постійного магніту завжди належить прямій повернення.

Продовжуючи аналіз (2.54), доданок $\nabla \times (\kappa \nabla \times \bar{A})$ виглядатиме як

$$\nabla \times (\kappa \nabla \times \bar{A}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \kappa_{xx} \frac{\partial A_z}{\partial y} & -\kappa_{yy} \frac{\partial A_z}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = \left(-\kappa_{xx} \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} - \kappa_{yy} \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} \right) \bar{k}. \quad (2.56)$$

Для лінійного ізотропного, в магнітному відношенні, середовища

$$\nabla \times (\kappa \nabla \times \bar{A}) = -\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right) \bar{k}. \quad (2.57)$$

Наступний доданок

$$\nabla \kappa (\nabla \cdot \bar{A}) \equiv 0. \quad (2.58)$$

Доданок $\sigma \nabla U$ у двовимірному формулюванні не може бути заданим через скалярний потенціал, отже, задаватимемо його як вектор густини струму стороннього джерела:

$$\sigma \nabla U = -J_{sz}. \quad (2.59)$$

Одна зі складових «вихрового» походження перетвориться на скаляр:

$$\sigma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t}, \quad (2.60)$$

де $\sigma = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$ – питома електропровідність середовища.

Й, нарешті,

$$\bar{v} \times \sigma \nabla \times \bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_x & v_x & 0 \\ \sigma_{xx} \frac{\partial A_z}{\partial y} & -\sigma_{yy} \frac{\partial A_z}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = \left(-v_x \sigma_{yy} \frac{\partial A_z}{\partial x} - v_y \sigma_{yy} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \bar{k}. \quad (2.61)$$

Для лінійного середовища, ізотропного в електричному відношенні,

$$\bar{v} \times \sigma \nabla \times \bar{A} = -\sigma \left(v_x \frac{\partial A_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \bar{k}. \quad (2.62)$$

Остаточно рівняння (2.54) перетвориться на

$$-\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right) + \sigma \left(v_x \frac{\partial A_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) = J_{sz}, \quad (2.63)$$

що разом з крайовою умовою і складатиме математичне формулювання задачі динаміки у двовимірному просторі.

Розрахунок стаціонарного магнітного поля в області S , що окреслена в нормованому базисі розподілом координат $S(x, y)$, за відомим розподілом вектора густини струмів $\bar{J}(x, y)$, зводиться до розв'язування системи рівнянь Максвелла [148,149] або (2.63). Очевидно, що додатковим допущенням цього режиму, на додачу до вже прийнятих, буде відсутність вихрових струмів у магнітопроводі.

Запишемо рівняння (2.63) у декартовій СК для стаціонарного поля:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\mu J_{sz}, \quad (2.64)$$

де $\mu = \mu_0 \mu_r$ – абсолютна магнітна проникність середовища.

Також вважатимемо заданими крайову умову Діріхле та/або Неймана на границі розрахункової області,

$$A_{ze} = \xi(x, y); \quad \frac{\partial A_{ze}}{\partial \bar{n}} + \zeta(x, y) = 0, \quad (2.65)$$

де \bar{n} – нормаль до границі області розрахунку;

$\xi(x, y)$, $\zeta(x, y)$ – довільні функції положення точки.

Розв'язання задачі магнітостатики, тобто розрахунку магнітного поля за

заданими умовами однозначності й густинами струмів в струмопровідних областях, яка формулюється на підставі поняття векторного магнітного потенціалу МСЕ, зводиться до знаходження такого розподілу $A_z[x, y]$, який задовольнятиме (2.64) разом з (2.65). Отже, вони й складають зміст математичного формулювання крайової задачі розрахунку стаціонарного магнітного поля у тілі довільної форми.

Решта силових характеристик поля знаходимо за формулами

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}; \quad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}; \quad (2.66)$$

$$H_x = \frac{I}{\mu_0 \mu_r} B_x; \quad H_y = \frac{I}{\mu_0 \mu_r} B_y. \quad (2.67)$$

У нелінійному середовищі формулювання крайової задачі магнітостатики міститиме закон повного струму $\text{rot} \bar{H} = \bar{J}$, як

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z, \quad (2.68)$$

вирази (2.66), матеріальне рівняння у вигляді

$$H_x = H[B_x, B_y]; \quad H_y = H[B_x, B_y], \quad (2.69)$$

та крайову умову (2.65).

Зауважимо, що маючи основну криву намагнічування матеріалу як скалярну функцію $H = H[B]$ зв'язок проєкцій векторів \bar{B} та \bar{H} наступний

$$H_x = H[\bar{B}] \cdot \frac{B_x}{|\bar{B}|}; \quad H_y = H[\bar{B}] \cdot \frac{B_y}{|\bar{B}|}; \quad (2.70)$$

де $|\bar{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$ – модуль вектора \bar{B} .

2.2.2. Алгоритм розв'язання задачі магнітостатики

Запишемо (2.64) у вигляді

$$\xi(A_z) + \mu J_{sz} = 0, \quad (2.71)$$

де ξ – диференційний оператор n -го порядку;

A_z – залежна змінна — проєкція векторного магнітного потенціалу;

J_{sz} – вимушуюча сила — проєкція вектора густини струму.

Тоді метод зважених нев'язок вимагатиме виконання умови

$$\int_S \left(\xi(\tilde{A}_z) + \mu J_{sz} \right) M dS = 0, \quad (2.72)$$

де \tilde{A}_z – інтерпольоване (наближене) значення залежної змінної;

M – вагова функція.

Всю розрахункову область S , для якої справедливим є рівняння (2.72), розділимо на підобласті — скінченні елементи $S^{[e]}$. Тоді вагова функція наближає змінну A_z як

$$A_z \approx \tilde{A}_z = \sum_{k=1}^K M_k A_{zk}, \quad (2.73)$$

де $k = \overline{1, K}$ – поточний номер вузла в середині області $S^{[e]}$.

Застосовуючи метод Галеркіна, вагову функцію окреслюємо як $M = N^{[e]}$.

У подальшому викладі верхнім індексом "[e]" позначатимемо величини, що відносяться до СЕ з номером e .

Для всієї області S

$$\sum_{e=1}^E \int_{S^{[e]}} N^{[e]} \left(\xi(\tilde{A}_z^{[e]}) + \mu J_{sz} \right) dS = 0, \quad (2.74)$$

де $e = \overline{1, E}$ – поточний номер СЕ.

Наближене значення залежної змінної, в межах одного СЕ —

$$\tilde{A}_z^{[e]} = \sum_{k=1}^K N_k A_{zk}^{[e]} = \vec{N} \cdot \vec{A}_z^{[e]}, \quad (2.75)$$

де $\vec{N}[s, t] = \|N_1 \dots N_K\|$ – вектор-рядок функції форми СЕ;

$\vec{A}_z^{[e]} = \|A_{z1} \dots A_{zk}\|_*$ – вектор-стовпець вузлових значень залежної змінної.

Завдяки застосуванню локального базису (s, t) функція форми однакова для всіх СЕ. Саме тому в позначенні « \vec{N} » відсутня ознака приналежності до елемента з номером «[e]».

Дискретизація розрахункової області S скінченними елементами породжує

рівняння

$$\sum_{e=1}^E \int_{S^{[e]}} N \left(\frac{\partial^2 \tilde{A}_z^{[e]}[x,y]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{A}_z^{[e]}[x,y]}{\partial y^2} + \mu J_{sz}^{[e]} \right) dS = 0. \quad (2.76)$$

Вимога про неперервність інтерполянти \tilde{A}_z потребує такого визначення похідних другого порядку, яке забезпечуватиме їх міжелементну неперервність у процесі складання повної матриці коефіцієнтів. Це досягається таким прийомом

$$\begin{aligned} N \frac{\partial^2 \tilde{A}_z^{[e]}[x,y]}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial \tilde{A}_z^{[e]}[x,y]}{\partial x} \right) - \frac{\partial N}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{A}_z^{[e]}[x,y]}{\partial x}, \\ N \frac{\partial^2 \tilde{A}_z^{[e]}[x,y]}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(N \frac{\partial \tilde{A}_z^{[e]}[x,y]}{\partial y} \right) - \frac{\partial N}{\partial y} \cdot \frac{\partial \tilde{A}_z^{[e]}[x,y]}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Підставимо (2.77) у (2.76):

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^E \left[\int_{S^{[e]}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial \tilde{A}_z^{[e]}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N \frac{\partial \tilde{A}_z^{[e]}}{\partial y} \right) \right] dx dy + \right. \\ \left. + \int_{S^{[e]}} \left[-\frac{\partial N}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{A}_z^{[e]}}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} \cdot \frac{\partial \tilde{A}_z^{[e]}}{\partial y} + N \mu J_{sz}^{[e]} \right] dx dy \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Застосування формули Стокса [5,65] $\int_S \left(\frac{\partial \Xi_b}{\partial x} - \frac{\partial \Xi_a}{\partial y} \right) dS = \oint_L (\Xi_a dx + \Xi_b dy)$ до

першого інтегралу в (2.78) дає право замінити його криволінійним інтегралом. В результаті отримуємо

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^E \left[\oint_{L^{[e]}} \left[\left(N \frac{\partial \tilde{A}_z^{[e]}}{\partial x} \right) n_x^{[e]} - \left(N \frac{\partial \tilde{A}_z^{[e]}}{\partial y} \right) n_y^{[e]} \right] dL + \right. \\ \left. + \int_{S^{[e]}} \left[-\frac{\partial N}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{A}_z^{[e]}}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} \cdot \frac{\partial \tilde{A}_z^{[e]}}{\partial y} + N \mu J_{sz}^{[e]} \right] dx dy \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.79)$$

де n_x, n_y – проєкції вектора нормалі, спрямованого назовні до замкненої границі SE.

Заміна неперервної функції проєкції векторного потенціалу її інтерполянтою

$\tilde{A}_z^{[e]} = \vec{N} \cdot \vec{A}_z^{[e]}$ у другому доданку (2.79) приводить до виразу

$$\sum_{e=1}^E \left[\oint_{L^{[e]}} \vec{N}_* \left(\frac{\tilde{A}_z^{[e]}}{\partial x} n_x^{[e]} - \frac{\partial \tilde{A}_z^{[e]}}{\partial y} n_y^{[e]} \right) dL - \int_{S^{[e]}} \left[\frac{\partial \vec{N}_*}{\partial x} \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{N}_*}{\partial y} \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial y} \right] dx dy \cdot \vec{A}_z^{[e]} - \int_{S^{[e]}} \vec{N}_* \mu \vec{N} dx dy \cdot \vec{J}_{sz}^{[e]} \right] = 0. \quad (2.80)$$

Запишемо це рівняння в матричній формі

$$\sum_{e=1}^E \left(-\mathbf{K}_1^{[e]} \vec{A}_z^{[e]} + \vec{K}_2^{[e]} + \vec{K}_3^{[e]} \right) = 0, \quad (2.81)$$

де $\mathbf{K}_1^{[e]} = \int_{S^{[e]}} \left[\frac{\partial \vec{N}_*}{\partial x} \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{N}_*}{\partial y} \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial y} \right] dx dy$ – характеристична матриця елемента,

зумовлена його магнітною провідністю;

$\vec{K}_2^{[e]} = - \int_{S^{[e]}} \vec{N}_* \mu \vec{N} dx dy \cdot \vec{J}_z^{[e]}$ – вектор правих частин, зумовлений заданим

розподілом густини струму;

$\vec{K}_3^{[e]} = \oint_{L^{[e]}} \vec{N}_* \left(\frac{\tilde{A}_z^{[e]}}{\partial x} n_x^{[e]} - \frac{\partial \tilde{A}_z^{[e]}}{\partial y} n_y^{[e]} \right) dL$ – міжелементний вектор, зумовлений

крайовою умовою Неймана (2.44) або Коші (2.45).

Враховуючи (2.16),

$$\frac{\partial \vec{N}_*}{\partial x} \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{N}_*}{\partial y} \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial y} = \mathbf{N}_*^{<x,y>} \mathbf{N}^{<x,y>}, \quad (2.82)$$

характеристична матриця елемента $\mathbf{K}_1^{[e]}$, з огляду на (2.22), визначатиметься як

$$\mathbf{K}_1^{[e]} = \int_{S^{[e]}} \mathbf{N}_*^{<x,y>} \mathbf{N}^{<x,y>} dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}_*^{<x,y>} \mathbf{N}^{<x,y>} |\mathbf{J}| ds dt. \quad (2.83)$$

Стовпець правих частин —

$$\vec{K}_2^{[e]} = -\mu \int_{S^{[e]}} \vec{N}_* \vec{N} dx dy \cdot \vec{J}_{sz}^{[e]} = \mu \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \vec{N}[s,t]_* \vec{N}[s,t] |\mathbf{J}| ds dt \cdot \vec{J}_{sz}^{[e]}. \quad (2.84)$$

Міжелементний вектор, який задає паралельність або перпендикулярність вектора магнітної індукції на границі області, можна розділити на дві частини в залежності від того має даний елемент зовнішню границю чи ні:

$$\vec{K}_3^{[e]} = \vec{K}_{3e}^{[e]} + \vec{K}_{3i}^{[e]}, \quad (2.85)$$

де $\vec{K}_{3e}^{[e]}$ – внесок похідних за зовнішньою границею СЕ;

$\vec{K}_{3i}^{[e]}$ – внесок похідних за внутрішньою границею СЕ.

Оскільки кожен з крайових інтегралів має однаковий напрям обходу контура $L^{[e]}$, то всі внески у $\vec{K}_{3i}^{[e]}$ перетворюються на «0» на етапі формування повної матриці коефіцієнтів. Тому в подальших розрахунках ці внески не враховуються: $\vec{K}_{3i}^{[e]} = 0$.

Однак, належить пам'ятати про внески $\vec{K}_{3e}^{[e]}$ у випадку використання крайової умови типу (2.44) або (2.45).

Застосування інтерполяційної формули до вектора $\vec{K}_3^{[e]}$, з урахуванням його приналежності до зовнішньої границі, дає

$$\vec{K}_3^{[e]} = \mathbf{K}_{31}^{[e]} \vec{A}_z^{[e]}, \quad (2.86)$$

де

$$\mathbf{K}_{31}^{[e]} = \oint_{L^{[e]}} \vec{N}^* \vec{N} dL. \quad (2.87)$$

Враховуючи (2.81) та (2.86), поелементний внесок для СЕ із зовнішніми границями становить

$$\left(\mathbf{K}_1^{[e]} - \mathbf{K}_{31}^{[e]} \right) \vec{A}_z^{[e]} = \vec{K}_2^{[e]}, \quad (2.88)$$

а для внутрішніх елементів

$$\mathbf{K}_1^{[e]} \vec{A}_z^{[e]} = \vec{K}_2^{[e]}. \quad (2.89)$$

Отримані в такий спосіб характеристичні матриці $\mathbf{K}_1^{[e]}$, $\mathbf{K}_{31}^{[e]}$ та вектор $\vec{K}_2^{[e]}$ об'єднуємо в повні матрицю коефіцієнтів та вектор правих частин. Для цього, формально, елементні матриці розміру 4×4 належить розширити до розмірів повної

матриці $P \times P$, де P – загальна кількість вузлів у розрахунковій області. Для виконання даної операції введемо наступні позначення:

$i = \overline{1,4}$; $j = \overline{1,4}$ – поточні номери рядка та стовпця компоненти у елементних матрицях, відповідно, або поточні номери вузлів у локальній нумерації;

$n = \overline{1,P}$; $m = \overline{1,P}$ – поточні номери рядка та стовпця компоненти у розширеній матриці, відповідно, або поточні номери вузлів у глобальній нумерації.

Номерам вузлів у локальній нумерації СЕ поставимо у відповідність номери вузлів у глобальній нумерації. Для цього утворимо масив відповідності L_G , що формується за розбивки області на СЕ. Номеру рядка у цьому масиві відповідатиме номер СЕ $e = \overline{1,E}$, номеру стовпця — номер вузла у локальній нумерації вузлів. Значення компонент цього масиву — номери відповідних вузлів у глобальній нумерації.

Тепер, формування розширених елементних матриць, які позначатимемо як $\mathbf{K}_{1p}^{[e]}$, $\mathbf{K}_{31p}^{[e]}$, відбуватиметься за наступним алгоритмом:

- для СЕ з номером e матриці $\mathbf{K}_{1p}^{[e]}$, $\mathbf{K}_{31p}^{[e]}$ занулюємо;
- циклічно перебираючи номери рядків та стовпців компонент елементних матриць $\mathbf{K}_1^{[e]}$, $\mathbf{K}_{31}^{[e]}$ у діапазоні $i = \overline{1,4}$ та $j = \overline{1,4}$, номери рядків та стовпців компонент розширених матриць та їх значення знаходимо за виразами

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{1p}^{[e]}(L_G(e,i), L_G(e,j)) &= \mathbf{K}_1^{[e]}(i,j); \\ \mathbf{K}_{31p}^{[e]}(L_G(e,i), L_G(e,j)) &= \mathbf{K}_{31}^{[e]}(i,j); \end{aligned} \quad (2.90)$$

- за аналогічним принципом формуємо розширені стовпці правих частин

$$\vec{K}_{2p}^{[e]}(L_G(e,i)) = \vec{K}_2^{[e]}(i); \quad (2.91)$$

- змінюючи номер елемента, ці дії повторюємо для всіх елементних матриць та стовпців правих частин, змінюючи номер СЕ ($e = \overline{1,E}$).

Принципи формування розширених елементних матриць та стовпців наочно

розглядаються в прикладі, наведеному в додатку 1.

Після сумування всіх розширених матриць та стовпців

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^E \left(\mathbf{K}_{1p}^{[e]} + \mathbf{K}_{31p}^{[e]} \right); \quad \vec{Q} = \sum_{e=1}^E \left(\vec{K}_{2p}^{[e]} \right) \quad (2.92)$$

отримуємо повну лінійну САР

$$\mathbf{K} \vec{A}_z = \vec{Q}, \quad (2.93)$$

де \vec{A}_z – вектор проєкцій векторного магнітного потенціалу.

На цьому етапі у систему (2.93) вводимо крайову умову Діріхле. Для цього вилучаємо з неї рівняння, номери яких (номери стрічок) у глобальній нумерації відповідають вузлам з відомими, заданими, значеннями векторного потенціалу, а у рівняннях, що залишилися, перенесемо в праву частину добутки відомих елементів повної матриці коефіцієнтів \mathbf{K} на відомі значення цих потенціалів.

Розв'язавши отриману таким способом САР, порядок якої становить $P - G$, де G – кількість вузлів із заданими значеннями A_z , отримаємо шукане поле векторного магнітного потенціалу.

Після цього на підставі (2.66) визначаємо вузлові значення проєкцій магнітної індукції. Для i -го вузла елемента з номером e індукція магнітного поля

$$\begin{Bmatrix} B_{xi}^{[e]} \\ B_{yi}^{[e]} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \mathbf{N}[s_i, t_i]^{[e] \langle x, y \rangle} \vec{A}_z^{[e]}, \quad (2.94)$$

а його напруженість —

$$\begin{Bmatrix} H_{xi}^{[e]} \\ H_{yi}^{[e]} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \begin{Bmatrix} 1/\mu_{rx} & 0 \\ 0 & 1/\mu_{ry} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} B_{xi}^{[e]} \\ B_{yi}^{[e]} \end{Bmatrix}. \quad (2.95)$$

Для перевірки працездатності даного алгоритму в додатку 1 описано порівняно простий приклад розрахунку магнітного поля, в якому проілюстровані всі етапи даного алгоритму.

2.3. Прикладні задачі теорії пружності

Типові задачі теорії пружності, наприклад, розрахунок НДС та частот власних

коливань тіл довільної форми, розв'язуються МСЕ на підставі варіаційного підходу [174,254,264]. Принцип отримання визначального рівняння — функціоналу в даному випадку спирається на відомі співвідношення між деформаціями, механічними напруженнями та зміщеннями [33,150].

Потреба у розв'язанні цих задач, адаптації їх алгоритмів стосовно деталей та вузлів ВБПМ вимагає теоретичного обґрунтування як правомірності застосування даного функціоналу, так і особливостей його алгебризації. Саме це обґрунтування, на нашу думку, дозволить коректно, з математичного погляду, формулювати та розв'язувати такі задачі з використанням спеціалізованого програмного забезпечення [174], а на рівні якісної оцінки отриманих результатів судити про їх достовірність.

2.3.1. Математичні формулювання

Формалізуємо закон Гука векторним рівнянням

$$\vec{\sigma} = \mathbf{D}\vec{\varepsilon}, \quad (2.96)$$

де $\vec{\sigma} = \|\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\|_*$ — вектор напружень;

$\vec{\varepsilon} = \|\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\|_*$ — вектор деформацій;

σ_i, ε_i — нормальні проекції векторів напружень та деформацій, відповідно;

τ_{ij}, γ_{ij} — напруження та деформації зсуву у відповідних площинах;

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (2.97)$$

— матриця пружності;

E, ν — значення модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона, відповідно.

Вираз (2.97) справедливий у випадку використання ізотропних матеріалів [33].

За умови складного напруженого стану, скористаємося принципом

суперпозиції, а саме: *деформація конструкції під дією низки навантажень різного походження не залежить від послідовності їх прикладання й дорівнює сумі деформацій від кожного навантаження зокрема.* Застосування цього принципу для лінійних систем є цілком правомірним.

Для МСЕ важливо мати рівняння, що пов'язують між собою відносні деформації та зміщення. Для цього розглянемо перехід плоского нескінченно малого елемента з недеформованого стану, позначеного на рис. 2.4 $ABCD$, у деформований — $A'B'C'D'$. Символами u та v на рисунку позначено зміщення точок вздовж осей x та y , відповідно.

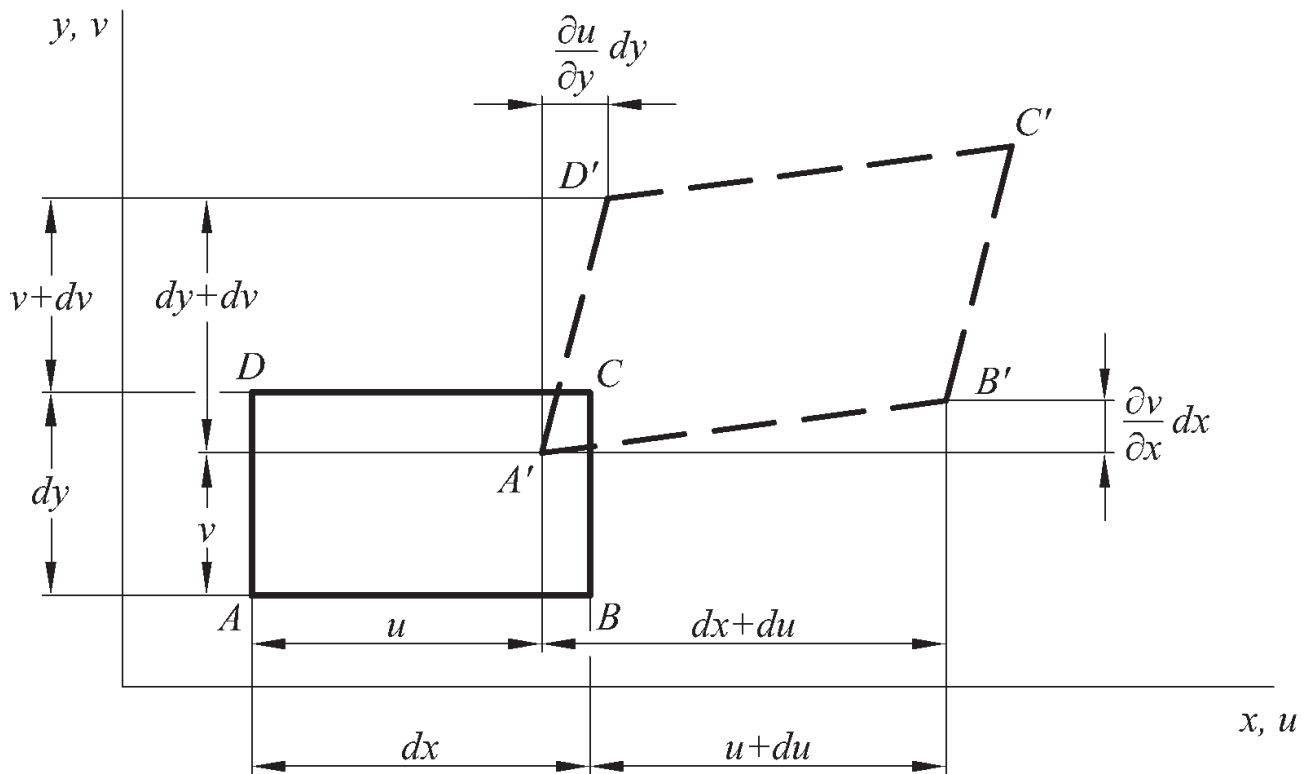


Рис. 2.4. Зв'язок між деформаціями та зміщеннями

З рисунку зрозуміло, що відносна нормальна деформація ε_x ребра AB вздовж осі x становитиме

$$\varepsilon_x = \frac{(A'B' - AB)_x}{(AB)_x} = \frac{dx + du - dx}{dx} = \frac{du}{dx}, \quad (2.98)$$

а деформація вздовж осі y –

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.99)$$

Деформацію зсуву в площині xOy визначатимемо як зміну кута $\angle DAB$, який

до деформації був прямим. Цей зсув представляє собою суму $\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$, отже, відповідна деформація становить

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.100)$$

Для тривимірного випадку можна показати, що

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{D} \vec{\delta} = \begin{pmatrix} \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial y \\ \partial w / \partial z \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \\ \partial v / \partial z + \partial w / \partial y \\ \partial w / \partial x + \partial u / \partial z \end{pmatrix}, \quad (2.101)$$

де u, v, w – компоненти трансляційного зміщення точки в напрямі осей x, y, z , відповідно;

$\vec{\delta} = \|u \quad v \quad w\|_*$ – вектор зміщення точки;

\mathbf{D} – матриця — диференціальний оператор.

Цей вираз доводить існування лінійного зв'язку між вектором деформацій та вектором зміщень.

Математичне формулювання задачі розрахунку полів зміщень та механічних напружень у пружних конструкціях довільної форми будуємо на підставі принципу мінімуму потенціальної енергії. В даному випадку, цей принцип формулюється так: *серед усіх можливих зміщень конструкції ті, що задовольнятимуть умови рівноваги, забезпечуватимуть стаціонарне значення потенціальної енергії* [33].

Саме цей принцип дає можливість безпосередньо формулювати рівняння жорсткості СЕ у МСЕ.

Повна потенціальна енергія конструкції Π_K складається з енергії деформації конструкції U та потенціальної енергії зовнішніх сил W , тобто

$$\Pi_K = U + W. \quad (2.102)$$

Для забезпечення рівноваги повна потенціальна енергія повинна приймати стаціонарне значення. Іншими словами — *варіація енергії деформації повинна дорівнювати варіації потенціальної енергії зовнішнього навантаження*

$$d(\Pi_K) = d(U + W), \text{ або } d(U) = d(W). \quad (2.103)$$

Для лінійного пружного матеріалу енергія деформації —

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_n) \bar{\sigma} dV, \quad (2.104)$$

де $\bar{\sigma}$ — вектор напружень, який відповідає різниці між вектором повної деформації $\bar{\varepsilon}$ та вектором деформації у початковому стані $\bar{\varepsilon}_n$;

V — об'єм області.

Враховуючи (2.96), вектор $\bar{\sigma}$ перезапишемо як

$$\bar{\sigma} = D(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_n), \quad (2.105)$$

де D — деяка скалярна пружність.

Наприклад, у випадку наявності температурних деформацій стовпець початкових деформацій може представляти собою наступне:

$$\bar{\varepsilon}_n = \|\alpha \Delta T \quad \alpha \Delta T \quad \alpha \Delta T \quad 0 \quad 0 \quad 0\|_*, \quad (2.106)$$

де α — коефіцієнт теплового розширення;

ΔT — відносне перевищення температури.

Якщо енергію U розглядати як роботу деякої сили F , що дорівнює добуткові цієї сили на зміщення δ , то за поступового наростання навантаження від 0 до F_{\max} та за умови нехтування силами інерції енергія $U = \frac{1}{2} F \delta$ (див. рис. 2.5). Саме цим пояснюється присутність множника $1/2$ у (2.104).

Потенціальну енергію зовнішніх сил W розглядаємо як суму

$$W = W_1 + W_2 + W_3, \quad (2.107)$$

де

$$W_1 = - \int_V \bar{\delta} \cdot \bar{Q}_a \, dV \quad (2.108)$$

– робота інерційних (масових) сил;

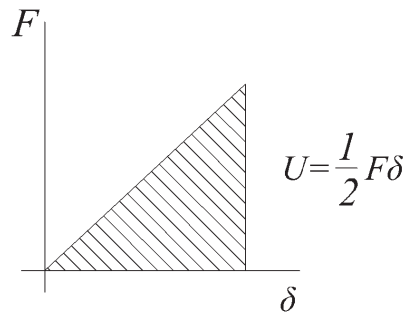


Рис. 2.5. Графічна інтерпретація енергії деформації

\bar{Q}_a – вектор сил, що викликає прискорення тіла;

$$W_2 = - \int_S \bar{\delta} \cdot \bar{P} \, dS \quad (2.109)$$

– робота сил гідростатичного тиску;

\bar{P} – вектор прикладеного тиску (в напрямі нормалі до поверхні містить лише одну складову);

S – площа, за якою розподілено тиск;

$$W_3 = \int_V \bar{\varepsilon} \cdot \bar{\sigma}_n \, dV \quad (2.110)$$

– робота, що відповідатиме початковим залишковим напруженням $\bar{\sigma}_n$.

Залишкові напруження можуть бути вимірними, але для їх прогнозування необхідною є інформація про повну історію навантаження конструкції.

Для розрахунку критичних частот обертання, необхідно розглядати задачі динаміки, тобто такі, в яких залежні змінні є функціями часу. Одним з видів динамічного аналізу механічної системи є модальний аналіз її матриці жорсткості. Саме він застосовується для визначення власних частот і форм коливань конструкції.

Рівняння статики доповнимо доданками, які враховують сили інерції та демпфування. Вважаємо, що здійснюються вільні незгасаючі коливання, тобто такі, що підпорядковуються загальному рівнянню руху

$$M \frac{d^2 \bar{\delta}}{dt^2} + C \frac{d \bar{\delta}}{dt} + K \bar{\delta} = \bar{F}(t), \quad (2.111)$$

де M , K – маса та жорсткість системи;

C – коефіцієнт демпфування або опору системи, що включає інерційне, конструкційне та стале демпфування (див. п. 1.3);

\bar{F} – вектор зовнішніх сил, в загальному випадку залежний від часу.

В обертовій СК рівняння динаміки містить додаткові складники

$$M \frac{d^2 \bar{\delta}}{dt^2} + (C + G) \frac{d \bar{\delta}}{dt} + (K - K_r) \bar{\delta} = \bar{F}, \quad (2.112)$$

де G – коефіцієнт демпфування, зумовлений силою Коріоліса

$$G = 2 \int_V \gamma \bar{\omega} dV; \quad (2.113)$$

K_r – жорсткість системи, зумовлена відцентровими навантаженнями;

γ – густина матеріалу;

$\bar{\omega}$ – вектор кутової швидкості обертання.

Згідно з лінійною теорією коливань, задача розрахунку власних частот зводиться до визначення власних значень глобальної матриці жорсткості системи, за умови, що вектор $\bar{F} = 0$:

$$\left[M \frac{d^2}{dt^2} + (C + G) \frac{d}{dt} + (K - K_r) \right] \bar{\delta} = 0. \quad (2.114)$$

2.3.2. Алгоритм розрахунку поля зміщень

Після дискретизації розрахункової області сукупністю СЕ повна потенціальна енергія конструкції перезапишеться як сума

$$\Pi_K(u, v, w) = \sum_{e=1}^E \Pi_K^{[e]}(u, v, w), \quad (2.115)$$

де $e = \overline{l, E}$ – поточний номер СЕ.

Беручи до уваги (2.103), та з урахуванням (2.96) для повної енергії СЕ справедливою буде формула

$$\begin{aligned} \Pi_{\kappa}^{[e]} = & \frac{1}{2} \int_{V^{[e]}} \tilde{\varepsilon}_*^{[e]} \mathbf{D} \tilde{\varepsilon}^{[e]} dV - \int_{V^{[e]}} \tilde{\varepsilon}_*^{[e]} \mathbf{D} \tilde{\varepsilon}_n^{[e]} dV + \frac{1}{2} \int_{V^{[e]}} \tilde{\varepsilon}_{n*}^{[e]} \mathbf{D} \tilde{\varepsilon}_n^{[e]} dV - \\ & - \int_{V^{[e]}} \tilde{\delta}_*^{[e]} \bar{Q}_a^{[e]} dV - \int_{S^{[e]}} \tilde{\delta}_*^{[e]} \bar{P}^{[e]} dS + \int_{V^{[e]}} \tilde{\varepsilon}_*^{[e]} \bar{\sigma}_n^{[e]} dV. \end{aligned} \quad (2.116)$$

Тут, за переходу до «елементного» формулювання, вектори з евклідового простору деформацій $\bar{\varepsilon}$ та зміщень $\bar{\delta}$ заміняємо їх наближеними значеннями $\tilde{\varepsilon}^{[e]}$ та $\tilde{\delta}^{[e]}$, що є справедливим в межах одного СЕ з номером e . Вектори з евклідового простору \bar{Q}_a , \bar{P} та $\bar{\sigma}_n$ заміняємо векторами з лінійного простору $\bar{Q}_a^{[e]}$, $\bar{P}^{[e]}$ та $\bar{\sigma}_n^{[e]}$.

Зауважимо, чим більше ступенів свободи буде мати конструкція, тим точнішим буде наближене рішення, яке в своїй границі прямуватиме до точного, що відповідає дійсній рівновазі.

У межах кожного елемента інтерполяційне значення зміщення довільної його точки може виражатися через вузлові зміщення СЕ як

$$\begin{aligned} u^{[e]}[x, y, z] &= \bar{N}^{[e]}[s, t, r] \bar{U}^{[e]}; \\ v^{[e]}[x, y, z] &= \bar{N}^{[e]}[s, t, r] \bar{V}^{[e]}; \\ w^{[e]}[x, y, z] &= \bar{N}^{[e]}[s, t, r] \bar{W}^{[e]}, \end{aligned} \quad (2.117)$$

де $\bar{N}^{[e]}[s, t, r] = \left\| N_1^{[e]} \quad N_2^{[e]} \quad \dots \quad N_n^{[e]} \right\|$ – вектор-рядок, що відповідає функції форми СЕ (див. п. 2.1.1);

$\bar{U}^{[e]} = \left\| u_1^{[e]} \quad u_2^{[e]} \quad \dots \quad u_n^{[e]} \right\|_*$ – вектор-стовпець вузлових значень зміщення СЕ

вдovж осі x , який надалі називатимемо стовцем x -дискрет;

$\bar{V}^{[e]} = \left\| v_1^{[e]} \quad v_2^{[e]} \quad \dots \quad v_n^{[e]} \right\|_*$, $\bar{W}^{[e]} = \left\| w_1^{[e]} \quad w_2^{[e]} \quad \dots \quad w_n^{[e]} \right\|_*$ – вектор-стовпці y - та

z -дискрет, відповідно;

n – кількість вузлів СЕ.

Покомпонентно об'єднаємо x -, y - та z -дискрети у вектор-стовпець дискрет СЕ

$$\vec{\delta}^{[e]} = \left\| \begin{matrix} u_1^{[e]} & v_1^{[e]} & w_1^{[e]} & u_2^{[e]} & v_2^{[e]} & w_2^{[e]} & \dots & u_n^{[e]} & v_n^{[e]} & w_n^{[e]} \end{matrix} \right\|_*, \quad (2.118)$$

а рядки функції форми у матрицю

$$\mathbf{N}^{[e]} = \left\| \begin{matrix} N_1^{[e]} & 0 & 0 & N_2^{[e]} & 0 & 0 & \dots & N_n^{[e]} & 0 & 0 \\ 0 & N_1^{[e]} & 0 & 0 & N_2^{[e]} & 0 & \dots & 0 & N_n^{[e]} & 0 \\ 0 & 0 & N_1^{[e]} & 0 & 0 & N_2^{[e]} & \dots & 0 & 0 & N_n^{[e]} \end{matrix} \right\|. \quad (2.119)$$

Тоді неперервну функцію зміщень довільної точки з координатами x, y, z , в межах СЕ, запишемо через вектор-дискрет як

$$\tilde{\delta}^{[e]}[x, y, z] = \left\| \begin{matrix} u^{[e]} \\ v^{[e]} \\ w^{[e]} \end{matrix} \right\| = \mathbf{N}^{[e]} \vec{\delta}^{[e]}. \quad (2.120)$$

Неперервну функцію деформацій, в межах кожного СЕ, наближено, з урахуванням (2.39), (2.101) виразимо як

$$\tilde{\varepsilon}^{[e]}[x, y, z] \approx \mathbf{D} \mathbf{N}^{[e]} \vec{\delta}^{[e]} = \mathbf{B}^{[e]} \vec{\delta}^{[e]}, \quad (2.121)$$

де $\mathbf{B}^{[e]}$ – матриця деформацій елемента e .

Враховуючи (2.120), запишемо повну потенціальну енергію СЕ (2.116) в термінах вузлових зміщень $\vec{\delta}^{[e]}$ як

$$\Pi_K^{[e]} = \frac{1}{2} \vec{\delta}_*^{[e]} \mathbf{K}^{[e]} \vec{\delta}^{[e]} - \vec{\delta}_*^{[e]} \vec{F}^{[e]} + \frac{1}{2} \int_{V^{[e]}} \vec{\varepsilon}_{n*}^{[e]} \mathbf{D} \vec{\varepsilon}_n^{[e]} dV, \quad (2.122)$$

де $\mathbf{K}^{[e]} = \int_{V^{[e]}} \mathbf{B}_*^{[e]} \mathbf{D} \mathbf{B}^{[e]} dV$ – матриця жорсткості елемента e ;

$\vec{F}^{[e]} = \vec{F}_Q^{[e]} + \vec{F}_P^{[e]} + \vec{F}_{\varepsilon_n}^{[e]} - \vec{F}_{\sigma_n}^{[e]}$ – вектор навантажень;

$$\begin{aligned}
\vec{F}_Q^{[e]} &= \int_{V^{[e]}} \mathbf{N}^{[e]} \vec{Q}_a^{[e]} dV; & \vec{F}_P^{[e]} &= \int_{S^{[e]}} \mathbf{N}^{[e]} \vec{P}^{[e]} dS; \\
\vec{F}_{\varepsilon_n}^{[e]} &= \int_{V^{[e]}} \mathbf{B}_*^{[e]} \mathbf{D} \vec{\varepsilon}_n^{[e]} dV; & \vec{F}_{\sigma_n}^{[e]} &= \int_{V^{[e]}} \mathbf{B}_*^{[e]} \vec{\sigma}_n^{[e]} dV.
\end{aligned}
\tag{2.123}$$

Інтеграли (2.123) відповідають статичним вузловим навантаженням, що викликані масовими силами, силами гідростатичного тиску, початковими деформаціями та початковими напруженнями.

За умови наявності зовнішніх зосереджених сил, які діють безпосередньо на вузли СЕ, потенціальна енергія всієї розрахункової області дорівнюватиме сумі енергій окремих СЕ:

$$\begin{aligned}
\Pi_K &= \frac{1}{2} \vec{\delta}_* \left(\sum_{e=1}^E \mathbf{K}^{[e]} \right) \vec{\delta} - \vec{\delta}_* \left(\sum_{e=1}^E \left(\vec{F}_Q^{[e]} + \vec{F}_P^{[e]} + \vec{F}_{\varepsilon_n}^{[e]} - \vec{F}_{\sigma_n}^{[e]} \right) - \vec{F}_N \right) + \\
&+ \frac{1}{2} \left(\sum_{e=1}^E \int_{V^{[e]}} \vec{\varepsilon}_n^{[e]} \mathbf{D} \vec{\varepsilon}_n^{[e]} dV \right),
\end{aligned}
\tag{2.124}$$

де \vec{F}_N – вектор зовнішніх сил, що діють безпосередньо на вузли СЕ;

$\vec{\delta}$ – шуканий вектор вузлових зміщень всієї конструкції (області).

Зауважимо, що кожний елементний вектор дискрет $\vec{\delta}^{[e]}$ є складовою глобального вектора зміщень $\vec{\delta}$, тому він може бути замінений глобальним вектором з відповідною перебудовою та розширенням матриць та векторів у (2.121).

Сумування у (2.124) передбачає розширення елементних матриць до розмірів глобальної. Процедура такого розширення аналогічна до описаної у п. 2.2.2.

Повна потенціальна енергія, у випадку використання лінійного пружного матеріалу, не лише стаціонарна, а й мінімальна [33]. Тобто за варіаційного формулювання МСЕ шукаємо мінімум повної потенціальної енергії серед множини можливих зміщень конструкції заданої форми.

Мінімізація повної потенціальної енергії передбачає знаходження похідної виду

$$\frac{\partial \Pi_K}{\partial \vec{\delta}} = \left\| \frac{\partial \Pi_K}{\partial \vec{\delta}^{[1]}} \quad \frac{\partial \Pi_K}{\partial \vec{\delta}^{[2]}} \quad \dots \quad \frac{\partial \Pi_K}{\partial \vec{\delta}^{[E]}} \right\|_* = 0, \quad (2.125)$$

яка, в загальному вигляді, зводиться до виразу

$$\mathbf{K} \vec{\delta} = \vec{F}, \quad (2.126)$$

де $\mathbf{K} = \sum_{e=1}^E \mathbf{K}^{[e]}$ – глобальна матриця жорсткості системи;

$$\vec{F} = \sum_{e=1}^E \left(\vec{F}_Q^{[e]} + \vec{F}_P^{[e]} + \vec{F}_{\varepsilon_n}^{[e]} - \vec{F}_{\sigma_n}^{[e]} \right) - \vec{F}_N - \text{глобальний вектор вузлових навантажень.}$$

Для розв'язання (2.126) необхідно врахувати крайові умови. Без них матриця \mathbf{K} стає сингулярною.

Після отримання розв'язку у вигляді вузлових зміщень напруження в межах елемента визначаємо як

$$\vec{\sigma}^{[e]} = \mathbf{D} \mathbf{B}^{[e]} \vec{\delta}^{[e]} - \mathbf{D} \vec{\varepsilon}_n^{[e]} + \vec{\sigma}_n^{[e]}. \quad (2.127)$$

В додатку 2 наведено приклад застосування цього алгоритму.

Для оцінювання рівня навантаження конструкційного елемента, що одночасно знаходиться під дією механічних напружень різного виду — розтяг, зсув, згин і т.д., використовуємо поняття еквівалентного напруження, яке у порівнянні з напруженням чистого розтягу, має таку саму небезпеку руйнування. Для цього використаємо гіпотезу про сталу величину роботи пластичної деформації. Таке рівнозначне напруження отримало назву еквівалентного напруження за Мізесом. У подальшому викладі називатимемо його напруженням за Мізесом або еквівалентним напруженням. У декартовій СК еквівалентне напруження визначаємо як

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]}. \quad (2.128)$$

2.4. Прикладна задача теорії теплопередачі

Незважаючи на «класичність» постановки задачі розрахунку стаціонарного поля температури у тілі з внутрішнім тепловиділенням, спосіб її розв'язання МСЕ у

тривимірному формулюванні не висвітлений у літературі. Також існує специфіка у введенні крайової умови в задачах з конвекційним теплообміном.

Крім цього, виклад даного підрозділу слугує своєрідною апробацією застосування прийнятої системи позначень функцій форми, їх інтегралів та похідних у алгоритмі задачі, що формулюється у тривимірному просторі.

2.4.1. Математичне формулювання

На підставі дослідів та спостережень відомо, що в твердому тілі або нерухомих рідинах та газах теплова енергія самовільно передається від більш нагрітих ділянок до менш нагрітих. Процес теплопровідності однозначно характеризується температурним полем тіла та градієнтом температури.

У випадках стаціонарної теплопередачі температурне поле це деяка функція просторових координат $T = f(x, y, z)$, яка є справедливою для усіх точок досліджуваного простору. Температурне поле є скалярним й може зображатися за допомогою ізотермічних поверхонь — геометричного місця точок простору з однаковою температурою.

Експериментально встановлено, що кількість переданого тепла пропорційна температурному перепаду, часу та площі перерізу перпендикулярного до напрямку передачі тепла. Якщо оперувати поняттям густини потоку (тепловий потік віднесений до одиниці площі ізотермічної поверхні), то існує залежність

$$\bar{q} = -\lambda \text{grad}T = -\lambda \nabla T, \quad (2.129)$$

де \bar{q} – густина теплового потоку, $[\text{Вт}/\text{м}^2]$;

λ – коефіцієнт теплопровідності, $[\text{Вт}/\text{м} \cdot \text{К}]$.

Для різних речовин коефіцієнт теплопровідності різний й залежить від вологості, тиску та температури. Для більшості матеріалів ця залежність практично лінійна [95]. В багатьох практичних задачах, в тому числі в задачах оцінки теплового стану ЕМ, можна вважати λ сталим, визначеним за середнього значення температури всієї системи.

Рівняння (2.129) є математичним виразом основного закону теплопровідності — закону Фур'є.

За конвекційного теплообміну процес переносу тепла пов'язаний з переносом самого середовища, тому конвекція розглядається лише у газах та рідинах які можуть вільно переміщатися. Розглядають два види конвекції: вільну й вимушену. Обидва види конвекційного теплообміну мають місце в ЕМ.

Інтенсивність конвекційного теплообміну характеризуються коефіцієнтом тепловіддачі α , $\left[\text{Вт}/\text{м}^2 \cdot \text{К} \right]$, який фігурує у формулі Ньютона-Ріхмана

$$Q = \alpha(T_L - T_0)S, \quad (2.130)$$

де Q – тепловий потік, (кількість теплоти, яка передається через будь-яку ізотермічну поверхню за одиницю часу), $[\text{Дж}/\text{с}] = [\text{Вт}]$;

T_L, T_0 – температура стінки та середня температура довілля, відповідно;

S – площа поверхні, з якої відбувається конвекційний теплообмін.

Детальніше про процеси тепловіддачі, пов'язані з умовами руху холодоагента, йдеться у п. 5.4.

Запишемо рівняння теплопровідності (2.129) у декартовій СК для стаціонарного температурного поля

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + p_v = 0, \quad (2.131)$$

де $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ – сталі коефіцієнти теплопровідності середовища в напрямках осей СК;

p_v – інтенсивність внутрішнього тепловиділення в одиниці об'єму, $\text{Вт}/\text{м}^3$.

Теж вважатимемо заданими крайові умови Діріхле та/або Коші на границі розрахункової області,

$$T_L = \xi(x, y, z); \quad \lambda \frac{\partial T_L}{\partial \bar{n}} + \alpha(T_L - T_0) + \zeta(x, y, z) = 0, \quad (2.132)$$

де \bar{n} – нормаль до границі області розрахунку;

$\xi(x, y, z), \zeta(x, y, z)$ – довільні функції положення точки.

Рівняння (2.131) разом з крайовою умовою (2.132) складають зміст математичного формулювання крайової задачі розрахунку стаціонарного температурного поля у тілі довільної форми.

2.4.2. Алгоритм розрахунку температурного поля

Рівняння (2.131) за структурою подібне до (2.64), а тому особливості застосування методу Галеркіна та дискретизація розрахункової області V тривимірними СЕ виконується аналогічно до описаного у п. 2.2.2. Отже,

$$\sum_{e=1}^E \int_{V^{[e]}} N \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}^{[e]}[x,y,z]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}^{[e]}[x,y,z]}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}^{[e]}[x,y,z]}{\partial z^2} + \frac{p_v}{\lambda} \right) dV = 0, \quad (2.133)$$

де $\lambda = \lambda_x = \lambda_y = \lambda_z$ – коефіцієнт теплопровідності ізотропного середовища.

Пониження порядку похідних та застосування теореми Остроградського-Гауса $\int_V \text{div} V dV = \oint_S V dS$ дає змогу перетворити (2.133) на

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^E \left[\oint_{S^{[e]}} \left[\left(N \frac{\partial \tilde{T}^{[e]}}{\partial x} \right) n_x^{[e]} + \left(N \frac{\partial \tilde{T}^{[e]}}{\partial y} \right) n_y^{[e]} + \left(N \frac{\partial \tilde{T}^{[e]}}{\partial z} \right) n_z^{[e]} \right] dS + \right. \\ & \left. + \int_{V^{[e]}} \left[-\frac{\partial N}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{T}^{[e]}}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} \cdot \frac{\partial \tilde{T}^{[e]}}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \cdot \frac{\partial \tilde{T}^{[e]}}{\partial z} + N \frac{p_v}{\lambda} \right] dx dy dz \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.134)$$

де n_x, n_y, n_z – проекції вектора нормалі, спрямованого назовні до замкненої границі СЕ;

$S^{[e]}$ – поверхня границі області.

Заміна неперервної функції температури її інтерполянтою $\tilde{T}^{[e]} = \vec{N} \cdot \vec{T}^{[e]}$ приводить до виразу

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^E \left[\oint_{S^{[e]}} \vec{N}^* \left(\frac{\partial \tilde{T}^{[e]}}{\partial x} n_x^{[e]} + \frac{\partial \tilde{T}^{[e]}}{\partial y} n_y^{[e]} + \frac{\partial \tilde{T}^{[e]}}{\partial z} n_z^{[e]} \right) dS - \right. \\ & \left. - \int_{V^{[e]}} \left[\frac{\partial \vec{N}^*}{\partial x} \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{N}^*}{\partial y} \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{N}^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial z} \right] dx dy dz \cdot \vec{T}^{[e]} + \int_{V^{[e]}} \frac{\vec{N}^* p_v}{\lambda} dx dy dz \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.135)$$

або коротко, в матричній формі

$$\sum_{e=1}^E \left(-\mathbf{K}_1^{[e]} \vec{T}^{[e]} + \vec{K}_2^{[e]} + \vec{K}_3^{[e]} \right) = 0, \quad (2.136)$$

де $\mathbf{K}_I^{[e]} = \int_{V^{[e]}} \left[\frac{\partial \vec{N}_*}{\partial x} \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{N}_*}{\partial y} \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{N}_*}{\partial z} \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial z} \right] dx dy dz$ – характеристична матриця

елемента, зумовлена теплопровідністю;

$\vec{K}_2^{[e]} = \int_{V^{[e]}} \frac{\vec{N}_* p_V}{\lambda} dx dy dz$ – вектор правих частин, зумовлений тепловиділенням;

$\vec{K}_3^{[e]} = \oint_{S^{[e]}} \vec{N}_* \left(\frac{\partial \tilde{T}^{[e]}}{\partial x} n_x^{[e]} + \frac{\partial \tilde{T}^{[e]}}{\partial y} n_y^{[e]} + \frac{\partial \tilde{T}^{[e]}}{\partial z} n_z^{[e]} \right) dS$ – міжелементний вектор,

зумовлений конвекційним теплообміном.

Беручи до уваги (2.35),

$$\frac{\partial \vec{N}_*}{\partial x} \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{N}_*}{\partial y} \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{N}_*}{\partial z} \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial z} = \mathbf{N}_*^{<x,y,z>} \mathbf{N}^{<x,y,z>}, \quad (2.137)$$

характеристична матриця елемента $\mathbf{K}_I^{[e]}$ —

$$\mathbf{K}_I^{[e]} = \int_{V^{[e]}} \mathbf{N}_*^{<x,y,z>} \mathbf{N}^{<x,y,z>} dx dy dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}_*^{<x,y,z>} [s,t,r] \mathbf{N}^{<x,y,z>} [s,t,r] |\mathbf{J}| ds dt dr. \quad (2.138)$$

Тоді, стовпець правих частин

$$\vec{K}_2^{[e]} = \frac{p_V}{\lambda} \int_{V^{[e]}} \vec{N}_* dx dy dz = \frac{p_V}{\lambda} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \vec{N} [s,t,r]_* |\mathbf{J}| ds dt dr. \quad (2.139)$$

Міжелементний вектор, який відповідає за конвекційний теплообмін, можна розділити на дві частини, в залежності від того має даний елемент зовнішню границю чи ні:

$$\vec{K}_3^{[e]} = \vec{K}_{3e}^{[e]} + \vec{K}_{3i}^{[e]}, \quad (2.140)$$

де $\vec{K}_{3e}^{[e]}$, $\vec{K}_{3i}^{[e]}$ – внески похідних за зовнішньою та внутрішньою границями SE, відповідно.

Внески $\vec{K}_{3i}^{[e]}$ перетворюються на «0» так само як і у випадку (2.85). Внески $\vec{K}_{3e}^{[e]}$, у випадку використання крайової умови Коші, відмінні від нуля. За відомого поля

температур коефіцієнт тепловіддачі α визначається за (2.130):

$$dQ = \alpha(T_L - T_0)dS, \quad (2.141)$$

де dQ – тепловий потік через елементарну площадку dS ;

T_L, T_0 – температури границі та довкілля, відповідно.

З іншого боку, потік тепла передається від зовнішньої стінки прилеглому до неї шару рідини або газу шляхом теплопровідності й підпорядковується (2.129):

$$dQ = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \right) dS, \quad (2.142)$$

де \bar{n} – вектор нормалі до цієї стінки.

Прирівнюючи прирости теплового потоку, визначаємо, що

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \right) dS = \frac{\alpha}{\lambda} (T_0 - T_L) dS. \quad (2.143)$$

Отже, внесок

$$\vec{K}_3^{[e]} = \oint_{S^{[e]}} \frac{\alpha}{\lambda} \vec{N}_* (T_0 - \tilde{T}_L) dS, \quad (2.144)$$

де T_0 – задана температура довкілля (середньомасова);

\tilde{T}_L – невідоме значення температури на границі.

Застосування інтерполянти до (2.144) та перегрупування доданків дає вираз

$$\vec{K}_3^{[e]} = \vec{K}_{31}^{[e]} - \mathbf{K}_{32}^{[e]} \vec{T}^{[e]}, \quad (2.145)$$

де

$$\vec{K}_{31}^{[e]} = \oint_{S^{[e]}} \frac{\alpha}{\lambda} T_0 \vec{N}_* dS, \quad \mathbf{K}_{32}^{[e]} = \frac{\alpha}{\lambda} \oint_{S^{[e]}} \vec{N}_* \vec{N} dS. \quad (2.146)$$

Враховуючи (2.146), поелементний внесок для СЕ із зовнішніми границями становить

$$\left(\mathbf{K}_1^{[e]} + \mathbf{K}_{32}^{[e]} \right) \vec{T}^{[e]} = \vec{K}_2^{[e]} + \vec{K}_{31}^{[e]}, \quad (2.147)$$

а для внутрішніх елементів

$$\mathbf{K}_1^{[e]} \vec{T}^{[e]} = \vec{K}_2^{[e]}. \quad (2.148)$$

Спосіб формування повної матриці коефіцієнтів та правих частин описаний у п. 2.2.2. Система позначень, в даному випадку, наступна:

$i = \overline{1,8}$; $j = \overline{1,8}$ – поточні номери стрічки та стовпця компоненти у елементних матрицях, відповідно, або поточні номери у локальній нумерації;

$n = \overline{1,P}$; $m = \overline{1,P}$ – поточні номери стрічки та стовпця компоненти у розширеній матриці, відповідно, або поточні номери у глобальній нумерації.

Після сумування всіх розширених матриць та стовпців

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^E \left(\mathbf{K}_{1p}^{[e]} + \mathbf{K}_{32p}^{[e]} \right); \quad \vec{Q} = \sum_{e=1}^E \left(\vec{K}_{2p}^{[e]} + \vec{K}_{31p}^{[e]} \right). \quad (2.149)$$

Повна лінійна САР

$$\mathbf{K}\vec{T} = \vec{Q}, \quad (2.150)$$

де \vec{T} – вектор температур.

Після введення крайової умови отримаємо САР, розв'язком якої є шуканий вектор температур.

Для перевірки працездатності даного алгоритму у додатку 3 розглянуто порівняно простий приклад розрахунку теплового поля.

Висновки до розділу

1. До всього комплексу фізичних задач, що дотичні до електромеханіки — електромагнетизм, теорія пружності, теплопередача та ін., доцільно застосовувати МСЕ як ефективний спосіб чисельного розв'язання диференційних рівнянь в частинних похідних.

2. У задачах теорії пружності, для яких відомим є спосіб отримання функціоналу повної потенціальної енергії системи, застосовуватимемо МСЕ у варіаційному формулюванні.

3. Складність знаходження енергетичних функціоналів для задач електродинаміки пояснює застосування МСЕ з використанням методу Галеркіна.

4. Подібність структури рівняння теплопровідності та рівняння Пуассона режиму магнітостатики, а також переваги використання типових обчислювальних

процедур є причинами застосовування методу Галеркіна для задач стаціонарної теплопередачі.

5. Для забезпечення міжелементної неперервності шуканого поля у МСЕ з використанням методу Галеркіна, достатньо формувати функції форми СЕ на основі степеневих многочленів 1-го порядку. Та сама вимога, у випадку варіаційного підходу, потребує використання многочленів принаймні 2-го порядку.

6. Крайову умову Діріхле в МСЕ необхідно вводити на етапі формування повної матриці коефіцієнтів. Умова Коші, зокрема за виконання теплового аналізу, проявляє себе безпосередньо в елементних похідних.

7. Застосування локального базису й так званих природних (англ. *Natural*) координат дає змогу:

- за побудови аналітичних виразів функції форми використовувати неповні степеневі многочлени, незважаючи на їх не інваріантність у глобальній системі координат;
- отримувати аналітичні вирази для обчислення поверхневих чи об'ємних інтегралів та частинних похідних потенціальних функцій, тим самим істотно підвищити точність їх знаходження;
- оперувати єдиною функцією форми для СЕ різних розмірів.

8. Основний недолік МСЕ полягає в необхідності виконання доволі громіздких обчислювальних процедур навіть за розв'язання дуже простих задач. Метод практично виключає можливість «ручного» розрахунку.

РОЗДІЛ 3.

ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ПРОЦЕСИ

ВИСОКОШВИДКІСНИХ БЕЗКОНТАКТНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ МАШИН ЗІ ЗБУДЖЕННЯМ ВІД ПОСТІЙНИХ МАГНІТІВ

Процедура отримання початкових значень розмірів та обмоткових даних, які вирізнятимуть конкретну ЕМ серед множини можливих варіантів, логічно завершується виконанням перевіркового аналізу — розрахунком характеристик (статичних чи динамічних), що свідчать про відповідність проекту вимогам ТЗ. Специфіка перебігу електромагнітних процесів у ВБПМ, наприклад, вплив способу керування безконтактною машиною, особливості утворення втрат та ін. чинники вносять суттєві коректування в методики розв'язання таких задач.

Наявність дискретної системи керування та зворотного зв'язку за положенням ротора примушує приділяти особливу увагу динамічній поведінці ВБПМ. Можна стверджувати, що задачі розрахунку перехідних електромеханічних процесів з категорії допоміжних та уточнюючих процедур потрапляють до списку основних видів аналізу ВБПМ.

Саме ці питання та особливості детально розглядаються в цьому розділі.

3.1. Проектний синтез ВБПМ

Переважає більшість задач проектного синтезу ВБПМ розв'язується нами на підставі відомих методів теорії проектування ЕМ з ПМ [72,158,214]. Тут акцентуємо увагу лише на тих завданнях, що залежать від особливостей режиму роботи чи конструкції ВБПМ.

3.1.1. Розміри, обмоткові дані, параметри

У машинах загальнопромислового призначення головні розміри — діаметр ротора або внутрішній діаметр статора D та розрахункова довжина осердя якоря l_{δ} пов'язані з повною потужністю за допомогою так званої сталої Арнольда C_A . Її величина залишається практично сталою для цих машин, за умови їх виконання з

близькими діаметрами. Однак ситуація кардинально змінюється для машин, у яких ротори працюють на межі механічної міцності. Наприклад, для синхронного генератора 15 кВА, 1500 об/хв C_A може становити $\approx 0,3 \times 10^{-2} \text{ м}^3/\text{Дж}$, тоді як для генератора тієї ж потужності на 120 тис. об/хв $C_A \approx 0,6 \times 10^{-2} \text{ м}^3/\text{Дж}$.

Беручи до уваги власний досвід створення ВБПМ, ми дійшли висновку, що вибір головних розмірів необхідно здійснювати з огляду на технічний та технологічний рівень конкретного виробництва. Визначальними показниками тут виступатимуть механічна міцність конструкції ротора (див. п. 4.2) та його жорсткість (див. п. 4.3).

Електромагнітні навантаження

Для вибору наближеного значення лінійного навантаження пропонуємо скористатися рекомендаціями з табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Рекомендовані значення «електричного навантаження» машини [19,72, 158,184]

	Непряме повітряне охолодження IC0145 (0146,0147)	Безпосереднє повітряне охолодження IC15 (16,17)	Непряме каналне рідинне охолодження IC47 (97)
Лінійне навантаження A , кА/м	20 – 40	30 – 70	40 – 90
Густина струму в обмотці статора J_s , А/мм ²	3 – 6	4 – 7	5 – 9

Величина «магнітного навантаження» — індукції в проміжку, залежатиме від вибраного матеріалу полюсів індуктора. Сучасні магнітотверді матеріали мають практично лінійну «криву розмагнічування» (рис. 1.6) у робочому діапазоні температур [293]. Це означає, що максимум густини енергії ПМ $(BH)_{\max} \left[\text{Дж/м}^3 \right]$ припадатиме на значення, що відповідає $0,5B_r$, де B_r — залишкова індукція ПМ. Насправді, як показує досвід попереднього проектування, значення індукції у робочому проміжку машини отримується дещо вищим за точку цього максимуму, тому попередній вибір значення B_δ пропонуємо робити з діапазону

$$B_\delta = (0,6 \div 0,8)B_r, \quad (3.1)$$

де B_{δ} – амплітуда магнітної індукції в проміжку за неробочого ходу.

Визначення діючого значення номінального фазного струму в генераторах виконуємо традиційно

$$I_H = \frac{S_{2H}}{m \cdot U_H}, \quad (3.2)$$

а в двигунах враховуємо особливості роботи за 6-тактовою комутаційною схемою (див. табл. 1.1)

$$I_H = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{P_{2H}}{\eta U_{DC}}, \quad (3.3)$$

де S_{2H} – номінальна повна електрична потужність генератора, ВА;

P_{2H} – номінальна потужність на валу двигуна, Вт;

m – кількість фаз¹;

U_H – діюче значення номінальної фазної напруги генератора, В;

U_{DC} – номінальна напруга постійного струму двигуна, В;

η – очікуване значення коефіцієнту корисної дії.

Для зменшення додаткових втрат в обмотці статора діаметр круглого провідника d_p або розмір меншої сторони h_p прямокутного вибираємо співмірними з глибиною проникнення магнітного поля у мідь δ_{Cu} , а саме:

$$d_p = (0,6 \div 0,8) \delta_{Cu} \quad \text{або} \quad h_p = (0,6 \div 0,8) \delta_{Cu}. \quad (3.4)$$

Для заданої частоти струму в статорі f_H , глибина проникнення становить:

$$\delta_{Cu} = \sqrt{\frac{\rho_{Cu}}{\pi \cdot f_H \cdot \mu_0}}, \quad (3.5)$$

де ρ_{Cu} – питомий опір матеріалу провідників, [Ом·м].

Тип обмотки та форма паза

В подальшому викладі для обмеження можливих варіантів вибору типів якірних обмоток ВБПМ розглядатимемо генератори, фазна напруга яких не перевищує 660 В змінного струму й двигуни з напругою живлення не більше 1500 В

¹ У роботі розглядаються лише трифазні машини

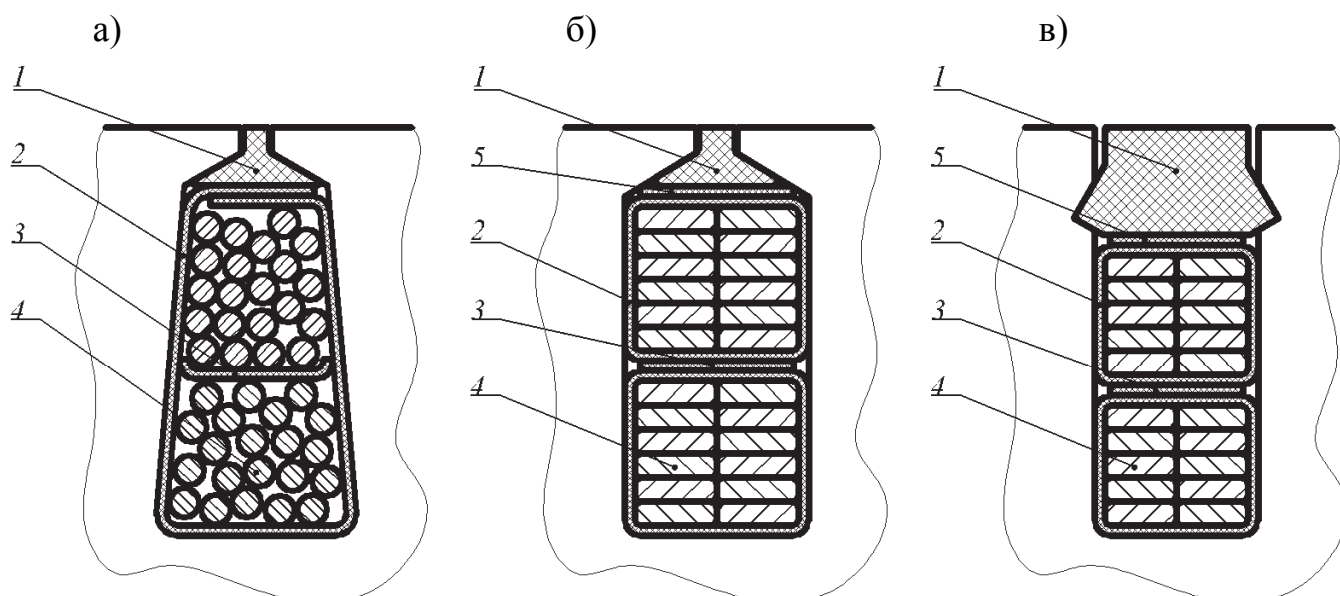
постійного струму. Це обмеження викликано технологічними складнощами ізолювання обмоток високовольтних машин [311].

Отже обираючи тип обмотки — петлева або хвилева, одношарова або двошарова, треба зважати на цілу низку переваг двошарових обмоток над одношаровими: форма лобових частин є простішою з меншою кількістю згинів, ніж в одношаровій, кращі фільтруючі властивості для вищих гармонічних МРС.

Задаючись кількістю пазів на полюс і фазу q , пропонуємо: для одношарових обмоток q вибирати цілим та таким, що $q \geq 2$; для двошарових — цілим та з $q > 2$, або дробовим виду $q = n + \frac{1}{2}$. Зауважимо, що в обмотках з дробовим q МРС реакції якоря неоднакова під різноіменними полюсами, що викликатиме сили одностороннього притягання статора до ротора й як наслідок потенційну небезпеку погіршення вібраційного фону. З іншого боку, осердя з кількістю зубців, що забезпечує дробове q , створюватиме менший реактивний момент у порівнянні з випадком цілого q .

Оптимальному вибору конструкції та типу обмотки присвячено багато праць [119,161,214,292]. Ці питання можуть складати зміст окремого дослідження й в повному обсязі нами не опрацьовувалися.

Форму паза статора обираємо з огляду на форму провідника та технологію виготовлення обмотки (рис. 3.1). Так, на користь відкритого паза свідчить технологічна можливість використання обмоток, ізолювання яких відбувається за межами осердя. З іншої сторони, відкритий паз є джерелом вищих просторових гармонік поля порівняно великої амплітуди. Зубцева гармоніка, що нерухома по відношенню до статора, обертається довкола ротора. Спричинені нею поверхневі втрати в полюсній системі індуктора можуть сягати значних величин. Для полюсів, виготовлених з рідкісноземельних композитів, що мають порівняно високу електропровідність, дана обставина може виявитись визначальною. В цьому випадку для машин обмотки яких виготовляються з прямокутних провідників, пропонуємо використовувати прямокутні напівзакрині пази (рис. 3.1, б) й обирати стрижньові хвильові обмотки (рис. 3.2).



1 - клин; 2 - корпусна ізоляція; 3 - прокладка міжшарова; 4 - провідник обмотки; 5 - прокладка під клин

Рис. 3.1. Пази осердь статорів ВБПМ: а) напівзакритий трапецієподібний; б) напівзакритий прямокутний; в) відкритий прямокутний

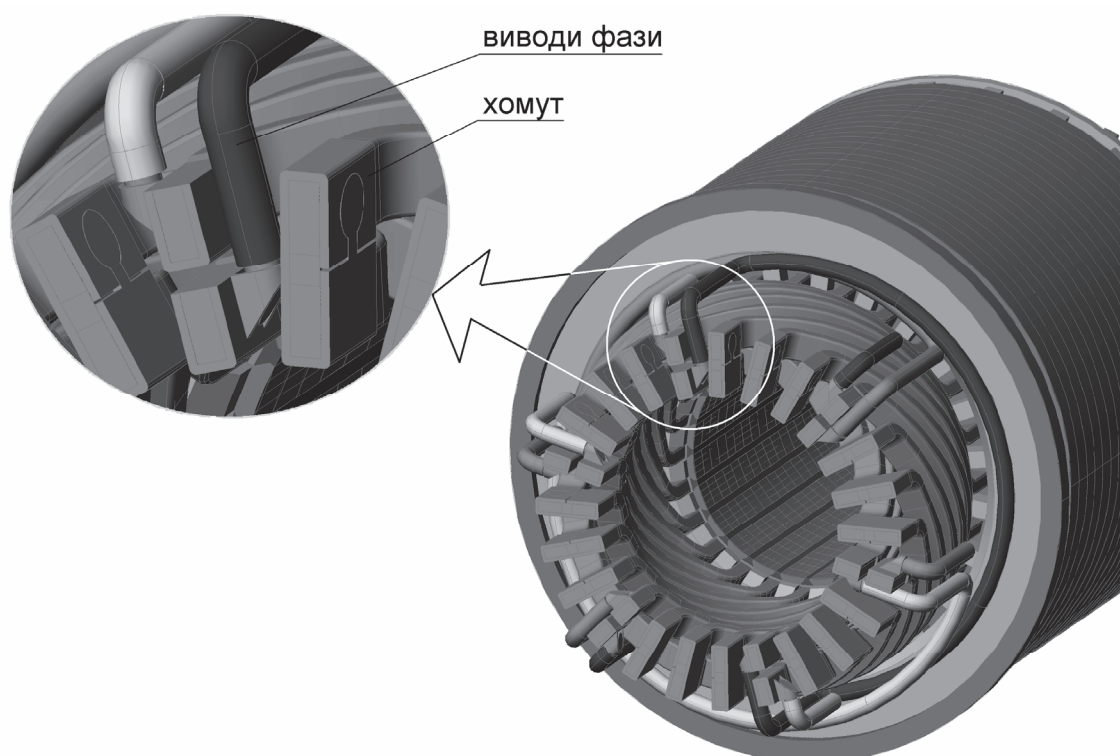


Рис. 3.2. Конструкція хвильової двошарової обмотки статора, що вкладається у напівзакриті прямокутні пази

Якщо використовуються металокерамічні матеріали на основі фериту, вибір відкритих пазів цілком допустимий.

Ширина зубця з паралельними стінками для трапецієподібних пазів, або мінімальна ширина зубця для прямокутних визначатиметься допустимим значенням індукції $B_{z\max}$, яке, з огляду потреби у мінімізації основних втрат у сталі, для ВБПМ є істотно нижчим, ніж у зубцях загальнопромислових машин. Проведений аналіз показує, що для шихтованих сталевих осердь допустимі значення $B_{z\max}$ належать діапазону $1,0 \div 1,3$ Тл. Аналогічна ситуація стосується допустимої індукції у ярмі $B_{a\max} = 0,8 \div 1,1$ Тл.

Робочий повітряний проміжок

Визначення розміру робочого повітряного проміжку у ВБПМ зв'яжемо з задачею захисту полюсної системи ротора від розмагнічування струмами перевантаження.

Якщо робоча точка ВБПМ $R1$ (рис. 3.3), внаслідок перевантаження за струмом опуститься нижче значення B_{\min} , наприклад у $R2$, то після усунення перевантаження вона повернеться лише у точку $R3$. Це спричинить незворотне зменшення результуючого магнітного потоку, моменту, ЕРС.

Виходячи з такого трактування процесу розмагнічування ПМ, мінімальний розмір повітряного проміжку визначатимемо з рівняння, записаного за законом повного струму для контура інтегрування, що проходить через ярмо ротора, полюс, повітряний проміжок, зубці і ярмо статора та охоплює провідники обмотки. Нехтуючи магнітною напругою сталевих ділянок магнітопроводу, з розрахунку на один полюс запишемо

$$F_m + F_\delta \approx F_w, \quad (3.6)$$

де $F_m = h_{pm} H_{\min} = h_{pm} \frac{(B_{\min} - B_r) H_c}{B_r}$; $F_\delta \approx \frac{\delta}{\mu_0} B_\delta$ – магнітні напруги полюса та повітряного проміжку, відповідно;

$$F_w \approx \sqrt{2} k_L I_n \frac{w_p}{2p} - \text{МРС реакції якоря на один полюс, наближено;}$$

h_{pm} – радіальна товщина ПМ;

k_L – коефіцієнт перевантаження за струмом;

w_p – кількість витків у фазі обмотки;

p – кількість пар полюсів;

H_c , B_r , B_{min} – коерцитивна сила, залишкова індукція та мінімально допустиме значення індукції у полюсі (рис. 3.3).

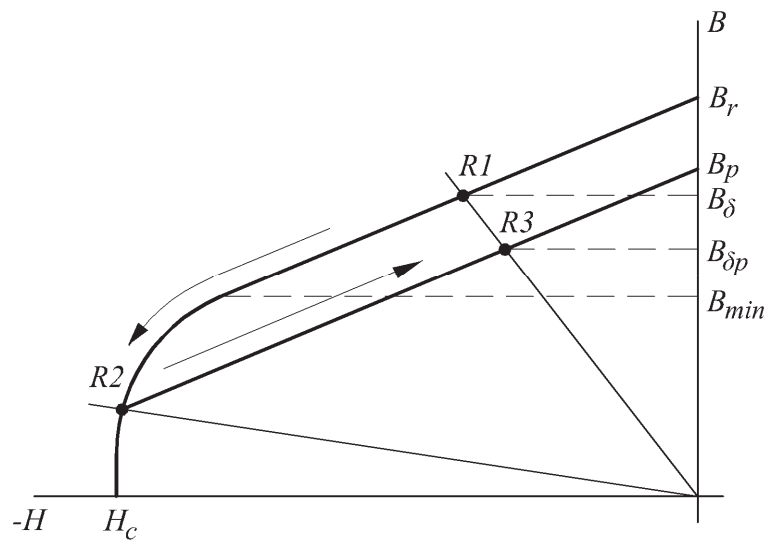


Рис. 3.3. Процес розмагнічування ПМ

Необхідні дані для обраного матеріалу ПМ визначаються з довідникових джерел, за кривою розмагнічування та з урахуванням робочої температури полюсів.

Задаючи товщину полюса h_{pm} , з міркувань його механічної міцності та технологічності виготовлення, мінімальну величину проміжку на підставі (3.6) визначаємо з нерівності

$$\delta_{min} \geq \frac{\sqrt{2} I_{max} \frac{w_p}{2p} - \left| \frac{(B_{min} - B_r) H_c}{B_r} \right| h_{pm}}{\frac{1}{\mu_0} B_\delta}. \quad (3.7)$$

Безперечно, існує вплив товщини полюса на результуючий потік машини, але його кількісна оцінка стане можливою лише на подальших етапах розрахунку, на яких, за умови використання порівняно дорогих рідкісноземельних ПМ, не останню

роль відіграватиме вартість цілої полюсної системи.

Параметри машини

Параметрами машини вважатимемо: активний опір фази обмотки за робочої температури, індуктивність розсіювання фази обмотки статора та магнітну провідність розсіювання полюса. На обраному способі визначення індуктивностей розсіювання зупинимося детальніше.

Індуктивність розсіювання фази обмотки статора (власна)

$$L_{\sigma a} = 2\mu_0 \left(\frac{w_p}{a} \right)^2 \frac{l_\delta}{pq} (\lambda_s + \lambda_{sz} + \lambda_{se} + \lambda_{sd}), \quad (3.8)$$

де $\lambda_s, \lambda_{sz}, \lambda_{se}, \lambda_{sd}$ – коефіцієнти магнітної провідності пазового розсіювання, розсіювання голівок зубців, лобового та диференційного розсіювання, відповідно (методам їх обчислення присвячена численна література [29,119,138,183,292]).

Визначення індуктивностей лобового розсіювання, власних та взаємних, можна здійснити таким способом:

$$L_{\sigma 11} = L_{\sigma 22} = L_{\sigma 33} = 2\mu_0 \left(\frac{w_p}{a} \right)^2 \frac{l_\delta \lambda_{se}}{pq}; \quad (3.9)$$

$$L_{\sigma 12} = L_{\sigma 13} = L_{\sigma 21} = L_{\sigma 23} = L_{\sigma 31} = L_{\sigma 32} = \frac{1}{3} L_{\sigma 11},$$

де λ_{se} – коефіцієнт магнітної провідності лобового розсіювання (див. табл. 3.2);

a – кількість паралельних гілок обмотки.

Таблиця 3.2

Коефіцієнти магнітної провідності лобового розсіювання [161]

Тип обмотки	Неявнополюсні машини	Явнополюсні машини
Однофазна, невідігнута лобова	0,06 – 0,09	0,10 – 0,12
Однофазна відігнута лобова	0,12 – 0,15	0,17 – 0,18
Двоярусна	0,24 – 0,34	0,28 – 0,34
Триярусна	0,21 – 0,28	0,25 – 0,29
Одношарова	0,33 – 0,30	0,36 – 0,32
Двошарова	0,26 – 0,23	0,28 – 0,25

Магнітна провідність розсіювання полюса становить

$$\lambda_{\sigma f} = 2\mu_0 \left(\frac{l_m h_{pm}}{a_{cj}} + \frac{4b_m h_{pm}}{\pi d_{cj}} \right), \quad (3.10)$$

де

$$a_{cj} = \frac{(1 - \alpha_\delta)\pi}{2p} (D - 2\delta - h_{pm}); \quad d_{cj} = (D - 2\delta - h_{pm}) \sin \left(\frac{\pi}{2p} - \arcsin \left(\frac{b_m}{2(D - 2\delta - h_{pm})} \right) \right)$$

– довжини силових трубок між полюсами та для торцевого розсіювання, відповідно;
 α_δ – коефіцієнт полюсного перекриття;

l_m – осьова довжина ротора;

b_m – ширина полюса за зовнішньою дугою.

Характеристики намагнічування елементів магнітопроводу

Обраний спосіб виконання процедур перевіркового розрахунку ВБПМ потребує математичної формалізації характеристик намагнічування елементів її магнітопроводу. Зауважимо, що всі вони, за виключенням полюсів індуктора, отримуються у вигляді таблично заданих функцій.

Магнітну напругу полюса визначаємо за характеристикою намагнічування як функцію магнітного потоку полюса Φ_m —

$$F_m = F_m(\Phi_m) = \frac{(\Phi_m - \Phi_{\max})}{\Phi_{\max}} F_{\max}, \quad (3.11)$$

де Φ_{\max} – розрахунковий магнітний потік полюса за умови відсутності зовнішньої МРС (коерцитивна сила $H_c = 0$) $\Phi_{\max} = S_m B_r$;

S_m – площа нейтрального перетину полюса;

$F_{\max} = h_{pm} H_c$ – розрахункова МРС полюса за повного розмагнічування (залишкова індукція $B_r = 0$).

Магнітну напругу ярма ротора визначаємо як функцію магнітного потоку полюса Φ_m за характеристикою намагнічування ярма

$$F_j = F_j(\Phi_m). \quad (3.12)$$

Для суцільних роторів (рис. 4.1) полюси та ярмо ротора нероздільні. В цьому випадку пропонуємо приймати $F_j = 0$.

Магнітну напругу ярма статора визначаємо як функцію магнітного потоку повітряного проміжку Φ_{δ} за характеристикою намагнічування ярма

$$F_a = F_a(\Phi_{\delta}). \quad (3.13)$$

Магнітну напругу зубця осердя статора визначаємо як функцію магнітної індукції у робочому повітряному проміжку B_{δ} за характеристикою намагнічування зубцевої зони

$$F_z = F_z(B_{\delta}). \quad (3.14)$$

Методика розрахунку (3.12)–(3.14) загальновідома, зокрема функція (3.14) враховує відгалуження магнітного потоку в паз, а для визначення напруженостей магнітного поля в ярмі та зубцях використовуються спеціальні криві намагнічування матеріалів, перераховані за методою [29].

3.1.2. Зовнішня характеристика

Для розрахунку залежності фазної напруги генератора від струму навантаження використано d, q перетворення координат, що дає змогу позбутися залежності потокозчеплень фаз обмотки статора від кута повороту ротора. Задача формулюється для діючих значень фазних напруг та струмів, а рівняння електричної рівноваги не будуть містити похідних по часу. В основу математичного формулювання цієї задачі покладено наступні допущення:

1. Магнітне поле умовно розділене на дві частини — робоче поле та поля розсіювання статора та ротора.
2. Робоче магнітне поле вважається плоскопаралельним.
3. Зубчаста структура осердя статора замінена гладкою, тобто однорідним шаром, характеристика намагнічування якого в радіальному напрямі тотожна характеристиці намагнічування реального зубцевого шару статора.
4. Розташовані в пазах статора провідники обмотки замінені нескінченно тонким шаром, що дотичний до розточки статора та створює гармонічну МРС.
5. Магнітне поле в повітряному проміжку є періодичним і таким, що для довільної пари точок, розташованих на віддалі однієї полюсної поділки, відрізняється лише знаком.

6. Втрати в сталі відсутні.

7. Ярма статора та ротора замінено зосередженими нелінійними магнітними опорами.

Математичне формулювання задачі містить рівняння електричної рівноваги для зведених взаємоортогональних електричних контурів статора:

$$\begin{aligned} -\omega\psi_q + R_p I_d + U_d &= 0; \\ \omega\psi_d + R_p I_q + U_q &= 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

де $\omega = \frac{2\pi p n_n}{60}$ – кутова частота струму в обмотці статора;

n_n – номінальна частота обертання, об/хв;

R_p – активний опір фази статора;

U_d, U_q – амплітуди проекцій фазної напруги на осі рухомої СК d, q ;

I_d, I_q – амплітуди проекцій фазного струму.

Перехід від діючих значень напруги U_p та струму I_p до амплітуд d, q -проекцій здійснюємо за виразами

$$\begin{aligned} U_d &= -\sqrt{2}U_p \sin \Theta; & I_d &= -\sqrt{2}I_p \sin \alpha; \\ U_q &= -\sqrt{2}U_p \cos \Theta; & I_q &= -\sqrt{2}I_p \cos \alpha, \end{aligned} \quad (3.16)$$

де Θ – кут вибігу;

α – кут між струмом та віссю $-q$.

Зв'язок між цими кутами та кутом навантаження φ відображається формулою (рис. 3.4)

$$\alpha = \varphi + \Theta. \quad (3.17)$$

Для отримання виразів проекцій потокозчеплень використано підхід [155]. На повітряний проміжок накладемо одновимірну сітку, що складається з N вузлів. Для кожного вузла шукатиметься значення індукції у проміжку $B_{\delta 1}, \dots, B_{\delta N}$. Тоді проекції повного потокозчеплення контурів статора за осями d, q знаходимо як

$$\begin{aligned} \psi_d &= L_{\sigma d} I_d + C_\psi (B_{\delta 1} \cos \eta_1 + \dots + B_{\delta N} \cos \eta_N); \\ \psi_q &= L_{\sigma q} I_q + C_\psi (B_{\delta 1} \sin \eta_1 + \dots + B_{\delta N} \sin \eta_N), \end{aligned} \quad (3.18)$$

поточним номером n ;

k_δ – коефіцієнт Картера;

F_{z1}, \dots, F_{zN} – магнітні напруги зубців в околі відповідних вузлів розрахункової сітки.

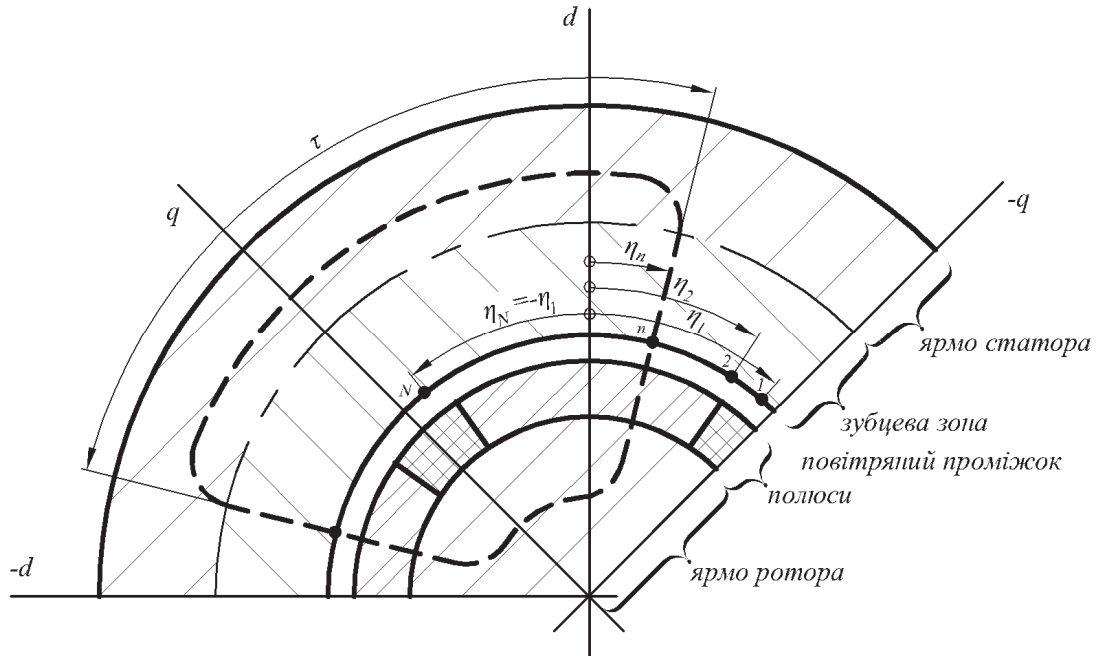


Рис. 3.5. Контур інтегрування до (3.19)

Для врахування потоків розсіювання між полюсами індуктора використовуємо рівняння

$$\Phi_m - \Phi_\delta + \lambda_{\sigma f} (2F_m + F_j) = 0. \quad (3.20)$$

Потік через робочий проміжок визначаємо так:

$$\Phi_\delta = C_\Phi (B_{\delta 1} + \dots + B_{\delta N}), \quad (3.21)$$

де $C_\Phi = \frac{l_\delta \tau}{N}$ – розрахунковий коефіцієнт.

Характеристики намагнічування ділянок магнітопроводу:

$$\begin{aligned} F_m &= F_m(\Phi_m); & F_{z1} &= F_z(B_{\delta 1}); \\ F_j &= F_j(\Phi_m); & \vdots & \\ F_a &= F_a(\Phi_\delta); & F_{zN} &= F_z(B_{\delta N}). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Такому наближенню магнітного кола ВБІМ відповідає заступна схема, показана на рис. 3.6 (позн. F_{dq1}, \dots, F_{dqN} – МРС зведених контурів статора).

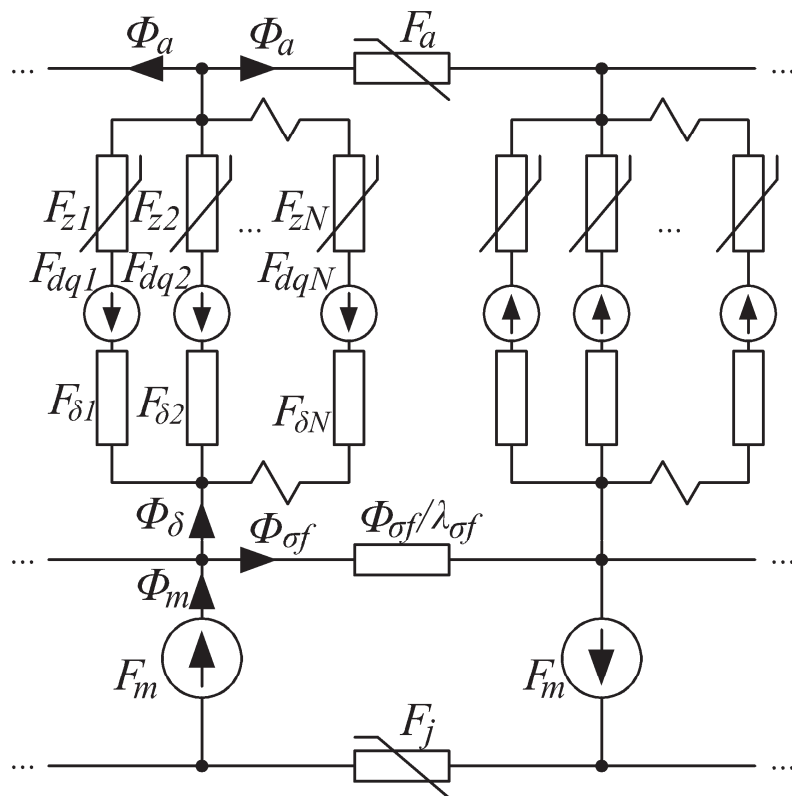


Рис. 3.6. Заступна схема магнітного кола ВБІМ

Система (3.15)–(3.22) складається з $2N + 14$ рівнянь та містить стільки ж невідомих $\psi_d, \psi_q, U_d, U_q, U_p, I_d, I_q, \alpha, \Theta, \Phi_m, \Phi_\delta, B_{\delta 1}, \dots, B_{\delta N}, F_m, F_j, F_a, F_{z1}, \dots, F_{zN}$. Ця система нелінійна внаслідок властивостей (3.22). Значення фазного струму I_p , колової частоти ω та коефіцієнта потужності $\cos \varphi$ вважаємо заданими.

Для зручності та компактності подальшого викладу перейдемо до матричної форми запису. Введемо в обіг наступні об'єкти:

$$\vec{\psi} = \begin{Bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \end{Bmatrix}; \quad \vec{U} = \begin{Bmatrix} U_d \\ U_q \end{Bmatrix}; \quad \vec{I} = \begin{Bmatrix} I_d \\ I_q \end{Bmatrix}; \quad \vec{B}_\delta = \begin{Bmatrix} B_{\delta 1} \\ \vdots \\ B_{\delta N} \end{Bmatrix}; \quad \vec{F}_z = \begin{Bmatrix} F_{z1} \\ \vdots \\ F_{zN} \end{Bmatrix}; \quad \vec{C} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

– вектори розміру 2 потокозчеплень, напруг, струмів; вектори розміру N індукцій в проміжку, магнітних напруг зубцевої зони та одиничний вектор, відповідно;

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R_p & 0 \\ 0 & R_p \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{L}_\sigma = \begin{Bmatrix} L_{\sigma a} & 0 \\ 0 & L_{\sigma a} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

– діагональні матриці активних опорів та індуктивностей розсіювання обмотки статора, та матриці

$$\delta_{\mathbf{r}} = \frac{k_{\delta}}{\mu_0} \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_N); \quad \mathbf{\Omega} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{T} = \begin{vmatrix} \cos \eta_1 & \sin \eta_1 \\ \vdots & \vdots \\ \cos \eta_N & \sin \eta_N \end{vmatrix}; \quad (3.25)$$

$$\mathbf{K}_{\Theta} = \begin{vmatrix} -\sqrt{2} \sin \Theta \\ -\sqrt{2} \cos \Theta \end{vmatrix}; \quad \mathbf{K}_{\alpha} = \begin{vmatrix} -\sqrt{2} \sin \alpha \\ -\sqrt{2} \cos \alpha \end{vmatrix},$$

де $\delta_1, \dots, \delta_N$ – розміри робочого повітряного проміжку у місцях розташування вузлів розрахункової сітки з кутовими координатами η_1, \dots, η_N .

Використовуючи введені позначення (3.23)–(3.25), запишемо формулювання задачі розрахунку усталеного режиму генератора у векторній формі:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega} \vec{\psi} + \mathbf{R} \vec{I} + \vec{U} &= 0; & \vec{U} &= \mathbf{K}_{\Theta} U_p; & \vec{I} &= \mathbf{K}_{\alpha} I_p; \\ \vec{\psi} &= \mathbf{L}_{\sigma} \vec{I} + C_{\psi} T_* \vec{B}_{\delta}; & \alpha &= \varphi + \Theta; \\ -C_H \mathbf{T} \vec{I} + 2F_m \vec{C} + 2\vec{F}_z + 2\delta_{\mathbf{r}} \vec{B}_{\delta} + F_j \vec{C} + F_a \vec{C} &= 0; \\ \Phi_m &= \Phi_{\delta} - \lambda_{\sigma f} (2F_m + F_j); & \Phi_{\delta} &= C_{\Phi} \vec{C} * \vec{B}_{\delta}; \\ F_m &= F_m(\Phi_m); & F_j &= F_j(\Phi_m); \\ F_a &= F_a(\Phi_{\delta}); & \vec{F}_z &= \vec{F}_z(\vec{B}_{\delta}). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Для рішення системи (3.26) методом Ньютона, на l -ій ітерації розв'язуємо лінійну САР, яка після вилучення поправок, що обчислюються за формулами, має вигляд

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{L}_{\sigma} I_p \mathbf{\Omega} \mathbf{K}_{\mathbf{d}\alpha}^{(l-1)} + \mathbf{R} I_p \mathbf{K}_{\mathbf{d}\alpha}^{(l-1)} + U_p^{(l-1)} \mathbf{K}_{\mathbf{d}\Theta}^{(l-1)} \right) \Delta \Theta^{(l)} + \\ &+ \mathbf{K}_{\Theta}^{(l-1)} \Delta U_p^{(l)} + C_{\psi} \mathbf{\Omega} \mathbf{T}_* \overline{\Delta B}_{\delta}^{(l)} = -\vec{Y}_1^{(l-1)}; \\ &-C_H \mathbf{T} \mathbf{K}_{\mathbf{d}\alpha}^{(l-1)} I_p \Delta \Theta^{(l)} + \\ &+ \left[\left(\frac{2R_m^{(l-1)} + R_j^{(l-1)}}{1 + 2\lambda_{\sigma f} R_m^{(l-1)} + \lambda_{\sigma f} R_j^{(l-1)}} + R_a^{(l-1)} \right) C_{\Phi} \vec{C} \vec{C}_* + 2\rho_z^{(l-1)} + 2\delta_{\mathbf{r}} \right] \overline{\Delta B}_{\delta}^{(l)} = -\vec{Y}_2^{(l-1)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

В ній позначено:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{d}\Theta}^{(l-1)} = \frac{d\mathbf{K}_\Theta}{d\Theta} \Big|_{\Theta^{(l-1)}} = \begin{vmatrix} -\sqrt{2} \cos \Theta \\ \sqrt{2} \sin \Theta \end{vmatrix}; \quad \mathbf{K}_{\mathbf{d}\alpha}^{(l-1)} = \frac{d\mathbf{K}_\alpha}{d\alpha} \Big|_{\alpha^{(l-1)}} = \begin{vmatrix} -\sqrt{2} \cos \alpha \\ \sqrt{2} \sin \alpha \end{vmatrix} \quad (3.28)$$

– матриці-стовпці диференційних параметрів, що визначаються за $(l-1)$ -им наближенням кореня;

$$R_m^{(l-1)} = \frac{dF_m}{d\Phi_m} \Big|_{\Phi_m^{(l-1)}}; \quad R_j^{(l-1)} = \frac{dF_j}{d\Phi_m} \Big|_{\Phi_m^{(l-1)}}; \quad R_a^{(l-1)} = \frac{dF_a}{d\Phi_\delta} \Big|_{\Phi_\delta^{(l-1)}} \quad (3.29)$$

– диференційні магнітні опори полюса, ярма ротора та ярма статора, відповідно;

$$\rho_z^{(l-1)} = \frac{d\vec{F}_z}{d\vec{B}_\delta} \Big|_{\vec{B}_\delta^{(l-1)}} = \text{diag}(\rho_{z1}, \dots, \rho_{zN}). \quad (3.30)$$

– матриця диференційних питомих магнітних опорів зубцевої зони;

$$\vec{Y}_1^{(l-1)} = \mathbf{\Omega} \vec{\psi}^{(l-1)} + \mathbf{R} \vec{I}^{(l-1)} + \vec{U}^{(l-1)}; \quad (3.31)$$

$$\vec{Y}_2^{(l-1)} = -C_H \mathbf{T} \vec{I}^{(l-1)} + 2\vec{C} F_m^{(l-1)} + 2\vec{F}_z^{(l-1)} + 2\delta_r \vec{B}_\delta^{(l-1)} + \vec{C} F_j^{(l-1)} + \vec{C} F_a^{(l-1)}.$$

– нев'язки системи (3.27), що обчислюються за $(l-1)$ -им наближенням кореня.

Диференційні опори R_j , R_a та \mathbf{c}_z розраховуються диференціюванням функцій (3.22), які є таблично заданими. Магнітний опір полюса з ПМ вважаємо сталим $R_m = \frac{F_{\max}}{\Phi_{\max}}$.

У матричній формі система (3.27) виглядає так

$$\begin{vmatrix} \mathbf{J}_{11}^{(l-1)} & \mathbf{J}_{12}^{(l-1)} & \mathbf{J}_{13}^{(l-1)} \\ \mathbf{J}_{21}^{(l-1)} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{23}^{(l-1)} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \Delta\Theta^{(l)} \\ \Delta U_p^{(l)} \\ \Delta B_\delta^{(l)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\vec{Y}_1^{(l-1)} \\ -\vec{Y}_2^{(l-1)} \end{vmatrix}, \quad (3.32)$$

де блоки матриці Якобі

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{11}^{(l-1)} &= \mathbf{L}_\sigma I_p \mathbf{\Omega} \mathbf{K}_{\mathbf{d}\alpha}^{(l-1)} + \mathbf{R} I_p \mathbf{K}_{\mathbf{d}\alpha}^{(l-1)} + U_p^{(l-1)} \mathbf{K}_{\mathbf{d}\Theta}^{(l-1)}; \\ \mathbf{J}_{12}^{(l-1)} &= \mathbf{K}_\Theta^{(l-1)}; \\ \mathbf{J}_{13}^{(l-1)} &= C_\psi \mathbf{\Omega} \mathbf{T}_*; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{21}^{(l-1)} &= -C_H \mathbf{TK}_{\mathbf{d}\alpha}^{(l-1)} I_p; \\ \mathbf{J}_{23}^{(l-1)} &= \left(\frac{2R_m^{(l-1)} + R_j^{(l-1)}}{1 + 2\lambda_{\text{of}} R_m^{(l-1)} + \lambda_{\text{of}} R_j^{(l-1)}} + R_a^{(l-1)} \right) C_\Phi \vec{C} \vec{C}^* + 2\rho_z^{(l-1)} + 2\delta_r \end{aligned} \quad (3.33)$$

обчислюються за $(l-1)$ -им наближенням кореня.

Розв'язавши (3.32) відносно поправок невідомих $\Delta\Theta^{(l)}$, $\Delta U_p^{(l)}$, $\overline{\Delta B_\delta^{(l)}}$, l -е наближення кореня обчислюємо як

$$\begin{aligned} \Theta^{(l)} &= \Theta^{(l-1)} + \Delta\Theta^{(l)}; \\ U_p^{(l)} &= U_p^{(l-1)} + \Delta U_p^{(l)}; \\ \overline{B_\delta^{(l)}} &= \overline{B_\delta^{(l-1)}} + \overline{\Delta B_\delta^{(l)}}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Поправка потоку полюса

$$\Delta\Phi_m^{(l)} = \frac{C_\Phi}{1 + 2\lambda_{\text{of}} R_m^{(l-1)} + \lambda_{\text{of}} R_j^{(l-1)}} \vec{C}^* \overline{\Delta B_\delta^{(l)}}, \quad (3.35)$$

й, відповідно, $\Phi_m^{(l)} = \Phi_m^{(l-1)} + \Delta\Phi_m^{(l)}$.

Решта невідомих розраховуємо безпосередньо за формулами

$$\begin{aligned} \alpha^{(l)} &= \varphi + \Theta^{(l)}; \quad \bar{U}^{(l)} = \mathbf{K}_\Theta^{(l)} U_p^{(l)}; \quad \bar{I}^{(l)} = \mathbf{K}_\alpha^{(l)} I_p^{(l)}; \\ \bar{\psi}^{(l)} &= \mathbf{L}_\sigma \bar{I}^{(l)} + C_\psi \mathbf{T}_* \bar{B}_\delta^{(l)}; \quad \Phi_\delta^{(l)} = C_\Phi \vec{C}^* \bar{B}_\delta^{(l)}; \\ F_m^{(l)} &= F_m(\Phi_m^{(l)}); \quad F_j^{(l)} = F_j(\Phi_m^{(l)}); \\ F_a^{(l)} &= F_a(\Phi_\delta^{(l)}); \quad \bar{F}_z^{(l)} = \bar{F}_z(\bar{B}_\delta^{(l)}). \end{aligned} \quad (3.36)$$

За досягнення необхідної та наперед заданої точності обчислення невідомих ітераційна процедура припиняється та фіксується режимна точка зовнішньої характеристики генератора $U_p = U_p(I_p)$ за відомих значень $\varphi = \text{const}$ та $\omega = \text{const}$.

3.1.3. Механічна характеристика

Розрахунок залежності частоти обертання двигуна від моменту на валу проводимо з урахуванням особливостей комутаційного процесу двигуна типу BLDC та за використання 6-тактової комутаційної послідовності (див. п. 1.1, рис. 1.1).

Припустимо, що під струмом перебували фази 1 (U) та 2 (V) (рис. 3.7). Транзистори $VT1$ та $VT5$ знаходилися у відкритому стані, що відповідало такту №1 (див. табл. 1.1). За сигналом давача положення ротора (ДПР) в момент часу, що відповідає кутовому положенню ротора $\gamma = 0$ закривається ключ $VT5$ і відкривається $VT6$. Фаза V відключається від живлення, а фаза W підключається. Це початок такту №2.

Після закривання $VT5$ ЕРС самоіндукції фаз U та V відкриє зворотний діод $VD2$ і струм у цих фазах замикатиметься по контуру $VT1-U-V-VD2$, швидко зменшуючись до нуля. Одночасно наростатиме струм у фазі W . Як тільки струм через $VD2$ зменшиться до нуля, діод закриється. Тривалість цього міжкомутаційного етапу характеризуватиме кут γ_k . Далі почнеться позакомутаційний етап, на якому до джерела живлення через транзистори $VT1$ і $VT6$ послідовно підключені дві фази U та W .

Цим двом етапам міжкомутаційному й позакомутаційному відповідають дві еквівалентні електричні схеми, приведені на рис. 3.7 а,б. Запишемо для них рівняння електричної рівноваги з урахуванням наступних допущень:

1. Магнітнопровід двигуна не насичений.

2. Власні та взаємні індуктивності обмоток сталі та не залежать від кута повороту ротора γ .

3. Комутація ключів відбувається миттєво.

Рівняння рівноваги для схеми на рис. 3.7 а, для $0 < \gamma \leq \gamma_k$:

$$\begin{aligned} e_1 - e_2 - R_p(i_1 - i_2) &= 0; \\ u_{DC} + e_1 - e_3 - R_p(i_1 - i_3) &= 0; \\ i_1 + i_2 + i_3 &= 0, \end{aligned} \quad (3.37)$$

причому

$$e_1 = L_p \frac{di_1}{dt} + M_p \left(\frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt} \right) + k_{w1} w_p \Phi_{\delta p} \frac{d\gamma}{dt}, \quad (3.38)$$

де L_p, M_p – статичні власна та взаємна індуктивності фази двигуна.

Для позакомутаційного етапу (рис. 3.7 б) для $\gamma_k < \gamma \leq \gamma_T$, де $\gamma_T = \pi/3$ – кут

між двома послідовними комутаціями, отримуємо

$$u_{DC} + e_1 - e_3 - R_p(i_1 - i_3) = 0; \quad i_1 + i_3 = 0. \quad (3.39)$$

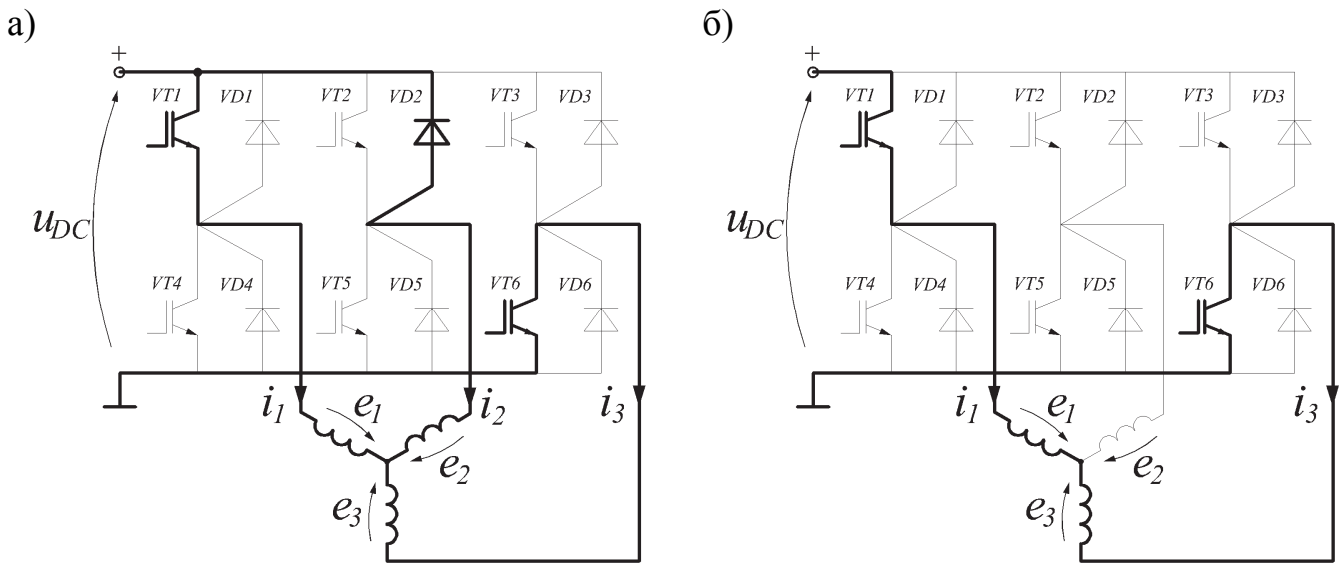


Рис. 3.7. Еквівалентні електричні схеми для режиму BLDC

Розв'язавши системи (3.37) та (3.39) аналітично, знайдено вираз для струму фази в момент $\gamma = \gamma_k$ [99]

$$I_k = \frac{U_{DC} - E_{\Sigma}}{2R_p} \begin{pmatrix} \frac{-\pi}{3T_b} \\ 1 - e^{\frac{-\pi}{3T_b}} \\ 1 - \frac{1}{2}e^{\frac{-\pi}{3T_b}} \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

кут комутації

$$\gamma_k = T_b \ln \left[1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{U_{DC} - E_{\Sigma}}{U_{DC} + E_{\Sigma}} \cdot \frac{1 - e^{\frac{-\pi}{3T_b}}}{1 - \frac{1}{2}e^{\frac{-\pi}{3T_b}}} \right], \quad (3.41)$$

вираз для частоти обертання з урахуванням комутаційних процесів

$$\omega = \frac{U_{DC} \left(1 - \frac{\gamma_k}{\pi} \right) - 2I_p R_p}{C_e \Phi_{\delta}}, \quad (3.42)$$

де $U_{DC} = u_{DC}$ – діюче значення напруги живлення;

$$E_{\Sigma} = C_e \Phi_{\delta} \omega \quad (3.43)$$

– сумарна ЕРС двох, одночасно працюючих фаз;

$$T_b = \frac{L_p + M_p}{R_p} p \omega \quad (3.44)$$

– величина, пропорційна до сталої часу обмотки статора;

$$C_e = \frac{\sin(2\gamma_T/2)}{\sin(\gamma_T/2)} k_{w1} w_p p = \sqrt{3} k_{w1} w_p p \quad (3.45)$$

– «електрична» стала двигуна;

Потік Φ_{δ} в залежності від струму статора I_p знаходимо за алгоритмом з п. 3.1.2, на підставі розв'язання нелінійної САР (3.19)–(3.22), задаючи фазовий кут $\alpha = \pi/2$ (рис. 3.4). Тобто струм статора має лише складову I_d , що відповідає нейтральному налаштуванню ДПР. Будемо вважати, що функція

$$\Phi_{\delta} = \Phi_{\delta}[I_p] \quad (3.46)$$

є відомою.

Розглянемо систему рівнянь (3.40)–(3.44), яка містить дві незалежні змінні Φ_{δ} та I_p , й 5-ть залежних I_k , γ_k , ω , E_{Σ} , T_b . Вона складається з 5-ти рівнянь та, враховуючи (3.46), може вважатися математичним формулюванням задачі розрахунку кутової частоти обертання ω та інших величин за відомого значення струму I_p .

САР (3.40)–(3.44) нелінійна, тому розв'язуємо її методом Ньютона. Для цього вирази (3.40), (3.41) перетворимо на рівняння стандартного типу. Нев'язки цих рівнянь за $(l-1)$ -им наближенням кореня рівні

$$Y_1^{(l-1)} = I_k^{(l-1)} - \frac{U_{DC} - E_{\Sigma}^{(l-1)}}{2R_p} \begin{pmatrix} \frac{-\pi}{3T_b^{(l-1)}} \\ 1 - e^{\frac{-\pi}{3T_b^{(l-1)}}} \\ \frac{-\pi}{3T_b^{(l-1)}} \\ 1 - \frac{1}{2} e^{\frac{-\pi}{3T_b^{(l-1)}}} \end{pmatrix}; \quad (3.47)$$

$$Y_2^{(l-1)} = \frac{\gamma_k^{(l-1)}}{T_b^{(l-1)}} - \ln \left(1 + \frac{3I_k^{(l-1)} R_p}{U_{DC} + E_\Sigma^{(l-1)}} \right). \quad (3.48)$$

Елементи матриці Якобі є такими:

$$J_{11}^{(l-1)} = \left(\frac{2\pi \cdot e^{\frac{-\pi}{3T_b^{(l-1)}}} - 1}{R_p \cdot e^{\frac{-\pi}{3T_b^{(l-1)}}} - 2} + \frac{e^{\frac{-\pi}{3T_b^{(l-1)}}}}{R_p \left(T_b^{(l-1)} \right)^2} \right) \times \frac{I_k^{(l-1)} R_p - U_{DC}}{\left(\pi + \gamma_k^{(l-1)} \right)^2};$$

$$J_{12}^{(l-1)} = 1;$$

$$J_{21}^{(l-1)} = \frac{1}{T_b^{(l-1)}} - \left(\frac{2p\pi\gamma_k^{(l-1)}(L_p + M_p)}{C_e\Phi_\delta R_p \left(T_b^{(l-1)} \right)^2} - \frac{6\pi I_k^{(l-1)} R_p}{\left(U_{DC} + E_\Sigma^{(l-1)} \right)^2 + 3I_k^{(l-1)} R_p \left(U_{DC} + E_\Sigma^{(l-1)} \right)} \right) \frac{I_k^{(l-1)} R_p - U_{DC}}{\left(\pi + \gamma_k^{(l-1)} \right)^2};$$

$$J_{22}^{(l-1)} = \frac{-3R_p}{U_{DC} + E_\Sigma^{(l-1)} + 3I_k^{(l-1)} R_p}. \quad (3.49)$$

У матричній формі лінійна САР, породжувана нелінійною, на l -ій ітерації методу Ньютона має вигляд

$$\begin{Bmatrix} J_{11}^{(l-1)} & J_{12}^{(l-1)} \\ J_{21}^{(l-1)} & J_{22}^{(l-1)} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \Delta I_k^{(l)} \\ \Delta \gamma_k^{(l)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Y_1^{(l-1)} \\ -Y_2^{(l-1)} \end{Bmatrix}. \quad (3.50)$$

Розв'язавши (3.50) відносно поправок невідомих $\Delta I_k^{(l)}$, $\Delta \gamma_k^{(l)}$, l -е наближення кореня обчислюємо як

$$I_k^{(l)} = I_k^{(l-1)} + \Delta I_k^{(l)}; \quad \gamma_k^{(l)} = \gamma_k^{(l-1)} + \Delta \gamma_k^{(l)}. \quad (3.51)$$

Решта невідомих розраховуємо безпосередньо за формулами

$$\omega^{(l)} = \frac{U_{DC} \left(1 - \frac{\gamma_k^{(l)}}{\pi} \right) - 2I_p R_p}{C_e \Phi_\delta}; \quad E_\Sigma^{(l)} = C_e \Phi_\delta \omega^{(l)}; \quad T_b^{(l)} = \frac{L_p + M_p}{R_p} p \omega^{(l)}. \quad (3.52)$$

Електромагнітний момент визначаємо як незалежну змінну

$$M_e = C_m \Phi_\delta I_p, \quad (3.53)$$

де

$$C_m = \frac{6\sqrt{3}k_{w1}w_p p}{2\pi} \quad (3.54)$$

– «машинна» стала двигуна.

За досягнення необхідної та наперед заданої точності обчислення невідомих, ітераційна процедура припиняється, та фіксується режимна точка механічної $\omega = \omega(M_e)$ або електромеханічної характеристики двигуна $\omega = \omega(I_p)$ за відомого значення $U_{DC} = \text{const}$.

3.2. Втрати та ККД

Висновок про ефективність процесу перетворення енергії у ВБПМ можна зробити лише після адекватного розрахунку та систематизації усіх видів втрат. Усвідомлюючи виняткову важливість цього етапу для ВДПМ, розглянемо детально всі особливості розрахункового аналізу втрат у машині.

3.2.1. Основні та додаткові втрати в обмотці статора

Основні втрати в міді обмотки статора традиційно рівні

$$P_{Cu} = m I_p^2 R_p. \quad (3.55)$$

Для розрахунку додаткових втрат в обмотці, спочатку обчислюємо значення функцій Емде

$$\varphi(\xi) = \xi \frac{\text{sh}(2\xi) + \sin(2\xi)}{\text{ch}(2\xi) - \cos(2\xi)}; \quad \psi(\xi) = 2\xi \frac{\text{sh}(\xi) - \sin(\xi)}{\text{ch}(\xi) + \cos(\xi)}, \quad (3.56)$$

де ξ – зведена висота елементарного провідника

$$\xi = h_p m_r \sqrt{\frac{\omega \mu_0 m_c b_p}{2 \rho_{Cu} b_s}}; \quad (3.57)$$

h_p, b_p – розміри провідника (рис. 3.8);

b_s – ширина паза;

$m_r = \frac{h_{sz} - 1.1h_{sh} - 2t_{kt}}{u_s h_p}$ – кількість елементарних провідників за висотою одного ефективного;

ефективного;

$m_c = \frac{n_{el}}{m_r}$ – кількість елементарних провідників за шириною паза;

u_s – кількість ефективних провідників у пазу;

n_{el} – кількість елементарних провідників в ефективному;

h_{sz} – повна висота паза;

h_{sh} – висота шліца паза;

t_{kt} – товщина пазової ізоляції.

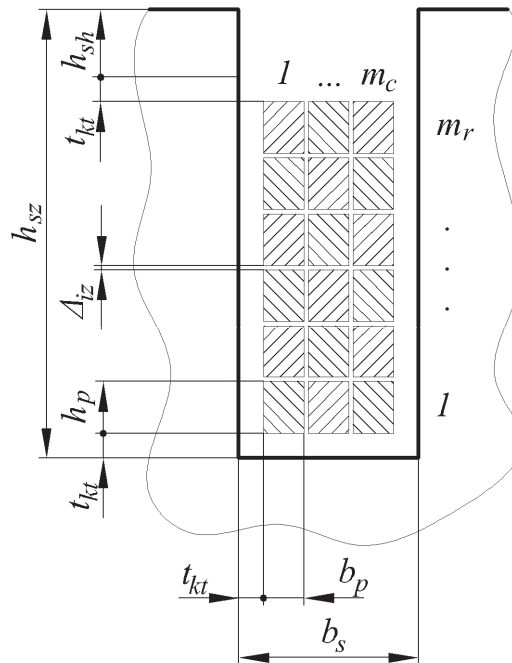


Рис. 3.8. Позначення розмірів у формулі (3.57)

Для провідників круглого перетину, що розташовуються в трапецієподібних

пазах (рис. 3.1, *a*), пропонуємо прийняти $h_p = b_p = d_p$.

Наближене значення коефіцієнта Фільда, отриманого усередненням значень для всіх елементарних провідників, визначаємо як

$$K_R = \varphi(\xi) + \frac{u_{sh}^2 - 1}{3} \psi(\xi). \quad (3.58)$$

Для багатовиткових котушкових обмоток, у яких усі провідники в пазу сполучені послідовно, по кожному з них протікає однаковий струм, й $n_{el} = 1$, u_{sh} дорівнюватиме кількості ефективних провідників за висотою котушки. Для стрижневих та котушкових обмоток з паралельним сполученням елементарних провідників в ефективному ($n_{el} > 1$) u_{sh} дорівнюватиме 1 або 2, в залежності від кількості шарів обмотки. Помічено, що вираз (3.58) в цьому випадку даватиме значну похибку (>30%) у визначенні K_R .

Отже, додаткові втрати в міді обмотки статора попередньо становлять

$$P_{Cu|a} = P_{Cu} \left[\frac{2l_1}{l_{wz}} (K_R - 1) \right], \quad (3.59)$$

де l_1 – повна конструкційна довжина осердя статора;

l_{wz} – середня довжина витка обмотки.

Безперечно, що ефект витіснення струму також проявляє себе й у лобових частинах обмотки статора. Враховуючи, що інтенсивність магнітного поля в цих зонах істотно нижча, ніж у пазовій частині, прийнято допущення про нехтування цією часткою додаткових втрат.

Варто зауважити, що за використання двошарових обмоток у частині пазів струм верхнього шару буде мати фазовий зсув по відношенню до струму в нижньому шарі. Це призводитиме до певного зменшення K_R , але запропонована нами методика його визначення цю обставину не враховує.

Розрахунок додаткових втрат за (3.59) дозволяє провести попередню оцінку правильності вибору розмірів елементарного провідника, розмірів паза та, за необхідності, провести корегування їх значень. Аналіз явища виявив низку чинників, що спричиняють визначальний вплив на величину $P_{Cu|a}$. Найбільш

істотним серед них є рівень насичення зубцевої зони, який, вочевидь, залежить від основного потоку індуктора. Чим вищий рівень насичення, тим більша частина магнітного потоку проникатиме із зубця в паз, змінюючи як на якісному, так і на кількісному рівнях картину перебігу процесу витіснення струму. Зрозуміло, що жодними аналітичними підходами врахувати такий вплив неможливо в принципі.

Нами розроблено математичну модель для розрахунку додаткових втрат в обмотці ВБПМ на підставі розподілу поля вектора густини струму в провідниках обмотки, які знаходяться у феромагнітному пазу довільної форми та пронизуються стороннім магнітним полем заданої інтенсивності. Модель враховує спосіб сполучення ефективних та елементарних провідників у пазу та насичення магнітопроводу [258]. Ця польова задача формулюється у двовимірній постановці.

Розрахункова область моделі представляє собою зубцеву поділку осердя статора (рис. 3.9). Крайова умова формалізована виразами, що дозволяють конфігурувати магнітне поле індуктора так, щоби це відповідало уявленням про ймовірний розподіл цього поля в осерді статора.

Поле збудження задається лінійним розподілом векторного потенціалу вздовж верхньої горизонталі

$$A_z[x, t] \Big|_{y=h_{sz}+\delta} = \frac{B_\delta}{\beta} \sin(\omega t + \beta x + \nu), \quad (3.60)$$

де $\beta = \pi/\tau$ – коефіцієнт пропорційності між координатою точки у кутових та лінійних одиницях вимірювання;

ν – фазовий зсув між струмом ефективного провідника та радіальними складовими вектора $\overline{B_\delta}$ вздовж координати x .

За відсутності даних про цей зсув прийнято $\nu = \pi/2$ (див. рис. 3.4 за умови, що $\cos \varphi = 1$). Решта позначень та розмірів зрозумілі з рисунку.

Лінії, що обмежують лівий та правий краї розрахункової області підпорядковані умові Діріхле (2.43):

$$A_z[t] \Big|_{x=-0,5t_s} = \frac{B_\delta}{\beta} \sin(\omega t - 0,5t_s \beta + \nu); \quad A_z[t] \Big|_{x=0,5t_s} = \frac{B_\delta}{\beta} \sin(\omega t + 0,5t_s \beta + \nu). \quad (3.61)$$

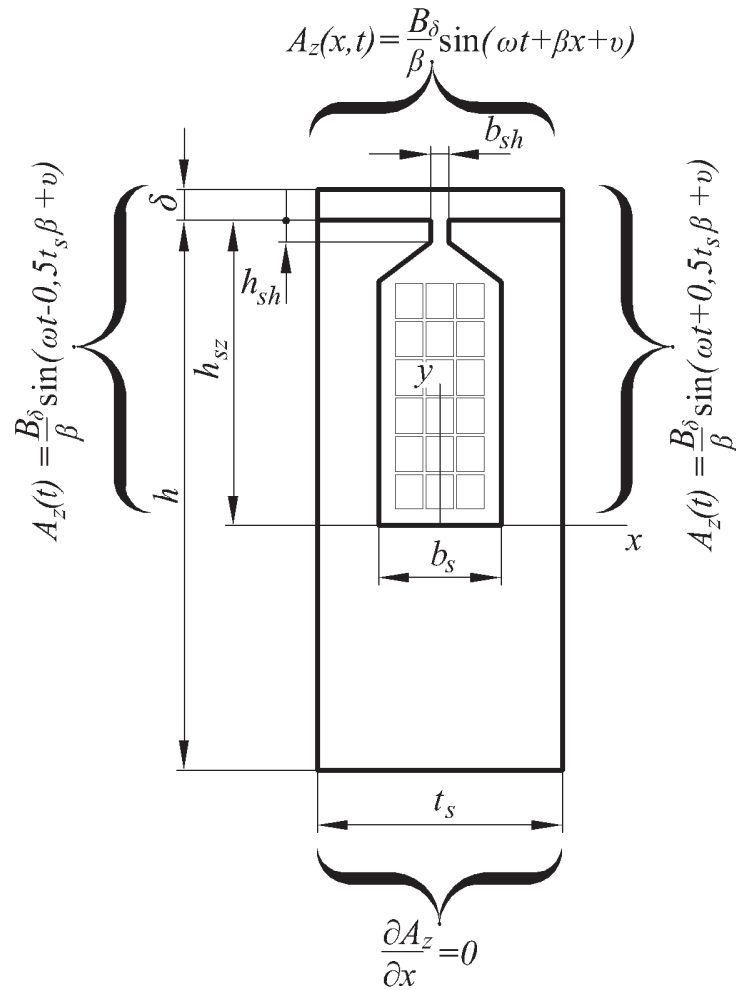


Рис. 3.9. Розрахункова область

Вузли на зовнішній твірній магнітопроводу статора підпорядковані умові Неймана (2.44):

$$\left. \frac{\partial A_z}{\partial x} \right|_{y=h_{sz}-h} = 0. \quad (3.62)$$

Вимушуючими силами в даній задачі є струм ефективного провідника, розташованого в пазу, та максимальне значення індукції у повітряному проміжку.

Спосіб сполучення елементарних та ефективних провідників задається коловим рівнянням за 1-м законом Кірхгофа (рис. 3.10):

$$i_{\Sigma} = \sum_{n=1}^{n_{el}} i_{jn}, \quad (3.63)$$

де $n = \overline{1, n_{el}}$ – поточний номер елементарного провідника (n_{el} – кількість елементарних провідників у ефективному);

i_{Σ} , i_{jn} – струми ефективного провідника (заданий) та елементарних (шукані), що належать j -му ефективному провіднику, причому

$$i_{jn} = \int_S \bar{J} dS = \iint_S J_z[x, y] dx dy = \sum_{e=1}^E \frac{S^{[e]}}{K} \sum_{k=1}^K J_{zk}^{[e]}, \quad (3.64)$$

$e = \overline{1, E}$ – поточний номер СЕ;

$k = \overline{1, K}$ – поточний номер вузла СЕ;

$S^{[e]}$ – площа СЕ з номером $[e]$;

$J_{zk}^{[e]}$ – вузлове значення z -проекції вектора густини струму.

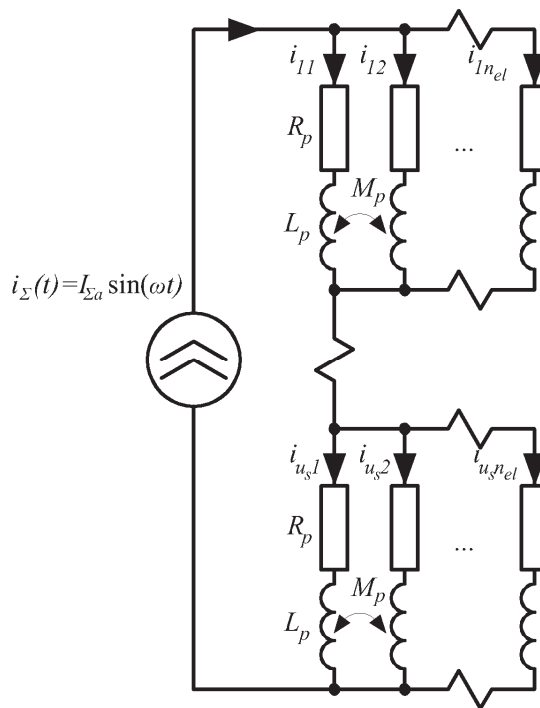


Рис. 3.10. Електрична схема сполучень провідників у пазу

Рівняння (2.54) разом з (3.63), (3.64) та крайовою умовою (3.60)–(3.62) відображають сутність математичного формулювання задачі розрахунку поля густини струму у провідниках зі струмом, що розташовані в феромагнітному пазу довільної форми та знаходяться у сторонньому магнітному полі заданої інтенсивності.

Для перевірки адекватності цієї моделі здійснено порівняння результатів

розрахунку розподілу струмів та втрат у семи елементарних провідниках, сполучених паралельно та розташованих у прямокутному відкритому пазу, з аналогічним розподілом, отриманим аналітичним коловим методом, описаним у [292]. Для коректності порівняння задача формулюється як лінійна та без урахування радіального поля ($B_\delta = 0$).

Розміри розрахункової області наступні (позначення див. рис. 3.8, рис. 3.9):

- ширина паза $b_s = 19$ мм ;
- повна висота паза $h_{sz} = 32,2$ мм ;
- ширина області (зубцева поділка) $t_s = 38,0$ мм ;
- висота області $h = 96,6$ мм ;
- довжина області в z - напрямі $l_p = 700,0$ мм ;
- ширина шліца $b_{sh} = b_s$;
- висота шліца $h_{sh} = 2,2$ мм ;
- повітряний проміжок $\delta = 4$ мм ;
- ширина елементарного провідника $b_p = 15,0$ мм ;
- висота елементарного провідника $h_p = 3,9$ мм ;
- товщина корпусної ізоляції (одностороння) $t_{kt} = 2$ мм ;
- товщина ізоляції між провідниками $\Delta_{iz} = 0,1$ мм .

Обмоткові дані:

- кількість ефективних провідників у пазу $u_s = 1$;
- кількість елементарних провідників у ефективному $n_{el} = 7$;
- кількість елементарних провідників за шириною паза $m_c = 1$;
- кількість елементарних провідників за висотою паза $m_r = 7$.

Вимушуючі сили задачі:

- діюче значення струму ефективного провідника $I_\Sigma = 1200$ А ;
- частота струму $f_H = 75$ Гц .

Питомий опір матеріалу провідника $\rho_{Cu} = 2,28 \cdot 10^{-8}$ Ом·м, що відповідає міді, нагрітої до 100°C .

Розрахунок проводився протягом 8 періодів струму живлення, крок по часу становить $1/80$ періоду.

Результати розрахунку полів векторного потенціалу, індукції та густини струму для моменту часу $t = 0,1065$ с показані у вигляді растрових зображень на рис. 3.11. Про рівень дискретизації розрахункової області можна судити за рис. 3.11 а, кількість СЕ – 2804, кількість вузлів — 8614. На рис. 3.12 показані залежності струмів окремих елементарних провідників від часу наприкінці часового діапазону — усталене значення.

Обробка результатів розрахунку поля вектора густини струму та втрат в елементарних провідниках полягала у визначенні діючих значень цих величин

$$I_{jn} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} i_{jn}^2 dt} = \sqrt{f_n \Delta t \sum_{k=k_1}^{k_1+T/\Delta t} i_{jnk}^2}, \quad (3.65)$$

$$P_{jn} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} p_{jn}^2 dt} = \sqrt{f_n \Delta t \sum_{k=k_1}^{k_1+T/\Delta t} p_{jnk}^2}, \quad (3.66)$$

де k – поточний номер кроку інтегрування (k_1 – номер кроку, що відповідає початку розрахункового періоду);

i_{jn} – миттєве значення струму елементарного провідника за (3.64);

p_{jn} – миттєве значення втрат у елементарному провіднику за (3.120);

$T, \Delta t$ – часовий період та величина кроку інтегрування по часу, відповідно.

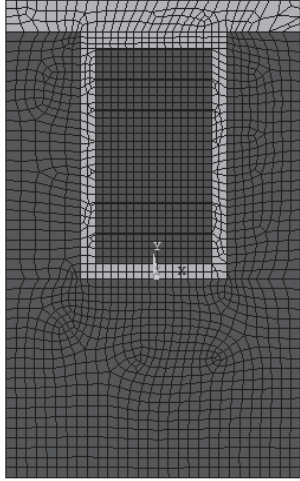
Для коректності порівняння отриманих результатів з результатами, опублікованими у [292], втрати потужності визначалися як

$$P_{jn} = I_{jn}^2 R_{DC}, \quad (3.67)$$

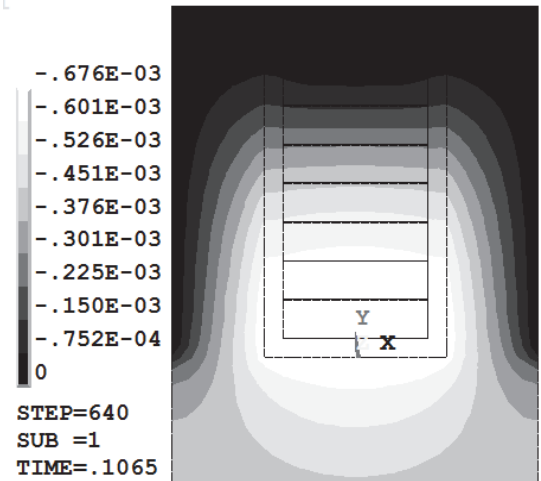
де $R_{DC} = \rho_{Cu} \frac{l_p}{b_p h_p}$ – електричний опір елементарного провідника постійному

струму ($R_{DC} = 2,728 \times 10^{-2}$ Ом).

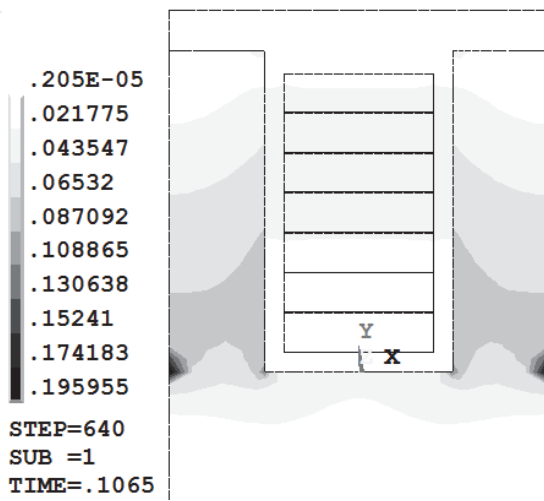
а)



б)



в)



г)

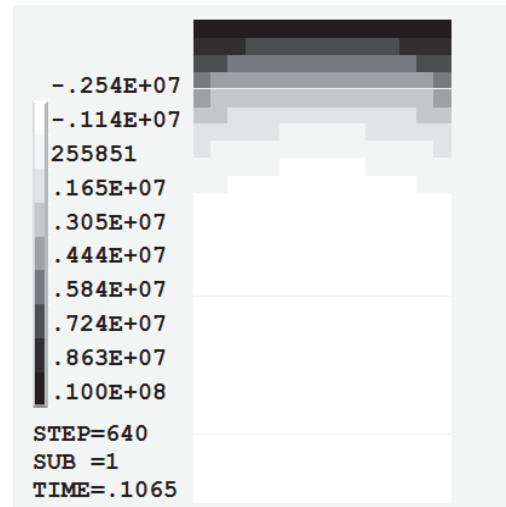


Рис. 3.11. Результати розрахунку: а) скінченно-елементна модель; б) поле векторного магнітного потенціалу, Вс/м; в) поле вектора магнітної індукції, Тл; г) поле вектора густини струму, А/м²

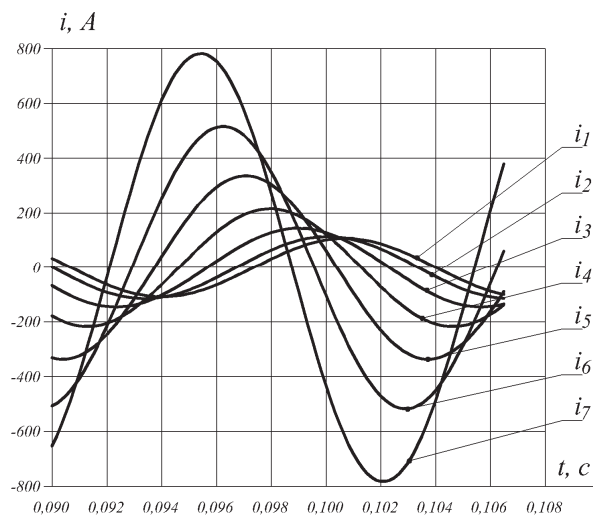


Рис. 3.12. Залежності від часу струмів елементарних провідників

Результати обробки даних математичного експерименту представлені у табл. 3.3. Зазначимо, що сумарні електричні втрати на постійному струмі для цієї задачі становлять 56,123 Вт, а коефіцієнт Фільда — $K_R = 3,288$.

Порівняльний аналіз результатів (табл. 3.3) демонструє високу точність запропонованої моделі й дає підстави сподіватися на її адекватність за розрахунку втрат у пазовій частині обмотки статора ВБПМ з урахуванням усіх раніше перерахованих чинників.

Таблиця 3.3

Порівняння варіантів розрахунку струмів та втрат у задачі [292]

№ про- відн. <i>n</i>	Струм за [292], А	Струм за (3.65), А	ε^* , %	Втрати за [292], Вт	Втрати за (3.67), Вт	ε^* , %	Втрати за (3.66), Вт
1	78,33	76,329	2,6	1,62	1,5895	1,9	1,9488
2	82,41	81,046	1,7	1,80	1,7920	0,45	2,2096
3	103,91	102,72	1,2	2,88	2,8788	0,04	3,5832
4	155,28	153,19	1,4	6,40	6,4020	0,03	7,9989
5	241,46	237,93	1,5	15,5	15,445	0,36	19,278
6	370,80	365,56	1,4	36,4	36,457	0,16	45,441
7	561,74	553,40	1,5	83,7	83,552	0,18	104,06
Сума	1200	1200	-	148,3	148,11	0,12	184,52

Примітка. * – розбіжність результатів

Взаємозв'язок впливів поля збудження та поля розсіювання на додаткові втрати вивчався за допомогою математичних експериментів. Досліди мали за мету кількісну оцінку впливу на розподіл густини струму в пазовій частині стрижнів:

- 1) лише потоку розсіювання;
- 2) потоку розсіювання та основного магнітного потоку;
- 3) потоку розсіювання, основного магнітного потоку та насичення магнітопроводу у взаємозв'язку всіх цих чинників.

У подальшому викладі, для скорочення запису, будемо посилатися на ці досліді за їх порядковими номерами.

Вхідними даними для моделювання слугували розміри, обмоткові дані та характеристика намагнічування матеріалу осердя високошвидкісного генератора потужністю 220 кВт та частотою обертання 50000 об/хв.

Розміри розрахункової області наступні (позначення див. на рис. 3.8, рис. 3.9):

$b_s = 7,8$ мм; $h_{sz} = 16,8$ мм; $t_s = 15,6$ мм; $h = 63,84$ мм; $l_p = 240,0$ мм; $b_{sh} = 2,2$ мм; $h_{sh} = 1,5$ мм; $\delta = 6$ мм; для провідника круглого перетину прийнято $b_p = 1,0$ мм та $h_p = 1,0$ мм; $t_{kt} = 0,4$ мм; $\Delta_{iz} = 0,2$ мм.

Обмоткові дані: $u_s = 2$; $n_{el} = 30$; $m_c = 6$; $m_r = 5$.

Вимушуючі сили задачі: $I_\Sigma = 175,4$ А; $f_H = 833,3$ Гц; амплітуда радіальної складової індукції основного поля $B_\delta = 0,72$ Тл; фазовий зсув між струмом та радіальною складовою індукції $\nu = \pi/2$ рад; коефіцієнт пропорційності між кутовими та метричними координатами $\beta = 14,54$ рад/м.

Питомий опір матеріалу провідника становив $\rho_{Cu} = 1,7544 \cdot 10^{-8}$ Ом·м, що відповідає міді, нагрітій до 20° С. Характеристика намагнічування магнітопроводу відповідає властивостям електротехнічної сталі типу 2411 (ГОСТ 21427.2-83).

Розрахунок проводився протягом 6 періодів струму живлення, крок по часу становив $1/80$ періоду. Сітка скінченно-елементної моделі містить 8670 вузлів. Загальна кількість СЕ — 3002.

На рис. 3.13 показані результати розрахунків полів векторного магнітного потенціалу, індукції магнітного поля та густини струму для 1-го (рис. 3.13 а,б,в) та 3-го (рис. 3.13 г,д,е) дослідів, в моменти часу $t = 7,185$ мс та $t = 7,05$ мс, відповідно.

На рис. 3.14 показано залежності струмів від часу, обчислених за (3.64). Графіки на рис. 3.14 а,б відповідають досліді №1, а на рис. 3.14 в,г — досліді №3. Рис. 3.14 а,в містить струми елементарних провідників розташованих у 3-му зліва стовпці, у стрижні, що перебуває на дні паза, а рис. 3.14 б,г — у 3-му зліва стовпці стрижня, що знаходиться в околі шліца.

Діючи значення цих струмів, втрат та коефіцієнта K_R для всіх трьох проведених дослідів записані у табл. 3.4. Зауважимо, що у цьому випадку коефіцієнт Фільда, розрахований за (3.58) становить $K_R = 3,8$.

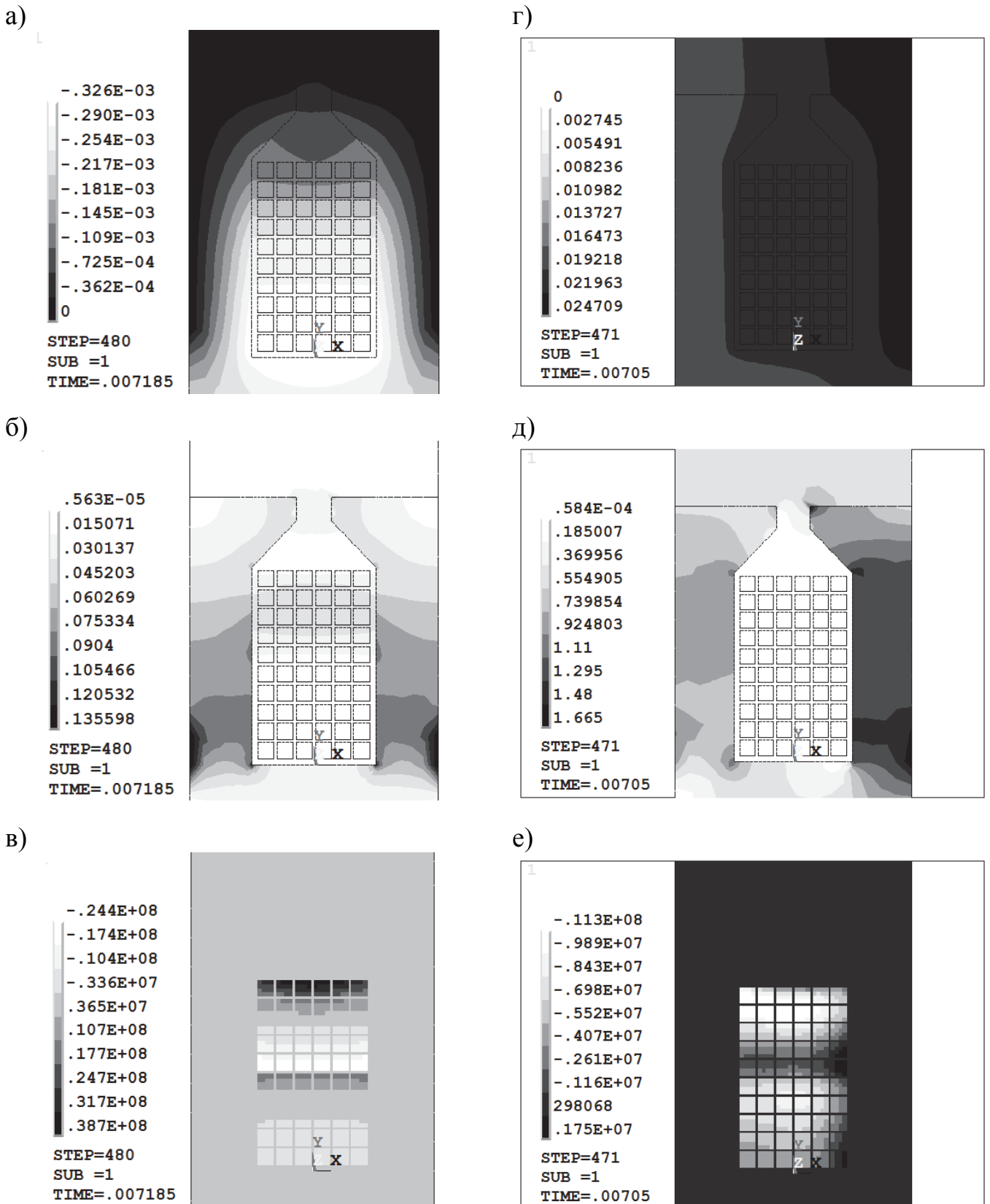


Рис. 3.13. Результати розрахунку: а), б), в) дослід №1; г), д), е) дослід №3; а), г) поле векторного магнітного потенціалу, Вс/м; б), д) поле вектора магнітної індукції, Тл; в), е) поле вектора густини струму, А/м²

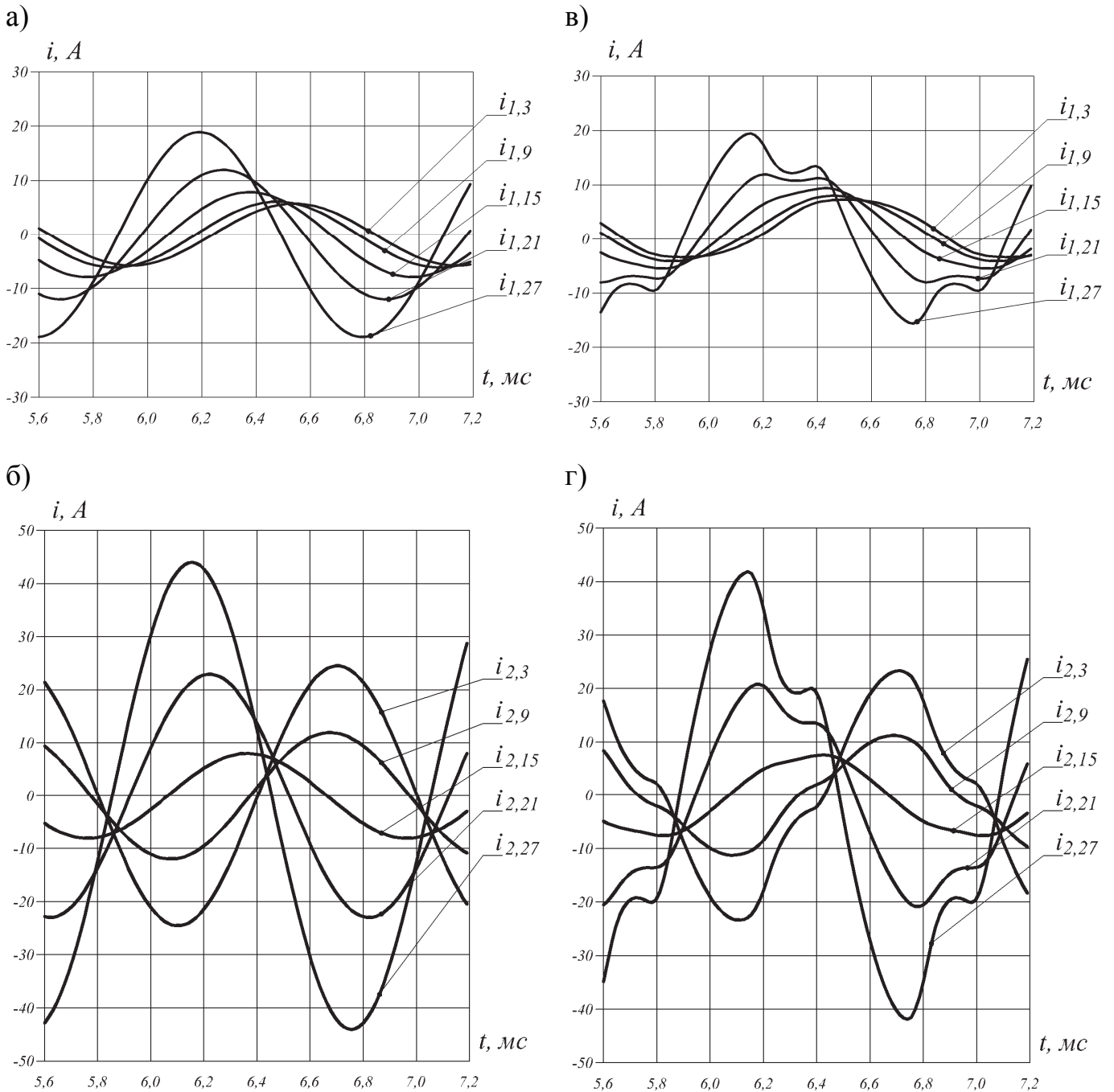


Рис. 3.14. Залежності від часу струмів елементарних провідників, А:

а), б) дослід №1; в), г) дослід №3;

а), в) стрижень на дні паза; б), г) стрижень в околі шліца;

З порівняння отриманих результатів видно, що у напівзакритих пазах зовнішнє поле збудження практично не впливає на перерозподіл поля вектора густини струму й струмів у елементарних провідниках. Натомість, насичення магнітопроводу основним магнітним полем у взаємозв'язку з полем пазового розсіювання зменшує провідність шляхів потоку, робить розподіл струмів більш

рівномірним і, як наслідок, зменшує додаткові втрати в стрижнях. Але не слід забувати, що надмірне насичення зубцевої зони збільшує основні втрати в матеріалі осердя статора.

Таблиця 3.4

Вплив різних чинників на ефект витіснення струму у пазу

Назва показника	Дослід №1 ¹	Дослід №2 ²	Дослід №3 ³
Ефективний провідник в околі дна паза			
$I_{1,3}, A$	4,076	4,046	4,001
$I_{1,9}, A$	4,328	4,306	4,306
$I_{1,15}, A$	5,569	5,560	5,327
$I_{1,21}, A$	8,477	8,474	7,602
$I_{1,27}, A$	13,387	13,384	11,602
Основні втрати (DC), Вт	4,318	4,318	4,318
Повні втрати (AC), Вт	10,132	10,133	9,417
Ефективний провідник в околі шліца паза			
$I_{2,3}, A$	17,342	17,346	14,948
$I_{2,9}, A$	8,457	8,465	7,471
$I_{2,15}, A$	5,686	5,653	5,434
$I_{2,21}, A$	16,231	16,159	14,141
$I_{2,27}, A$	31,130	30,981	26,889
Основні втрати (DC), Вт	4,318	4,318	4,318
Повні втрати (AC), Вт	46,198	46,206	37,367
Для всіх провідників у пазу			
Основні втрати (DC), Вт	8,636	8,636	8,636
Повні втрати (AC), Вт	56,329	56,339	46,785
Коефіцієнт Фільда	6,523	6,524	5,418

Примітки. 1 – вплив лише потоку пазового розсіювання, матеріал осердя з лінійною характеристикою намагнічування; 2 – вплив потоку розсіювання та основного потоку індуктора, матеріал осердя лінійний; 3 – вплив потоку розсіювання, основного потоку індуктора та насичення осердя.

3.2.2. Основні та додаткові втрати в магнітопроводі

Як зазначалося в п. 1.2, для визначення основних втрат нами обрано методику [68], яка має низку переваг над традиційною.

Отже, основні втрати в матеріалі ярма статора становлять

$$P_a = k_a \left[p_{hn} \left(\frac{f_H}{f_n} \right) \left(\frac{B_a}{B_n} \right)^{\alpha_h} + p_{en} \left(\frac{f_H}{f_n} \right)^2 \left(\frac{B_a}{B_n} \right)^2 \left(\frac{t_l}{t_{nl}} \right) k_{\xi} + p_{dn} \left(\frac{f_H}{f_n} \right)^{\alpha_f} \left(\frac{B_a}{B_n} \right)^{\alpha_d} \left(\frac{t_l}{t_{nl}} \right) \right] m_a, \quad (3.68)$$

а в зубцях —

$$P_z = k_z \left[p_{hn} \left(\frac{f_H}{f_n} \right) \left(\frac{B_z}{B_n} \right)^{\alpha_h} + p_{en} \left(\frac{f_H}{f_n} \right)^2 \left(\frac{B_z}{B_n} \right)^2 \left(\frac{t_l}{t_{nl}} \right) k_{\xi} + p_{dn} \left(\frac{f_H}{f_n} \right)^{\alpha_f} \left(\frac{B_z}{B_n} \right)^{\alpha_d} \left(\frac{t_l}{t_{nl}} \right) \right] m_z, \quad (3.69)$$

де k_a , k_z — технологічні коефіцієнти, що залежать від способу обробки листів шихтованого осердя (для синхронних машин $k_a = 1,2 \div 1,3$; $k_z = 1,6 \div 1,9$ [49, 138]);

f_H , f_n — частоти перемагнічування, відповідно номінальна та нормуюча¹, за якої визначені питомі втрати в матеріалі;

B_a , B_z , B_n — амплітуди магнітної індукції, відповідно в ярмі, зубцях та нормуюча¹, за якої визначені питомі втрати в матеріалі;

t_l , t_{nl} — товщини листів шихтованого осердя, відповідно дійсна та нормуюча¹, за якої визначені питомі втрати в матеріалі;

p_{hn} , p_{en} , p_{dn} — частини питомих втрат у матеріалі магнітопровода, за нормованих значень частоти, індукції та товщини листа, обумовлені, відповідно гістерезисом, вихровими струмами та додатковими чинниками,

$$p_{hn} = \beta_h p_n; \quad p_{en} = \frac{(2k_f f_n B_n t_l)^2}{3\rho_m \gamma_m}; \quad p_{dn} = p_n - (p_{hn} + p_{en}); \quad (3.70)$$

k_f — коефіцієнт форми поля;

β_h — відносна частка втрат на гістерезис у загальних втратах (для гарячекатаних сталей — $0,6 \div 0,75$, холоднокатаних — $0,25 \div 0,35$ [50]);

p_n — повні питомі втрати у матеріалі, визначені за нормованих значень частоти, індукції та товщини листа;

¹ Типові нормовані значення частоти — 50 Гц, 400 Гц; індукції — 0,75 Тл, 1,0 Тл, 1,5 Тл; товщини листа — 0,28 мм, 0,5 мм, 0,65 мм, [43]

ρ_m, γ_m – питомий електричний опір матеріалу та його густина, відповідно;

m_a, m_z – маси ярма та зубців, відповідно.

k_ξ – коефіцієнт, що враховує вплив ефекту витіснення струму,

$$k_\xi = \frac{3 \operatorname{sh}(\xi) - \sin(\xi)}{\xi \operatorname{ch}(\xi) - \cos(\xi)}; \quad (3.71)$$

ξ – зведена товщина листа,

$$\xi = t_l \sqrt{\frac{\pi \cdot f_H \cdot \mu_0 \mu_r}{\rho_{Fe}}}; \quad (3.72)$$

μ_r – відносна магнітна проникність матеріалу осердя за розрахункового значення індукції (визначається на підставі кривої намагнічування матеріалу);

α_h, α_d – показники степенів у (3.68), (3.69) визначаються формулою

$$\alpha = \alpha' + \frac{4(\alpha' - 2)}{\lg(B)}, \quad (3.73)$$

у яку замість α' належить підставити відповідні інтерпольовані значення α'_h та α'_d , отримані на підставі табличних даних з [68]

$$\begin{aligned} \alpha'_h &= 2,1524 - 0,4738B + 1,0219 \frac{B^2}{2} - 1,1579 \frac{B^3}{6}; \\ \alpha'_d &= 2,0987 - 0,4026B + 1,1629 \frac{B^2}{2} - 1,5724 \frac{B^3}{6}, \end{aligned} \quad (3.74)$$

а B замінити розрахунковим значенням індукцій B_a або B_z .

Показник α_f розраховується безпосередньо за своєю інтерполянтою

$$\alpha_f = 1,5858 + 0,3316B - 1,9705 \frac{B^2}{2} + 4,5474 \frac{B^3}{6}. \quad (3.75)$$

Отже, основні втрати в магнітопроводі — це сума

$$P_{Fe} = P_a + P_z. \quad (3.76)$$

До додаткових втрат в магнітопроводі ВБІМ нами віднесено лише поверхневі та пульсаційні втрати у полюсах індуктора, спричинені просторовою гармонікою поля зубцевого порядку.

Пропонуємо методику аналітичного розрахунку цих втрат, яка, на нашу

думку, має тверде теоретичне підґрунтя у вигляді фундаментальних рівнянь електромагнітного поля та полягає у розв'язанні рівняння Гельмгольца.

На підставі закону повного струму, закону електромагнітної індукції в квазістаціонарному наближенні, рівняння (2.50) та припускаючи лінійний зв'язок між \bar{B} та \bar{H} , отримуємо в термінах векторного магнітного потенціалу \bar{A} ($\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$) рівняння Гельмгольца

$$\nabla^2 \bar{A} = \sigma \mu \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \nabla U \right). \quad (3.77)$$

За умови зміни потенціалу в часі за гармонічним законом, перейдемо до комплексних амплітуд

$$\nabla^2 \bar{A} = K^2 \bar{A}, \quad (3.78)$$

де $K^2 = \alpha^2 + \beta^2$ – комплексна стала, причому $\alpha = (1 + j)\xi$,

$$\xi = \sqrt{\frac{\omega_s \sigma \mu_0 \mu_r}{2}} \text{ – величина, обернена до глибини проникнення поля;}$$

$$\omega_s = \frac{2\pi n_p Z}{60} \text{ – колова частота зубцевої пульсації поля;}$$

Z – кількість пазів статора;

β – дійсна стала (в подальшому викладі $\beta = 2\pi / t_s$ – період зубцевої гармоніки поля).

Зауважимо, що «риска» в позначенні означає приналежність до векторів з евклідового простору, а «крапка» — до векторів у комплексній площині.

Розташуємо систему координат по відношенню до електропровідного напівпростору так, що потенціал на поверхні розділу середовищ з $\sigma = 0$ та $\sigma \gg 0$ змінюється за гармонічним законом у площині xOz (рис. 3.15).

Загальний розв'язок цього рівняння за умови двовимірного розподілу z -проекції векторного магнітного потенціалу рівний

$$\dot{A}_z = \left(C_1 e^{-Ky} + C_2 e^{Ky} \right) \sin(\omega_s t + \beta x + \varphi). \quad (3.79)$$

Сталі інтегрування C_1 та C_2 знайдемо виходячи з рівності нормальних

складових вектора \vec{B} на поверхні провідного шару, тобто

$$\dot{B}_y = -\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial x} = -\left(C_1 e^{-Ky} + C_2 e^{Ky}\right) \beta \cos(\omega_s t + \beta x + \varphi). \quad (3.80)$$

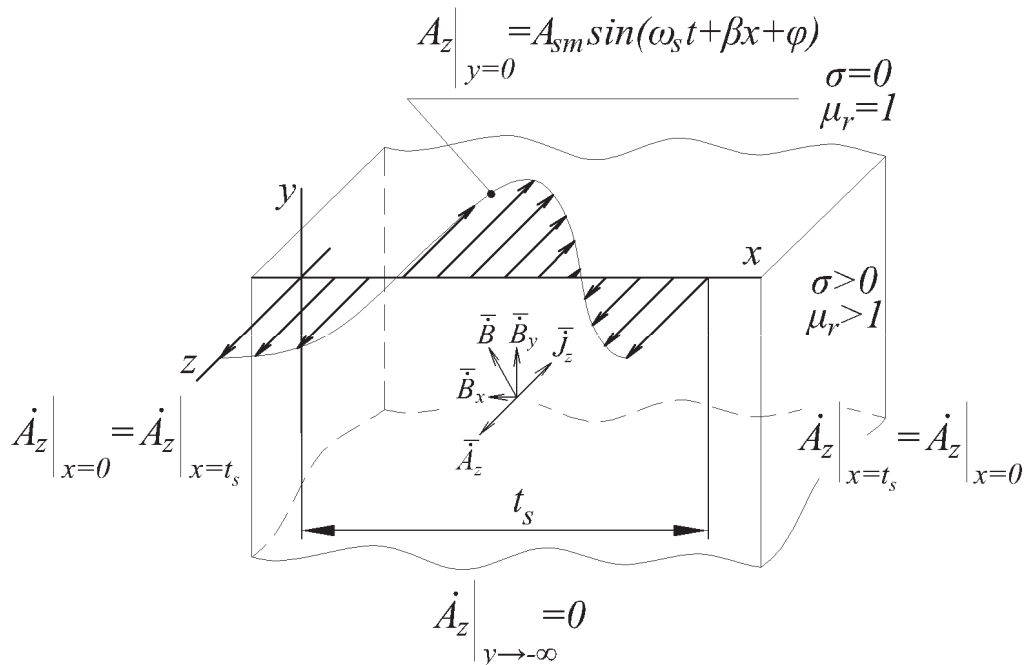


Рис. 3.15. Крайова умова до рівняння Гельмгольца

Для границі області за $y = 0$

$$B_y|_{y=0} = -(C_1 + C_2) \beta \cos(\omega_s t + \beta x + \varphi). \quad (3.81)$$

Тоді для границі $y \rightarrow -\infty$ стала $C_2 = 0$, інакше $B_y|_{y=-\infty} \rightarrow \infty$. Це також пояснюється тим, що хвиля, проникаючи з діелектрика у провідне середовище, яке не має обмежень за довжиною в напрямі $-y$, не зустрічає границь, які викликають виникнення відбитої хвилі. Отже, за наявності лише однієї падаючої хвилі стала $C_2 = 0$.

Враховуючи (3.80) і (3.81), введемо нове позначення

$$-C_1 \cdot \beta = B_{sm}, \quad (3.82)$$

де B_{sm} – амплітуда пульсації індукції у повітряному проміжку машини, зумовлена зубчастістю осердя статора.

Розподіл z -проекції векторного магнітного потенціалу дає частковий розв'язок (3.78) у вигляді

$$\dot{A}_z = -\frac{B_{sm}}{\beta} e^{-Ky} \cdot \sin(\omega_s t + \beta x + \varphi), \quad (3.83)$$

а для моменту $t = 0$

$$\dot{A}_z|_{t=0} = -\frac{B_{sm}}{\beta} e^{-Ky} \cdot \sin(\beta x + \varphi). \quad (3.84)$$

Дві проекції напруженості поля становитимуть, відповідно

$$\begin{aligned} \dot{H}_x &= \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \cdot \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial y} = \frac{KB_{sm}}{\mu_0 \mu_r \beta} e^{-Ky} \cdot \sin(\beta x + \varphi), \\ \dot{H}_y &= \frac{-1}{\mu_0 \mu_r} \cdot \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial x} = \frac{B_{sm}}{\mu_0 \mu_r} e^{-Ky} \cdot \cos(\beta x + \varphi). \end{aligned} \quad (3.85)$$

Розподіл z -проекції вектора густини струму в провідній півплощині:

$$j_z = \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = j \left[\frac{2B_{sm}\xi^2}{\mu_0 \mu_r \beta} e^{-Ky} \cdot \sin(\beta x + \varphi) \right]. \quad (3.86)$$

Модуль цього вектора становить

$$|J_z| = \frac{2B_{sm}\xi^2}{\mu_0 \mu_r \beta} e^{-\operatorname{Re}(K)y} \cdot |\sin(\beta x + \varphi)|. \quad (3.87)$$

Втрати потужності на одиницю довжини розрахункової області вздовж осі z в межах періоду t_s отримуємо безпосереднім інтегруванням (3.87):

$$P_{ts} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\gamma} \frac{|J_z|^2}{\gamma} dx dy = \frac{\omega_s^2 B_{sm}^2 \cdot \sigma \cdot t_s}{8 \operatorname{Re}(K) \beta^2}. \quad (3.88)$$

Для обчислення даного виду втрат у всьому роторі, на підставі (3.88), необхідно ввести додаткові допущення: зовнішній діаметр ротора наближено дорівнює діаметру розточки осердя статора; полюсна система ротора представляє собою неперервне кільце довжиною l_m , товщина якого перевищує глибину проникнення поля у матеріал ПМ. Тоді

$$P_{PM} = P_{ts} \cdot Z \cdot l_m = \frac{\omega_s^2 B_{sm}^2 \cdot \sigma \cdot t_s \cdot Z \cdot l_m}{8 \operatorname{Re}(K) \beta^2}. \quad (3.89)$$

Визначення амплітуди пульсації зубцевої гармоніки поля здійснено на підставі відомого з класичної теорії електричних машин співвідношення амплітуд першої та зубцевої гармонік поля магнітної індукції:

$$\beta_s = \frac{B_{sm}}{B_{\delta \max}} = \frac{B_{\delta \max} - B_{\delta \min}}{2B_{\delta \max}}, \text{ або } \beta_s = \frac{1 + u^2 - 2u}{2(1 + u^2)}, \quad (3.90)$$

де

$$u = \frac{b_s}{2\delta} + \sqrt{1 + \left(\frac{b_s}{2\delta}\right)^2}. \quad (3.91)$$

Позначення, використані у (3.90) та (3.91), зрозумілі з рис. 3.16.

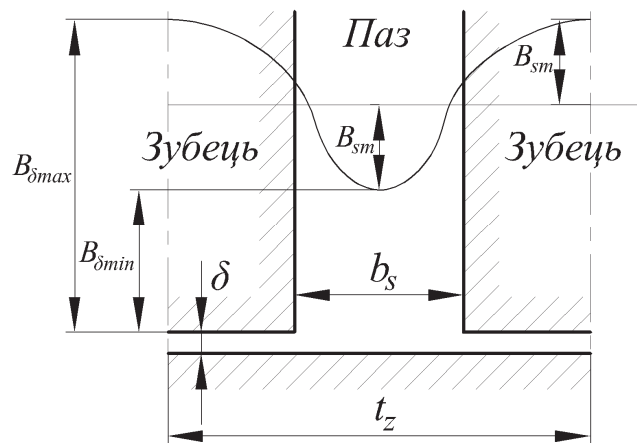


Рис. 3.16. До визначення амплітуди пульсації зубцевої гармоніки поля

Якщо відомим є амплітудне значення індукції в проміжку, наприклад, з попереднього проектного розрахунку, то амплітуду зубцевої пульсації поля знаходимо як

$$B_{sm} = \beta_s B_{\delta \max}. \quad (3.92)$$

Якщо зручно оперувати середнім значенням індукції в проміжку B_{av} , тоді

$$B_{sm} = \beta_s k_\delta B_{av}. \quad (3.93)$$

Для перевірки аналітичної методики розрахунку втрат створено математичну модель. Використовуючи МСЕ, вона дає можливість розрахувати втрати в полюсах ротора машини, що обертається із наперед заданою частотою у зубчастому статорі із довільною формою пазу. Модель враховує нелінійні характеристики намагнічування матеріалів осердь статора й ротора та двовимірний розподіл магнітного поля, створеного ПМ довільної форми. Математичне формулювання цієї задачі викладено у п. 2.2 та у [77].

Розглянемо два магнітопроводи високошвидкісних 3-фазних турбогенераторів потужністю 100 кВА, частотою обертання 30000 об/хв, розрахованих на напругу 380 В, що відрізняються формою паза статора. Головні розміри обидвох машин однакові: розрахункова довжина осердя – 200 мм, діаметр розточки статора – 91 мм. Повітряний проміжок становить 3 мм, а «відкриття» пазів – 3 та 7 мм, відповідно. Рівень дискретизації розрахункових областей показано на рис. 3.17.

На рис. 3.18 у вигляді растрових зображень показано двовимірне поле z -проекції вектора густини струму в магніто- та електропровідних частинах ротора, причому областям з темним забарвленням відповідає додатне значення модуля \bar{J} , а світлим — від’ємне.

Втрати потужності знаходилися за (3.120). На рис. 3.19 середні значення цих втрат для різних частот обертання n порівнюються з неперервними залежностями $P_{PM}(n)$, отриманими за (3.89).

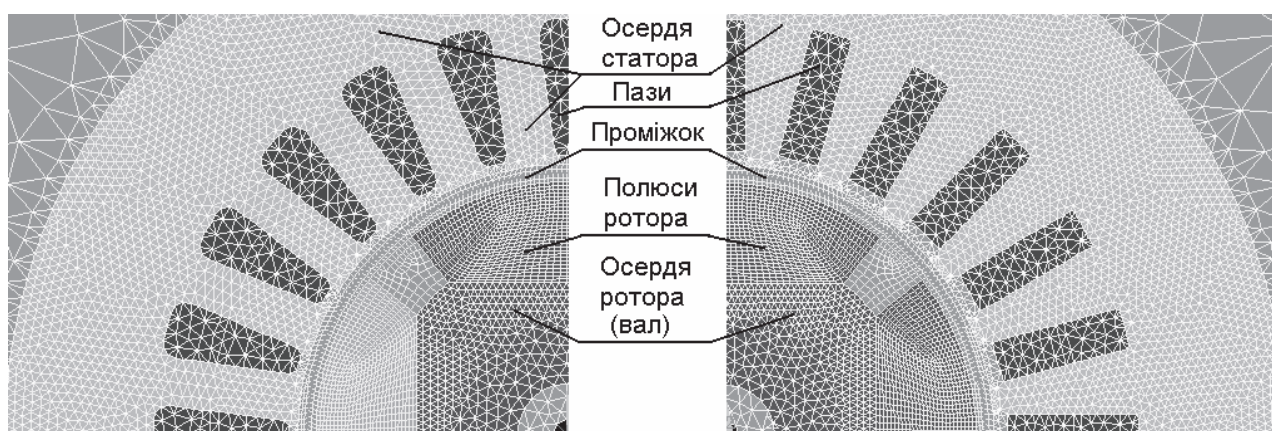


Рис. 3.17. Фрагменти сіток СЕ для осердь з напівзакритими та відкритими пазами

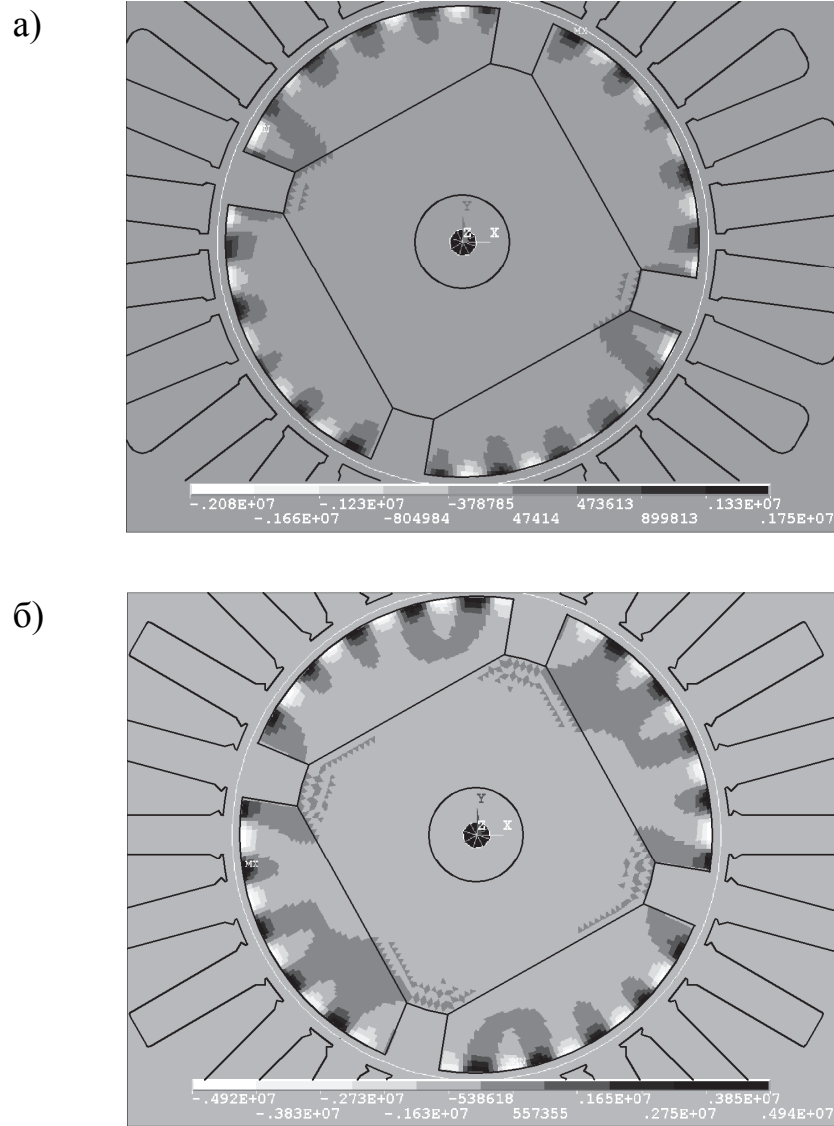


Рис. 3.18. Поле вектора густини струму $[A/m^2]$ для машини:

а) з напівзакритим пазом ($1,7 A/mm^2 \max$); б) з відкритим пазом ($4,9 A/mm^2 \max$);

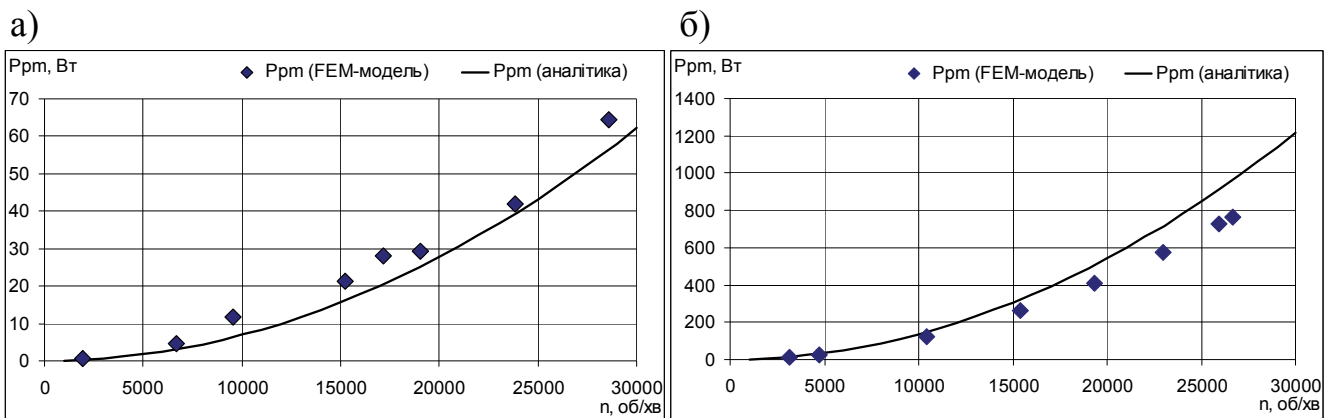


Рис. 3.19. Залежності середніх значень втрат в роторі від частоти обертання

а) осердя статора з напівзакритим пазом; б) осердя статора з відкритим пазом

Аналіз отриманих залежностей показав, що поверхневі втрати в роторі з ПМ у машини з відкритим пазом (7 мм) приблизно у 20 разів перевищують ці ж втрати у машині з напівзакритим пазом (3 мм). Це кількісно підтверджує, висловлену у п. 1.2, тезу про те, що невірний вибір конфігурації зубцевого шару може поставити під загрозу виконання всього проекту ВБПМ.

3.2.3. Механічні втрати в роторі

До цього виду втрат ми віднесли втрати аеродинамічного походження, які виникають за рахунок тертя поверхонь ротора з газом, що їх оточує (наприклад, повітрям), та втрати на тертя у підшипникових опорах ротора. Вентиляційні втрати, які традиційно відносять до механічних, вилучено з цієї категорії, оскільки конструкції ВБПМ з самовентиляцією в роботі не розглядаються.

Характер руху газового потоку в проміжку залежить від співвідношення між силами інерції та в'язкості. Саме він визначатиме величину аеродинамічних втрат. Потік газу всередині ВБПМ, як правило, турбулентний, про що свідчать величини чисел Рейнольдса. Так, тангенціальний потік визначатиметься «обертвовим» числом Рейнольдса

$$\text{Re}_\omega = \frac{2\pi \cdot n_H \cdot (0,5D - \delta + t_b)(\delta - t_b)}{60 \cdot \nu_{air}}, \quad (3.94)$$

де t_b – одностороння товщина бандажного кільця для утримання ПМ;

ν_{air} – кінематичний коефіцієнт в'язкості газу, $[\text{м}^2/\text{с}]$.

Для циліндра, що обертається без статора у вільному просторі,

$$\text{Re}_r = \frac{2\pi \cdot n_H \cdot (0,5D - \delta + t_b)^2}{60 \cdot \nu_{air}}. \quad (3.95)$$

Це рівняння також підходить для тіл у формі диска.

Для осьового потоку через повітряний проміжок число Рейнольдса становить

$$\text{Re}_a = \frac{2v_a(\delta - t_b)}{\nu_{air}}, \quad (3.96)$$

де v_a – осьова складова лінійної швидкості руху газу (вона визначається об'ємною витратою газу та площею поперечного перетину повітряного проміжку).

Для газового потоку, що має тангенціальну та осьову складові швидкості, коефіцієнт тертя циліндричної поверхні ротора визначаємо як [295]

$$C_{f1} = \frac{0,0152}{\text{Re}_\omega^{0,24}} \left[1 + \left(\frac{8}{7} \right)^2 \cdot \left(\frac{4\text{Re}_a}{\text{Re}_\omega} \right)^2 \right]^{0,38}, \quad (3.97)$$

а для його торцевих поверхонь він, в залежності від величини Re_r , становитиме

$$C_{f2} = \frac{3,87}{\text{Re}_r^{0,5}}, \text{ для } \text{Re}_r \leq 3 \times 10^5; \quad C_{f2} = \frac{0,146}{\text{Re}_r^{0,2}}, \text{ для } \text{Re}_r > 3 \times 10^5. \quad (3.98)$$

Відповідні втрати на тертя:

$$P_{r1} = C_{f1} \cdot \pi \cdot \gamma_{air} \left(\frac{2\pi \cdot n_H}{60} \right)^3 \cdot (0,5D - \delta + t_b)^4 l_m; \quad (3.99)$$

$$P_{r2} = \frac{1}{2} C_{f2} \cdot \gamma_{air} \left(\frac{2\pi \cdot n_H}{60} \right)^3 \cdot \left[(0,5D - \delta + t_b)^5 - (0,5D_{sh})^5 \right], \quad (3.100)$$

де γ_{air} – густина газу довкілля;

D_{sh} – діаметр шийки вала (цапфи).

Втрати на тертя у підшипникових опорах ротора P_b в залежності від типу використаних опор визначаються виразами (4.38) для підшипників кочення або (4.63) для підшипників ковзання.

Повні механічні втрати ВБПМ — це сума

$$P_{mec} = P_{r1} + P_{r2} + P_b. \quad (3.101)$$

Коефіцієнт корисної дії (ККД) машини:

$$\eta = \frac{P_2}{P_2 + P_{Cu} + P_{Cu|a} + P_{Fe} + P_{PM} + P_{mec}}. \quad (3.102)$$

3.2.4. Алгоритм розрахунку робочих характеристик

Робочими характеристиками генератора вважатимемо залежності фазного струму I_p , споживаної потужності P_1 , моменту на валу M й ККД η від корисної потужності P_2 за сталої частоти обертання $n = \text{const}$ та коефіцієнті потужності $\cos \varphi = \text{const}$. Для двигунів додамо функціональну залежність частоти обертання від

P_2 за сталої напруги живлення $U_{DC} = \text{const}$.

Спробуємо об'єднати в одному алгоритмі способи їх розрахунку:

- задаючи значення фазного струму з допустимого діапазону $I_p = 0 \div I_{\max}$, де $I_{\max} = k_L I_N$ – максимально допустиме значення струму; k_L – коефіцієнт перевантаження за струмом, визначаємо:

для генератора

– за методикою п. 3.1.2 фазну напругу генератора U_p ;

– корисну електричну потужність як

$$P_2 = m \cdot U_p \cdot I_p \cdot \cos \varphi; \quad (3.103)$$

– момент на валу

$$M = \frac{60P_2}{2\pi \cdot n}; \quad (3.104)$$

для двигуна

– за методикою п. 3.1.3 частоту обертання n ;

– за (3.53) електромагнітний момент M_e ;

– корисну потужність на валу

$$P_2 = M_e \frac{2\pi \cdot n}{60}. \quad (3.105)$$

Далі розраховуємо:

- частоту струму в статорі;
- основні втрати в обмотці статора P_{Cu} за (3.55);
- додаткові втрати в обмотці статора $P_{Cu|a}$ за (3.59);
- за величиною основного магнітного потоку Φ_δ (для генератора п. 3.1.2, (3.36), для двигуна п. 3.1.3, (3.46)) — індукцію у ярмі статора B_a ;
- за величиною амплітуди індукції у проміжку B_δ — середню за висотою індукцію у зубці B_z ;
- основні втрати в магнітопроводі статора P_{Fe} за (3.76);
- додаткові втрати в роторі P_{PM} за (3.89);

- механічні втрати P_{mec} (3.101) перераховуємо пропорційно до квадрату частоти обертання

$$P'_{mec} = P_{mec} \left(\frac{n}{n_n} \right)^2; \quad (3.106)$$

- споживану потужність

$$P_1 = P_2 + P_{Cu} + P_{Cu|a} + P_{Fe} + P_{PM} + P'_{mec}; \quad (3.107)$$

- ККД за (3.102).

Таким чином, отримуємо точку робочих характеристик. Змінюючи значення струму, та циклічно повторюючи розрахунки, обчислюємо необхідну сукупність розрахункових значень режимних величин.

3.3. Перехідні процеси у ВБПМ як елементі електромеханотронної системи

Розглянемо теоретичні та практичні засади створення математичної моделі для розрахунку електромеханічних процесів у електромеханотронній системі, що складається з ВБПМ, напівпровідникового комутувального пристрою, до якого під'єднано обмотку статора ВБПМ, та ДПР, який забезпечує зворотний зв'язок за кутом повороту ротора.

3.3.1. Інтегральні показники електромагнітного поля

Перш за все звернемо увагу на способи узгодження підходів, що використовуються для побудови такої математичної моделі, а саме — на перехід від польових категорій до понять, притаманних теорії електромагнітних кіл. Розглянемо способи визначення інтегральних показників електромагнітного поля — магнітного потоку, потокозчеплення, електромагнітного моменту та ін. на підставі розподілених у просторі польових характеристик — векторного магнітного потенціалу, магнітної індукції, густини струму та ін.

Потокозчеплення

Повне потокозчеплення будь-якого електричного контуру статора знаходимо як алгебричну суму потокозчеплення, зумовленого потоком лобового розсіяння, й потокозчеплення, зумовленого робочим потоком у пазовій частині статора ВБПМ.

Потокозчеплення лобового розсіяння, згідно з прийнятим допущенням, лінійно залежить від струмів усіх електричних контурів і знаходиться як добуток відповідних індуктивностей розсіювання на ці струми. Індуктивності лобового розсіяння обчислюємо за (3.9).

Частина потокозчеплення, зумовлена потоком в пазовій частині статора, знаходиться як добуток деяких елементарних магнітних потоків, що зчеплюються з частиною котушки, на кількість витків, що міститься у цій частині котушки.

Розглянемо рис. 3.20, на якому зображено котушку статора разом із зубцями. Розділимо області, які займають сторони котушки, на J елементарних підобластей, в межах яких будемо вважати величину й напрям вектора \bar{B} незмінними. Дві таких підобласті S_j зображено на рис. 3.20.

Потік, що зчеплюється з частиною витків котушки, обмежених площею S_j , розраховуємо як

$$\Phi_j = l_{\delta} \int_l \bar{B} \bar{n} d\bar{l}, \quad (3.108)$$

а потокозчеплення цієї частини котушки, відповідно

$$\psi_j = w_{sj} \Phi_j, \quad (3.109)$$

де \bar{n} – одиничний вектор (орт) нормалі до елементарної ділянки $d\bar{l}$;

w_{sj} – кількість витків, що належить підобласті S_j .

Потокозчеплення вважатимемо додатним якщо знак скалярного добутку $\bar{B}\bar{n}$ додатний і напрям нормалі \bar{n} збігається з додатним напрямом магнітного потоку.

Сумуючи потокозчеплення (3.109) за всією площею паза, отримуємо потокозчеплення котушки, зумовлене потоком в пазовій частині ВБПМ:

$$\psi_{\delta km} = \sum_{j=1}^J \psi_j \cdot \quad (3.110)$$

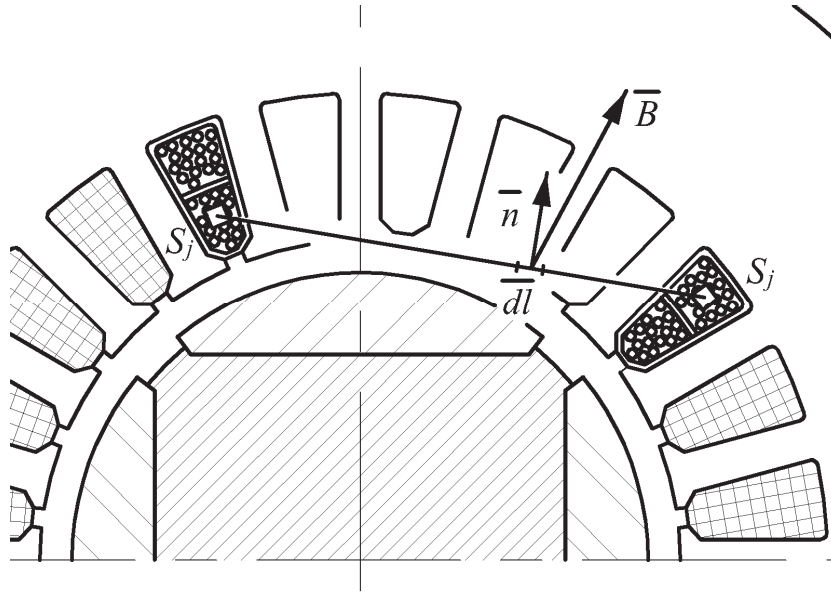


Рис. 3.20. До розрахунку потокозчеплення котушки

Потокозчеплення всієї фази $\psi_{\delta m}$ ($m = \overline{1,3}$), де m – поточний номер контуру (фази) статора, зумовлене потоком в пазовій частині, знаходимо як алгебричну суму потокозчеплень K котушок, що належать контуру з номером m .

Остаточно отримуємо повні потокозчеплення контурів статора:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= L_{\sigma 11} i_1 + L_{\sigma 12} i_2 + L_{\sigma 13} i_3 + \sum_{k=1}^K \psi_{\delta k 1}; \\ \psi_2 &= L_{\sigma 21} i_1 + L_{\sigma 22} i_2 + L_{\sigma 23} i_3 + \sum_{k=1}^K \psi_{\delta k 2}; \\ \psi_3 &= L_{\sigma 31} i_1 + L_{\sigma 32} i_2 + L_{\sigma 33} i_3 + \sum_{k=1}^K \psi_{\delta k 3}, \end{aligned} \quad (3.111)$$

або у матричному вигляді

$$\vec{\psi} = L_{\sigma} \vec{i} + \vec{\psi}_{\delta}, \quad (3.112)$$

де $\vec{\psi} = \|\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3\|_*$ – вектор-стовпець повних потокозчеплень електричних контурів статора;

$\vec{i} = \|i_1 \ i_2 \ i_3\|_*$ – вектор-стовпець струмів статора;

$$\mathbf{L}_\sigma = \begin{vmatrix} L_{\sigma 11} & L_{\sigma 12} & L_{\sigma 13} \\ L_{\sigma 21} & L_{\sigma 22} & L_{\sigma 23} \\ L_{\sigma 31} & L_{\sigma 32} & L_{\sigma 33} \end{vmatrix} - \text{матриця індуктивностей лобового розсіяння};$$

$$\vec{\psi}_\delta = \|\psi_{\delta 1} \psi_{\delta 2} \psi_{\delta 3}\|_* - \text{вектор-стовпець поточкозчеплень електричних контурів},$$

зумовлених потоками в пазовій частині ВБПМ.

Електромагнітний момент

Традиційний підхід до обчислень сил та моментів електромагнітного походження полягає у визначенні зміни енергії або коенергії магнітного поля. Такий спосіб пов'язаний з труднощами обчислювального характеру — вимагає визначення малої різниці великих величин, що ускладнює отримання результату з достатньою точністю.

Більш доцільно розрахунок електромагнітних сил та моментів проводити на підставі чисельних методів дослідження магнітного поля з урахуванням найважливіших чинників, що впливають на їх величину, зокрема насичення феромагнітних елементів магнітопроводів.

Так, один із методів базується на способі обчислення сили, що діє на ротор, за допомогою так званого тензора натягу Максвелла [94,174].

Розглянемо математичну сутність цього методу. Сила, що діє на будь-яку частину об'єму V , обмеженого поверхнею S , може бути отримана сумуванням елементарних сил $d\vec{F} = \vec{F}_n d\vec{S}$, прикладених до елементів $d\vec{S}$ поверхні S , відповідно

$$\vec{F} = \int_S \vec{F}_n d\vec{S}, \quad (3.113)$$

де \vec{F}_n — сила натягу, що діє ззовні на елементарну поверхню, зовнішня нормаль до якої направлена вздовж \vec{n}

$$\vec{F}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S}. \quad (3.114)$$

У двовимірній постановці вектор результуючої цієї сили обчислюється як

$$\vec{F} = \frac{1}{\mu_0 l} \int T_m \vec{n} d\vec{l}, \quad (3.115)$$

де $\mathbf{T}_m = \left\| \begin{array}{cc} \frac{1}{2}(B_x^2 - B_y^2) & B_x B_y \\ B_x B_y & \frac{1}{2}(-B_x^2 + B_y^2) \end{array} \right\|$ – тензор натягу Максвелла для ізотропного

середовища;

B_x, B_y – проекції вектора магнітної індукції назовні поверхні S ;

\bar{n} – нормаль до цієї поверхні.

На підставі (3.115) після нескладних перетворень електромагнітний момент, що діє, наприклад, на ротор електричної машини, визначається як

$$M_e = \bar{z} \cdot \frac{1}{\mu_0 l} \int \bar{r} \times \left[(\bar{n} \cdot \bar{B}) \cdot \bar{B} - \frac{1}{2} (\bar{B} \cdot \bar{B}) \cdot \bar{n} \right] d\bar{l}, \quad (3.116)$$

де \bar{z} – одиничний вектор вздовж осі обертання;

\bar{r} – радіус-вектор, кінець якого належить зовнішній поверхні ротора.

Точність визначення сил та моментів за допомогою тензора напружень Максвелла сильно залежить від просторового розташування поверхні інтегрування S та рівня дискретизації розрахункової області.

Інший метод, що застосовується для розрахунку електромагнітного моменту, побудований на підставі принципу обчислення роботи на можливому «віртуальному» переміщенні (віртуальна робота). Тут знаходиться похідна енергії магнітного поля за можливим «віртуальним» переміщенням у довільному напрямі. Такий розрахунок здійснюється для шару СЕ на границі розділу середовищ, що оточують рухомі частини.

Метод передбачає визначення електромагнітного зусилля, що діє на кожен СЕ, який належить ротору. Вектор цієї сили рівний

$$\bar{F}_s = \int_V \bar{B}^* \frac{\partial \bar{H}}{\partial s} dV + \int_V \frac{\partial}{\partial s} \left(\int \bar{B}^* d\bar{H} \right) dV, \quad (3.117)$$

де \bar{F}_s – сила, що діє в напрямі s ;

s – віртуальне переміщення вузлових координат (почергово для x, y, z);

V – об'єм скінченного елемента.

На підставі (3.117) після нескладних перетворень електромагнітний момент, що діє на ротор електричної машини, визначається як

$$M_{el} = \sum_{e=1}^E r^{[e]} F_{\tau}^{[e]}, \quad (3.118)$$

де $r^{[e]}$ – довжина радіус-вектора, проведеного до центру мас e -го СЕ ($e = \overline{1, E}$);

$F_{\tau}^{[e]} = F_x^{[e]} \sin \alpha + F_y^{[e]} \cos \alpha$ – тангенціальна проекція сили \overline{F}_s , враховуючи, що

вісь обертання ротора співпадає з віссю z ;

$F_x^{[e]}, F_y^{[e]}$ – проекції сили \overline{F}_s на осі x та y для e -го СЕ;

α – кут нахилу радіус-вектора, проведеного до центру мас e -го СЕ.

Втрати потужності

Маючи поле густини струму, втрати потужності на одиницю довжини в двовимірних струмопровідних областях S знаходимо як

$$P_{Fe} = \mathbf{y}^{-1} \int_S |\overline{J}|^2 dS, \quad (3.119)$$

де \mathbf{y}^{-1} – матриця питомого електричного опору струмопровідного середовища;

dS – площа елементарної області.

Після алгебризації (3.119) вираз для знаходження втрат потужності в електропровідних областях, зумовлених тепловою дією вихрових струмів виглядатиме так

$$P_{Fe} = \sigma^{-1} \sum_{e=1}^E \left(\frac{S^{[e]} l}{K} \sum_{k=1}^K |J_k|^2 \right), \quad (3.120)$$

де J_n – модуль вузлового значення вектора густини струму;

$k = \overline{1, K}$ – поточний номер вузла СЕ;

$e = \overline{1, E}$ – поточний номер СЕ, що належить струмопровідній поверхні S ;

$S^{[e]} l$ – об'єм e -го СЕ площею $S^{[e]}$ та довжиною l .

3.3.2. Магнітно-механічна характеристика

Одним з основних феноменологічних понять нелінійної теорії ЕМПЕ є магнітно-механічна характеристика — залежність повних потокозчеплень електричних контурів й узагальнених сил (електромагнітного моменту) від струмів у цих контурах і узагальнених переміщень (кута повороту ротора) [79,154,155].

Для ВБПМ у скалярній формі запису явна ММХ має вигляд

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \psi_1[i_1, i_2, i_3, \gamma]; \\ \psi_2 &= \psi_2[i_1, i_2, i_3, \gamma]; \\ \psi_3 &= \psi_3[i_1, i_2, i_3, \gamma]; \\ M_e &= M_e[i_1, i_2, i_3, \gamma],\end{aligned}\tag{3.121}$$

де ψ_1, ψ_2, ψ_3 – повні потокозчеплення контурів статора;

i_1, i_2, i_3 – струми у цих контурах;

M_e – електромагнітний момент;

γ – кут повороту ротора.

З урахуванням прийнятих позначень (3.112) ММХ ВБПМ у векторній формі:

$$\vec{\psi} = \vec{\psi}[\vec{i}, \gamma] \quad M_e = M_e[\vec{i}, \gamma]\tag{3.122}$$

Явна ММХ не лише використовуватиметься у математичній моделі розрахунку динамічних процесів у ВБПМ, а й матиме самостійну цінність — дасть змогу розраховувати статичні робочі характеристики, визначати оптимальні співвідношення головних розмірів машини та ін.

Алгоритм розв'язання задачі розрахунку значень ММХ ВБПМ, за квазістаціонарного наближення магнітного поля у двовимірній постановці, передбачає виконання обчислень, геометричних побудов, перетворень координатних систем та ін. у два етапи.

1. Створення скінченно-елементної моделі ВБПМ.

1.1 Побудова геометричної моделі ВБПМ як сукупності двовимірних областей (площ) з різними магнітними властивостями¹.

¹ Розробка цієї частини алгоритму передбачає можливість параметризації розмірів активної зони машини, обмоткових даних, магнітних властивостей матеріалів.

1.2. Нанесення сітки СЕ на геометричну модель ВБПМ, з одночасним формуванням масиву з координатами її вузлів у локальній та глобальній нумераціях (масив L_G , див. п. 2.2.2), тобто створення скінченно-елементної моделі ВБПМ.

1.3. Окреслення контурів інтегрування для подальшого розрахунку фазних поточкозчеплень та електромагнітного моменту (рис. 3.20).

2. Розрахунок одного значення ММХ ВБПМ.

2.1. Визначення поточного значення кута повороту ротора γ , що відповідає розташуванню областей СЕ-моделі. Якщо заданий кут відрізняється від поточного більше ніж $\pm 0,5\%$ тоді здійснюється перебудова СЕ-моделі, а саме:

2.1.1. Вилучення сітки СЕ з повітряного проміжку.

2.1.2. Поворот ротора на заданий кут.

2.1.3. Побудова нової сітки у повітряному проміжку,

в протилежному випадку п.п. 2.1.1 - 2.1.3 не виконуються.

2.2. Встановлення навантажень – густин струму у вузлах сітки СЕ, що належать котушкам статорної обмотки, у відповідності до заданих струмів i_1, i_2, i_3 .

2.3. Формування розширених елементних матриць та стовпців правих частин (2.90), (2.91).

2.4. Формування глобальних матриці коефіцієнтів та стовпця правих частин (2.92).

2.5. Встановлення крайової умови (2.43).

2.6. Розв'язання нелінійної САДР відносно невідомих вузлових значень векторного магнітного потенціалу \vec{A}_z .

2.7. Розрахунок вузлових значень (2.94), (2.95) та формування векторів \vec{B} та \vec{H} .

2.8. Розрахунок повних поточкозчеплень електричних контурів статора (3.111) та електромагнітного моменту (3.116) або (3.118).

3.3.3. Магнітно-механічні параметри

Чисельне інтегрування САДР, що описуватиме перехідні процеси у ВБПМ, вимагає знаходження частинних похідних ММХ за вектором струмів та кутом

повороту ротора, так званих магнітно-механічних параметрів (ММП).

З теорії математичного моделювання ЕМПЕ відомо, що повна похідна явної ММХ за аргументом цієї характеристики зображається у вигляді матриці [154]

$$\frac{\partial(\vec{\psi}, M_e)^*}{\partial(\vec{i}, \gamma)^*} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{i}} & \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial M_e}{\partial \vec{i}} & \frac{\partial M_e}{\partial \gamma} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \mathbf{L} & \mathbf{K} \\ \mathbf{K}' & G \end{array} \right\|. \quad (3.123)$$

У випадку трифазного БГПМ, блоки матриці (3.123) це

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{i}} = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \psi_1}{\partial i_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial i_2} & \frac{\partial \psi_1}{\partial i_3} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial i_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial i_2} & \frac{\partial \psi_2}{\partial i_3} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial i_1} & \frac{\partial \psi_3}{\partial i_2} & \frac{\partial \psi_3}{\partial i_3} \end{array} \right\|; \quad \mathbf{K} = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \gamma} = \left\| \begin{array}{c} \frac{\partial \psi_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \gamma} \end{array} \right\| \quad (3.124)$$

$$\mathbf{K}' = \frac{\partial M_e}{\partial \vec{i}} = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial M_e}{\partial i_1} & \frac{\partial M_e}{\partial i_2} & \frac{\partial M_e}{\partial i_3} \end{array} \right\|; \quad G = \frac{\partial M_e}{\partial \gamma}. \quad (3.125)$$

Оскільки ММХ ВБПМ є нелінійною векторною функцією векторного аргументу, значення якої знаходиться на підставі розрахунку магнітного поля, аналітичне знаходження частинних похідних (3.124), (3.125) практично неможливе.

Розглянемо чисельний спосіб знаходження похідних (3.124), (3.125), що ґрунтується на теорії інваріантного наближення функцій [152].

Нехай для деякої скалярної функції векторного аргументу $y = y[x_1, \dots, x_n]$, де n – кількість елементів цього векторного аргументу в евклідовому n -вимірному просторі, окреслимо ортонормований базис R_n , орти якого є векторами $\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n}$. Зокрема, $\bar{1}(1, 0, \dots, 0)$, $\bar{2}(0, 1, \dots, 0)$, ..., $\bar{n}(0, 0, \dots, 1)$. Метрикою цього простору вважатимемо віддаль ρ між двома точками A і B , що розраховується за формулою

$$\rho = \sqrt{(x_{A1} - x_{B1})^2 + (x_{A2} - x_{B2})^2 + \dots + (x_{An} - x_{Bn})^2}, \quad (3.126)$$

де $x_{A1}, x_{A2}, \dots, x_{An}, x_{B1}, x_{B2}, \dots, x_{Bn}$ – декартові координати точок A і B відповідно.

Знайдемо точку ξ в цьому просторі, рівновіддалену від кінців ортів (точок 1, 2, ..., n) та початку базису (точки 0), розв'язавши систему з $(n+1)$ -го рівняння:

$$\begin{aligned}
(1 - x_{\xi,1})^2 + (0 - x_{\xi,2})^2 + \dots + (0 - x_{\xi,n})^2 &= r^2; \\
(0 - x_{\xi,1})^2 + (1 - x_{\xi,2})^2 + \dots + (0 - x_{\xi,n})^2 &= r^2; \\
\vdots & \\
(0 - x_{\xi,1})^2 + (0 - x_{\xi,2})^2 + \dots + (1 - x_{\xi,n})^2 &= r^2; \\
(0 - x_{\xi,1})^2 + (0 - x_{\xi,2})^2 + \dots + (0 - x_{\xi,n})^2 &= r^2,
\end{aligned} \tag{3.127}$$

де $x_{\xi,1}, \dots, x_{\xi,n}$ – координати шуканої точки ξ ;

r – віддаль від цієї точки до початку базису або до кінця будь якого орта.

Розв'язком системи є координати $\xi\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$ та віддаль $r = \frac{\sqrt{n}}{2}$.

Перенесемо початок базису в точку ξ й утворимо нову систему координат, у котрій визначимо нові координати точок $0, 1, 2, \dots, n$ та координати початку “старого” базису.

Отже, точка ξ в новій системі координат має координати $\xi(0, 0, \dots, 0)$, кінці ортів – $1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}\right), 2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}\right), \dots, n\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$, а початок “старого” базису в новій системі координат – $0\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}\right)$. Віддаль r є радіусом n -вимірної “сфери”, описаної довкола фігури, вершини якої розташовані в точках $0, 1, 2, \dots, n$.

Знайдемо координати точки $n+1$ ($x_{(n+1),1}, x_{(n+1),2}, \dots, x_{(n+1),n}$), яка лежить на перетині вищезгаданої “сфери” радіусом r та прямої, що проходить через точки 0 та ξ . Для цього розв'яжемо систему n рівнянь

$$\begin{aligned}
x_{(n+1),1}^2 + x_{(n+1),2}^2 + \dots + x_{(n+1),n}^2 &= r^2; \\
\frac{x_{(n+1),1} - x_{\xi,1}}{x_{\xi,1} - x_{0,1}} &= \frac{x_{(n+1),2} - x_{\xi,2}}{x_{\xi,2} - x_{0,2}}; \\
\vdots & \\
\frac{x_{(n+1),n-1} - x_{\xi,n-1}}{x_{\xi,n-1} - x_{0,n-1}} &= \frac{x_{(n+1),n} - x_{\xi,n}}{x_{\xi,n} - x_{0,n}}.
\end{aligned} \tag{3.128}$$

Якщо підставити у (3.128) координати точок ξ та 0 , визначені у новому базисі, то розв'язком системи будуть два можливі значення координат точки $n+1$, а саме $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}\right)$ та $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$. Перше з них збігається з координатами точки 0 , а друге і є шуканим.

Точки $1, 2, \dots, n, n+1$ надалі називатимемо вузлами, їх сукупність комплектом вузлів, а значення функції $y = y[x_1, \dots, x_n]$ у вузлах – дискретами функції y .

Вважатимемо, що функцію $y = y[x_1, \dots, x_n]$ в околі комплекту можна наблизити многочленом Тейлора 1-го степеня з n незалежними змінними. Тоді

$$y = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = \vec{T}[x_1, x_2, \dots, x_n] \vec{c}, \quad (3.129)$$

де $\vec{T}[x_1, x_2, \dots, x_n] = \left\| 1 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \right\|$ – рядок Тейлора 1-го степеня;

$\vec{c} = \left\| c_0 \ c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n \right\|_*$ – стовпець коефіцієнтів (похідних).

Якщо відомими є дискрети функції y в кожному вузлі комплекту, то справедливим є векторне рівняння

$$\vec{y} = \mathbf{T} \vec{c}, \quad (3.130)$$

де $\vec{y} = \left\| y_1 \ y_2 \ y_3 \ \dots \ y_{n+1} \right\|_*$ – стовпець дискрет;

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 & \dots & -1/2 \\ \vdots & & & \dots & \\ 1 & -1/2 & -1/2 & \dots & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & \dots & 1/2 \end{pmatrix} \quad - \text{ матриця Тейлора для заданої геометрії}$$

комплекту вузлів.

Інтерполянта функції y з урахуванням (3.129) та (3.130) запишеться як

$$y = \vec{T}[x_1, x_2, \dots, x_n] \mathbf{T}^{-1} \vec{y}, \quad (3.131)$$

а її частинна похідна в точці ξ , наприклад, за x_1 набуває виду

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x_1} \right|_{y=y[x_{\xi,1}, x_{\xi,2}, \dots, x_{\xi,n}]} = \vec{T}[x_{\xi,1}, x_{\xi,2}, \dots, x_{\xi,n}] \mathbf{D}_{x_1} \mathbf{T}^{-1} \vec{y}, \quad (3.132)$$

де $\mathbf{D}_{x_1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$ – матриця диференціювання рядка Тейлора за x_1 .

Після виконання нескладних перетворень з (3.132) можна зауважити, що шукане значення похідної $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ дорівнює другому елементові стовпця похідних

$\vec{c} = T^{-1}\vec{y}$, а для решта частинних похідних $\frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}$ такими значеннями є 3-й, ..., $(n+1)$ -й елементи цього стовпця.

Оскільки функція $y = y[x_1, \dots, x_n]$ наближалася многочленом Тейлора 1-го степеня, то значення всіх частинних похідних є незмінними доки точка, в якій вони розраховуються, знаходиться в межах комплекту, або, іншими словами, належить вищезгаданій n -вимірній “сфері” радіусом r .

Застосування ж многочленів вищого порядку хоча й підвищить точність обчислення похідних, але вимагатиме їх розрахунку на кожній ітерації для будь-якого, навіть найменшого приросту аргументу ММХ. Це значно збільшить час розрахунку, а, можливо, для багатовимірних ММХ зробить його неприпустимо великим.

З практики відомо, що робоча точка перехідного процесу (аргумент ММХ) в межах кроку інтегрування, як правило, змінюється незначно. Можна сподіватися, що завдяки описаним прийомам обчислення похідних ММХ треба буде робити тільки один, два рази на кроці інтегрування, а не на кожній ітерації методу чисельного розв’язання нелінійних алгебричних рівнянь [139]. Це принаймні у 4-5 разів зменшить кількість необхідних арифметичних операцій, у порівнянні з традиційними чисельними способами обчислення похідних.

Для наглядності геометрія комплекту вузлів для функції $y[x_1, x_2, x_3]$ 3-х незалежних змінних показана рис. 3.21.

Застосування описаного способу, для знаходження частинних похідних ММХ реального об’єкту вимагає виконання масштабування аргументу цієї характеристики

та переносу початку системи координат у точку в околі якої шукається похідна. Ці обидва заходи забезпечують можливість виконання арифметичних операцій з максимальною точністю (за фіксованої розрядності комп'ютера).

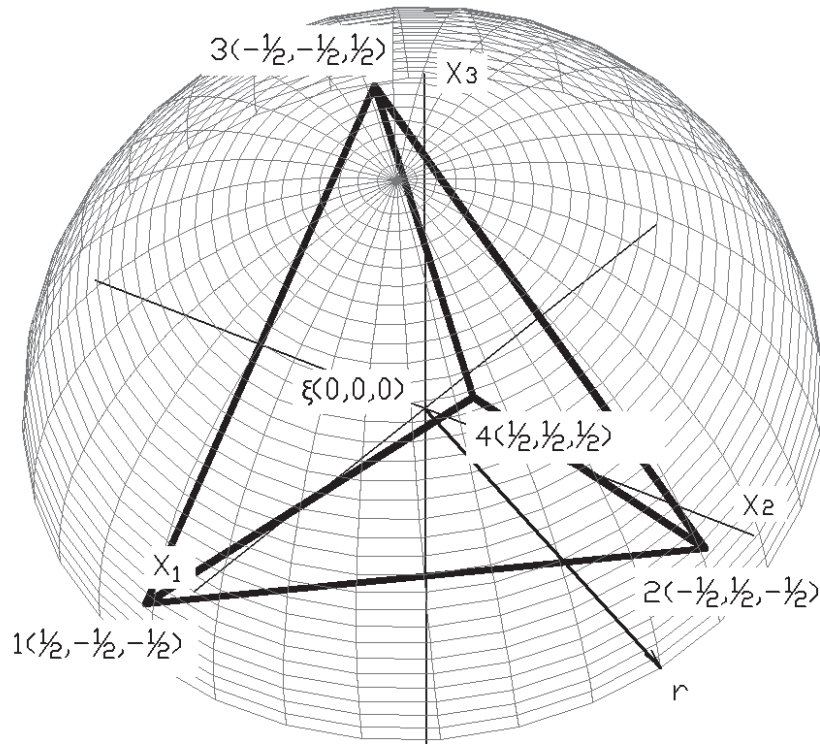


Рис. 3.21. Геометрія масштабованого комплексу вузлів для функції трьох незалежних змінних

Розглянемо застосування описаного способу для розрахунку похідних ММХ трифазного ВБПМ (3.123).

Для обчислення похідних (3.124), (3.125) у точці з координатами i_1, i_2, i_3, γ належить:

1. Сформувати матрицю Тейлора та знайти обернену до неї:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}. \quad (3.133)$$

Ця операція виконується один раз, тому що геометрія комплексу залишається незмінною для будь-яких режимів роботи машини.

2. Перенести початок системи координат в точку i_1, i_2, i_3, γ та розрахувати координати 5-вузлового комплекту у фізичній СК, які відповідають геометрії масштабованого комплекту. Так, n -ий вузол ($n = \overline{1, 5}$) цього комплекту визначатиметься як

$$\begin{pmatrix} i_{1,n} \\ i_{2,n} \\ i_{3,n} \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{i_1} & & & \\ & m_{i_2} & & \\ & & m_{i_3} & \\ & & & m_\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ x_{3,n} \\ x_{4,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad (3.134)$$

де $\text{diag}(m_{i_1}, m_{i_2}, m_{i_3}, m_\gamma)$ – матриця масштабних коефіцієнтів (її елементи показують, скільки одиниць фізичної величини (струму, кута, тощо) містить відносна одиниця масштабованого комплекту);

$\|x_{1,n} \ x_{2,n} \ x_{3,n} \ x_{4,n}\|_*$ – стовпець координат n -го вузла масштабованого комплекту;

$\|i_1 \ i_2 \ i_3 \ \gamma\|_*$ – стовпець з координатами початку СК (точка ξ).

4. Розрахувати дискрети функції $\vec{\psi}$ та M_e , для всіх вузлів комплекту та сформувати з них стовці $\vec{\psi}_1, \vec{\psi}_2, \vec{\psi}_3, \vec{M}$.

5. Знайти стовпець масштабованих похідних для функції ψ_1

$$\vec{c} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \vec{\psi}_1 = \|c_0 \ c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4\|_*. \quad (3.135)$$

6. Визначити її частинні похідні у фізичних координатах:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial i_1} = \frac{c_1}{m_{i_1}}; \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial i_2} = \frac{c_2}{m_{i_2}}; \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial i_3} = \frac{c_3}{m_{i_3}}; \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \gamma} = \frac{c_4}{m_\gamma}. \quad (3.136)$$

7. Повторити п.п. 5-6 для скалярних функцій $\psi_2 \ \psi_3$.

8. Знайти стовпець масштабованих похідних для функції M :

$$\vec{c} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \vec{M} = \|c_0 \ c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4\|_*. \quad (3.137)$$

9. Визначити її частинні похідні у фізичних координатах:

$$\frac{\partial M_e}{\partial i_1} = \frac{c_1}{m_{i_1}}; \quad \frac{\partial M_e}{\partial i_2} = \frac{c_2}{m_{i_2}}; \quad \frac{\partial M_e}{\partial i_3} = \frac{c_3}{m_{i_3}}; \quad \frac{\partial M_e}{\partial \gamma} = \frac{c_4}{m_\gamma}. \quad (3.138)$$

10. Заповнити значеннями матриці (3.124), (3.125).

3.3.4. Вольт-амперні характеристики напівпровідникових елементів

Електропривод, до складу якого входить ВБПМ, поєднує електричну машину та систему керування. Вона складається з силових комутаційних модулів, як правило, на базі напівпровідникових ключів та модуля керування.

Побудова адекватних математичних моделей таких об'єктів можлива лише за умови врахування особливостей взаємодії систем керування, принаймні їх силових модулів, з електричною машиною. Іншими словами, таку електромеханотронну систему належить розглядати як єдине ціле й використовувати єдиний підхід для моделювання всіх її структурних елементів.

Враховуючи істотний поступ у розвитку елементної бази промислової силової електроніки, можна бачити, що на зміну традиційним тиристорам прийшли повністю керовані ключі — транзистори різних типів: біполярні, MOSFET, IGBT. Отже, математична модель системи повинна містити формальний опис таких елементів.

Пропонуємо модель силового керованого ключа [76], що ґрунтується на наступних допущеннях:

1. Силовий ключ може знаходитись лише у двох станах: “відкритий” стан відповідає режимові насичення біполярного транзистора, “закритий” стан — режимові відсічки.

2. У “закритому” стані ключ поводить себе як достатньо великий сталий активний опір.

3. У “відкритому” стані ключ представляє собою нелінійний активний опір, вольт-амперна характеристика (ВАХ) якого схематично зображена на рис. 3.22, а.

4. Ємність напівпровідникових переходів та інерційність основних носіїв заряду, що властиві транзисторам, не враховуються.

Обґрунтуємо прийняті допущення на прикладі роботи біполярного транзистора. Звичайно, у моменти комутації, коли транзистори переходять із стану відсічки у стан насичення або навпаки, вони знаходяться в активному режимі, але тривалість цього стану та його вплив на загальний перебіг процесів настільки малий,

що ним будемо нехтувати.

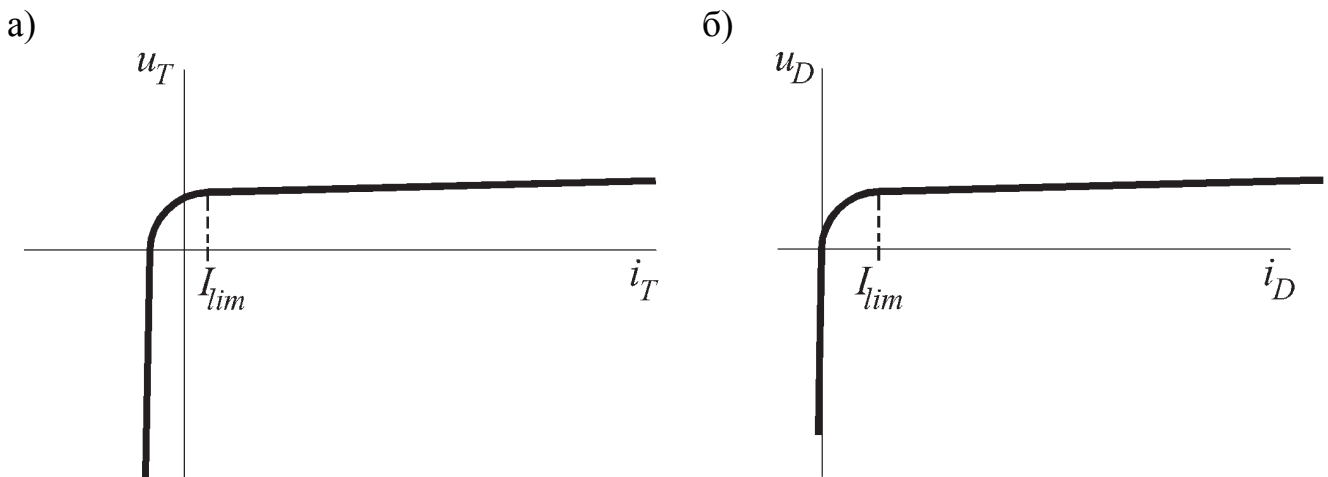


Рис. 3.22. ВАХ напівпровідникових елементів
а) транзистора у «відкритому» стані; б) діода

Величини зворотних струмів біполярних транзисторів достатньо малі, у порівнянні із силовими струмами та струмами керування. Врахування нелінійної залежності між зворотними напругами та струмами практично не вплине на точність моделі в цілому.

Зсув ВАХ транзистора вліво по осі абсцис зумовлений наявністю струму керування. Якщо розглядати транзистор як елемент, зображений на рис. 3.23, а, то наявність струму у базі i_B достатнього щоби ввести транзистор у режим насичення, викликає появу спаду напруги на переході база-емітер ($u_{BE} \approx 0,6V$). Отже, щоби такий транзистор, при наявності струму керування i_B , перейшов у режим відсічки, що цілком можливо у моделі ВБІМ, потрібно, щоби струм I_T не тільки впав до нуля, а й став від'ємним.

Такому трактуванню роботи транзистора відповідає заступна схема на рис. 3.23, б.

Як показали численні математичні експерименти, цілком достатнім рівнем наближення транзисторного ключа, для потреб моделювання процесів у електричних машинах, є рівень, сутність якого зрозуміла з заступної схеми, зображеної на рис. 3.23, в.

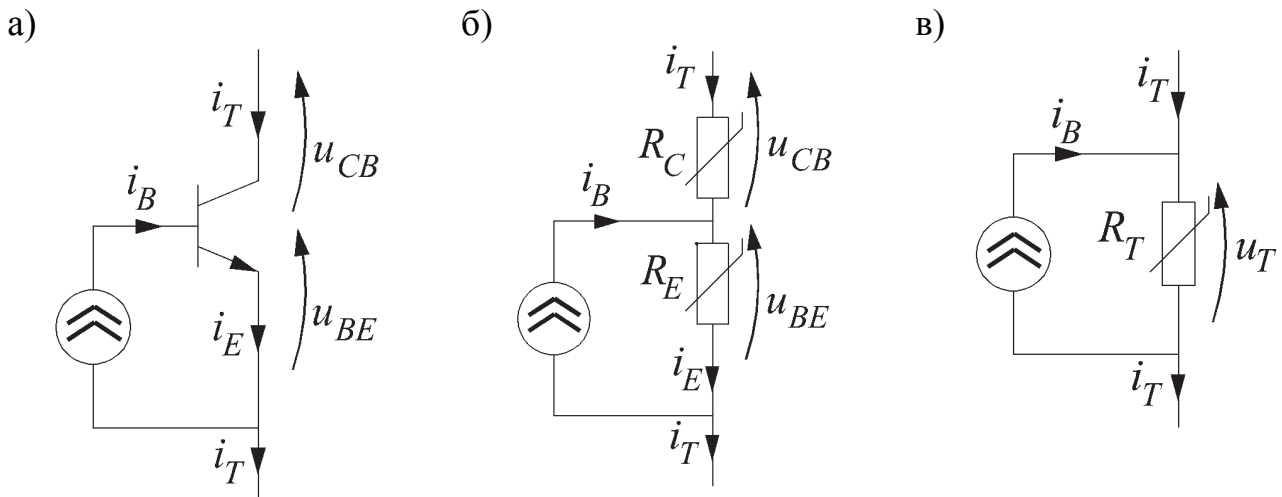


Рис. 3.23. До обґрунтування допущення №3

Вхідною інформацією для розрахунку ВАХ ключа, у цьому випадку є:

- опір ключа у “відкритому” стані – R_{TO} , Ом;
- опір ключа у “закритому” стані – R_{TC} , Ом;
- струм керування – i_B , А;
- “радіус” нелінійної ділянки ВАХ – r_p .

Останній з перерахованих параметр введений для забезпечення неперервності першої похідної ВАХ ключа $\partial u_T / \partial i_T$, що підвищить стійкість алгоритму чисельного інтегрування.

Значення функції $u_T = u_T[i_T]$ та значення похідної $\partial u_T / \partial i_T$ розраховується залежно від знаку та величини струму транзистора за формулами:

- ключ закритий — $i_B = 0$, діапазон зміни струму транзистора $-\infty < i_T < +\infty$, напруга та диференціальний опір, відповідно

$$u_T = R_{TC} \cdot i_T, \quad \frac{du_T}{di_T} = R_{TC}; \quad (3.139)$$

- ключ відкритий — $i_B > 0$, діапазон зміни струму $-\infty < i_T \leq -i_B$, напруга та опір, відповідно

$$u_T = R_{TC} \cdot (i_T + i_B), \quad \frac{du_T}{di_T} = R_{TC}; \quad (3.140)$$

- ключ відкритий — $i_B > 0$, діапазон струму $-i_B < i_T \leq I_{\text{lim}} - i_B$, напруга та опір

$$u_T = \sqrt{r_p^2 - (i_T + i_B - K_1)^2} + K_2, \quad \frac{du_T}{di_T} = \frac{K_1 - i_T - i_B}{\sqrt{r_p^2 - (i_T + i_B - K_1)^2}}; \quad (3.141)$$

- ключ відкритий — $i_B > 0$, діапазон $I_{\text{lim}} - i_B < i_T < +\infty$, напруга та опір

$$u_T = R_{TO}(i_T + i_B) + K_3, \quad \frac{du_T}{di_T} = R_{TO}, \quad (3.142)$$

де $K_1 = r_p \cdot \sin(\arctg(R_{TC}))$, $K_2 = -r_p \cdot \cos(\arctg(R_{TC}))$,

$K_3 = K_2 + r_p \cdot \cos(\arctg(R_{TO})) - R_{TO} \cdot I_{\text{lim}}$ – розрахункові коефіцієнти ВАХ;

$I_{\text{lim}} = K_1 - r_p \cdot \sin(\arctg(R_{TO}))$ – струм ключа, що відповідає точці дотику нелінійної ділянки ВАХ до її прямолінійної ділянки в режимі насичення.

Іншою невід’ємною складовою частиною комутатора є так звані зворотні діоди. Саме вони забезпечують неперервність фазного струму ВБПМ в межах комутаційного кута та захищають силові ключі від комутаційних перенапруг.

ВАХ діодів, схематично зображена на рис. 3.22, б, розраховується аналогічно до ВАХ силових ключів, за формулами (3.139) – (3.142). При цьому струм $i_B = 0$, а прямі і зворотні опори R_{DO} , R_{DC} характеризують тепер “відкритий” і “закритий” стани діода, а не транзистора.

3.3.5. Математичне формулювання задачі та алгоритм її розв’язання

Модель для розрахунку перехідних електромеханічних процесів у ВБПМ поєднує всі методи та алгоритми, що розглядалися в п. 3.3, а саме: ММХ ВБПМ визначається на підставі розрахунку магнітного поля як двовимірної крайової задачі (п. 3.3.2), ММП розраховуються на підставі теорії інваріантного наближення функцій (п. 3.3.3), опис ВАХ напівпровідникових елементів комутатора здійснюється за алгоритмами, розглянутими у п. 3.3.4. Таким чином, ця модель електромеханотронної системи, на нашу думку, найбільш точно та з мінімальною кількістю допущень описує перебіг процесів в вищезгаданій системі та має порівняно вищий рівень адекватності.

Зауважимо, що комутувальний пристрій, залежно від способу керування, може працювати пасивним чи активним випрямлячем, або ж інвертором напруги, а ВБПМ, відповідно, генератором або двигуном.

Принципову схему трифазної ВБПМ разом з комутатором, ДПР та блоком навантаження (в режимі генератора) або блоком живлення (в режимі двигуна) зображено на рис. 3.24.

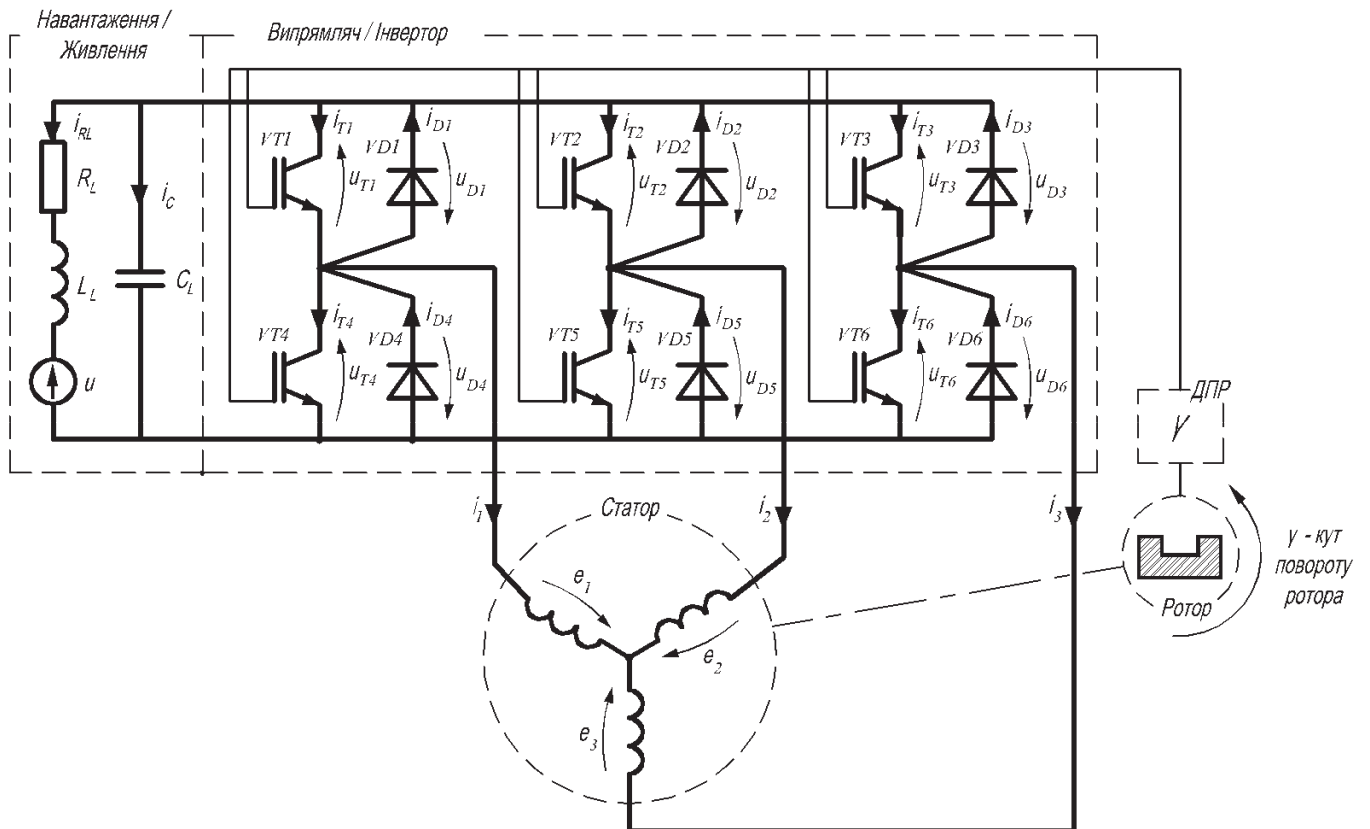


Рис. 3.24. Принципова схема електромеханотронної системи

На підставі законів Кірхгофа для схеми, зображеної на рис. 3.24, запишемо рівняння електричної рівноваги:

$$u + R_L i_{LR} + L_L \frac{di_{LR}}{dt} - u_{LC} = 0; \quad i_{LC} = C_L \frac{du_{LC}}{dt};$$

$$u_{T1} - u_{T2} - R_2 i_2 - \frac{d\psi_2}{dt} + \frac{d\psi_1}{dt} + R_1 i_1 = 0;$$

$$u_{T2} - u_{T3} - R_3 i_3 - \frac{d\psi_3}{dt} + \frac{d\psi_2}{dt} + R_2 i_2 = 0;$$

$$u_{T4} - u_{T5} - R_1 i_1 - \frac{d\psi_1}{dt} + \frac{d\psi_2}{dt} + R_2 i_2 = 0;$$

$$\begin{aligned}
 u_{T5} - u_{T6} - R_2 i_2 - \frac{d\psi_2}{dt} + \frac{d\psi_3}{dt} + R_3 i_3 &= 0; \\
 u_{LC} - u_{T1} - u_{T6} - R_1 i_1 - \frac{d\psi_1}{dt} + \frac{d\psi_3}{dt} + R_3 i_3 &= 0;
 \end{aligned}
 \tag{3.143}$$

$$\begin{aligned}
 i_1 + i_2 + i_3 &= 0; \\
 i_{T1} - i_{D1} - i_{T4} + i_{D4} - i_1 &= 0; \\
 i_{T2} - i_{D2} - i_{T5} + i_{D5} - i_2 &= 0; \\
 i_{T3} - i_{D3} - i_{T6} + i_{D6} - i_3 &= 0; \\
 -i_{T1} + i_{D1} - i_{T2} + i_{D2} - i_{T3} + i_{D3} - i_{LR} - i_{LC} &= 0;
 \end{aligned}
 \tag{3.144}$$

$$\begin{aligned}
 u_{T1} + u_{D1} &= 0; \\
 u_{T2} + u_{D2} &= 0; \\
 u_{T3} + u_{D3} &= 0; \\
 u_{T4} + u_{D4} &= 0; \\
 u_{T5} + u_{D5} &= 0; \\
 u_{T6} + u_{D6} &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{3.145}$$

де R_1, R_2, R_3 – активні опори електричних контурів ВБПМ;

L_L, C_L – індуктивність навантаження та ємність фільтра;

i_{LR}, i_{LC} – струми навантаження та через конденсатор фільтра;

u_{LC} – напруга на конденсаторі фільтра;

$u_{T1}, \dots, u_{T6}, i_{T1}, \dots, i_{T6}$ – спади напруг та струми силових ключів комутатора;

$u_{D1}, \dots, u_{D6}, i_{D1}, \dots, i_{D6}$ – спади напруг та струми зворотних діодів.

Вольт-амперні характеристики напівпровідникових елементів комутатора:

$$\begin{aligned}
 u_{T1} &= u_{T1}[i_{T1}]; & u_{D1} &= u_{D1}[i_{D1}]; \\
 \vdots & & \vdots & \\
 u_{T6} &= u_{T6}[i_{T6}]; & u_{D6} &= u_{D6}[i_{D6}].
 \end{aligned}
 \tag{3.146}
 \tag{3.147}$$

Тут зауважимо, що коефіцієнти ВАХ транзисторів (3.146) змінюються під час розрахунку перехідного процесу в залежності від кута повороту ротора, але цей кут не є аргументом (3.146).

Рівняння механічної рівноваги

$$-J \frac{d\omega}{dt} + M_e - M_s = 0; \quad \omega = \frac{d\gamma}{dt},
 \tag{3.148}$$

де ω – кутова частота обертання ротора;

J – момент інерції обертової частини;

M_s – момент статичного навантаження.

Доповнимо систему (3.143)-(3.148) явною магнітно-механічною характеристикою — сукупністю функцій (3.121). Нагадаємо, що ММХ ВБПМ

формується на підставі розрахунку магнітного поля машини у двовимірній постановці (див. п. 3.3.2).

Система (3.143)-(3.148), (3.121) містить 36 скалярних рівнянь й стільки ж невідомих: $i_1, i_2, i_3, i_{LR}, i_{LC}, u_{LC}, \psi_1, \psi_2, \psi_3, i_{T1}, \dots, i_{T6}, u_{T1}, \dots, u_{T6}, i_{D1}, \dots, i_{D6}, u_{D1}, \dots, u_{D6}, M_e, \omega, \gamma$.

Для переходу до векторної форми запису введемо наступні позначення:

$\vec{i}_L = \|i_{LR} \ i_{LC}\|_*$ – вектор струмів навантаження; $\vec{i}_T = \|i_{T1} \dots i_{T6}\|_*$ – вектор струмів силових ключів; $\vec{u}_T = \|u_{T1} \dots u_{T6}\|_*$ – вектор напруг на ключах; $\vec{i}_D = \|i_{D1} \dots i_{D6}\|_*$ – вектор струмів діодів; $\vec{u}_D = \|u_{D1} \dots u_{D6}\|_*$ – вектор напруг на діодах; $\vec{u} = \|u \ 0\|_*$ – вектор напруг живлення;

$$\mathbf{R}_f = \begin{pmatrix} r_1 & -r_2 & 0 \\ 0 & r_2 & -r_3 \\ -r_1 & r_2 & 0 \\ 0 & -r_2 & r_3 \\ -r_1 & 0 & r_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C}_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{P}_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K}_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C}_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (3.149)$$

$$\mathbf{E}_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & C_L \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Z}_L = \begin{pmatrix} R_L & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{P}_L = \begin{pmatrix} L_L & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K}_L = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– матричні коефіцієнти векторних рівнянь.

Перепишемо систему (3.143)-(3.148), (3.121) у векторній формі, з урахуванням прийнятих позначень:

$$\mathbf{C}_f \vec{u}_T + \mathbf{R}_f \vec{i} + \mathbf{P}_f \frac{d\vec{\psi}}{dt} + \mathbf{K}_f u_c = 0; \quad \vec{u} + \mathbf{Z}_L \vec{i}_L + \mathbf{P}_L \frac{d\vec{i}_L}{dt} + \mathbf{K}_L u_{LC} + \mathbf{S}(\vec{i}_D - \vec{i}_T) = 0;$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_L \vec{i}_L - \frac{du_{LC}}{dt} &= 0; & \vec{u}_T &= \vec{u}_T[\vec{i}_T] & \vec{u}_D &= \vec{u}_D[\vec{i}_D] \\
\mathbf{C}_I \vec{i}_T - \mathbf{C}_I \vec{i}_D - \vec{i} &= 0; & \vec{\psi} &= \vec{\psi}[\vec{i}, \gamma] & M_e &= M_e[\vec{i}, \gamma] \\
\vec{u}_T + \vec{u}_D &= 0; & -J \frac{d\omega}{dt} + M_e - M_s &= 0; & \omega &= \frac{d\varrho}{dt}.
\end{aligned} \quad (3.150)$$

Система (3.150) складається з 11 рівнянь і містить стільки ж невідомих: \vec{i} , \vec{i}_L , \vec{i}_D , \vec{i}_T , u_{LC} , \vec{u}_D , \vec{u}_T , $\vec{\psi}$, M_e , ω , γ . Якщо доповнити її початковою умовою

$$\vec{i} = \vec{i}_0; \quad \vec{i}_H = \vec{i}_{H0}; \quad \vec{i}_D = \vec{i}_{D0}; \quad \vec{i}_T = \vec{i}_{T0}; \quad \omega = \omega_0; \quad \gamma = \gamma_0, \quad (3.151)$$

то отримуємо зміст задачі Коші.

Розв'язуватимемо (3.150) методом формул диференціювання назад (ФДН).

Після алгебризації похідних на k -му кроці інтегрування отримуємо

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_f \vec{u}_{Tk} + \mathbf{R}_f \vec{i}_k + \mathbf{P}_f (b_0 \vec{\psi}_k + \sum_{g=1}^Q b_g \vec{\psi}_{k-g}) + \mathbf{K}_f u_{LCk} &= 0; \\
\vec{u}_k + \mathbf{Z}_L \vec{i}_{Lk} + \mathbf{P}_L (b_0 \vec{i}_{Lk} + \sum_{g=1}^Q b_g \vec{i}_{Lk-g}) + \mathbf{K}_L u_{LCk} + \mathbf{S} (\vec{i}_{Dk} - \vec{i}_{Tk}) &= 0; \\
\mathbf{E}_L \vec{i}_{Lk} - \left(b_0 u_{LCk} + \sum_{g=1}^Q b_g u_{LCk-g} \right) &= 0; & \mathbf{C}_I \vec{i}_{Tk} - \mathbf{C}_I \vec{i}_{Dk} - \vec{i}_k &= 0; \\
\vec{u}_{Tk} = \vec{u}_T[\vec{i}_{Tk}] & & \vec{u}_{Tk} + \vec{u}_{Dk} &= 0; & \vec{u}_{Dk} &= \vec{u}_D[\vec{i}_{Dk}] \\
\vec{\psi}_k = \vec{\psi}[\vec{i}_k, \gamma_k] & & & & M_k &= M[\vec{i}_k, \gamma_k] \\
-J (b_0 \omega_k + \sum_{g=1}^Q b_g \omega_{k-g}) + M_{ek} - M_{sk} &= 0; & \omega_k &= b_0 \gamma_k + \sum_{g=1}^Q b_g \gamma_{k-g},
\end{aligned} \quad (3.152)$$

де \vec{i}_k , \vec{i}_{Lk} , \vec{i}_{Dk} , \vec{i}_{Tk} , u_{LCk} , \vec{u}_{Dk} , \vec{u}_{Tk} , $\vec{\psi}_k$, M_{ek} , ω_k , γ_k – значення невідомих на k -му кроці інтегрування методу ФДН;

\vec{i}_{Lk-g} , u_{LCk-g} , $\vec{\psi}_{k-g}$, ω_{k-g} , γ_{k-g} – значення, відомі з $(k-1)$ -го кроку інтегрування.

На цьому етапі виведемо формулу для визначення напруг на конденсаторах навантаження:

$$u_{LCk} = \frac{1}{b_0} \left(\mathbf{E}_L \vec{i}_{Lk} - \sum_{g=1}^Q b_g u_{LCk-g} \right). \quad (3.153)$$

САР (3.152) з урахуванням (3.153) набуває виду

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_f \vec{u}_{Tk} + \mathbf{R}_f \vec{i}_k + \mathbf{P}_f (b_0 \vec{\psi}_k + \sum_{g=1}^Q b_g \vec{\psi}_{k-g}) + \mathbf{K}_f u_{LCk} &= 0; \\
\vec{u}_k + \mathbf{Z}_L \vec{i}_{Lk} + \mathbf{P}_L (b_0 \vec{i}_{Lk} + \sum_{g=1}^Q b_g \vec{i}_{Lk-g}) + \mathbf{K}_L u_{LCk} + \mathbf{S}(\vec{i}_{Dk} - \vec{i}_{Tk}) &= 0; \\
u_{LCk} = \frac{1}{b_0} \left(\mathbf{E}_L \vec{i}_{Lk} - \sum_{g=1}^Q b_g u_{LCk-g} \right); & \quad \mathbf{C}_I \vec{i}_{Tk} - \mathbf{C}_I \vec{i}_{Dk} - \vec{i}_k = 0; \\
\vec{u}_{Tk} = \vec{u}_T [\vec{i}_{Tk}] & \quad \vec{u}_{Dk} = \vec{u}_D [\vec{i}_{Dk}] & \quad \vec{u}_{Tk} + \vec{u}_{Dk} = 0; \\
\vec{\psi}_k = \vec{\psi} [\vec{i}_k, \gamma_k] & \quad M_{ek} = M_e [\vec{i}_k, z_k]; & \quad \omega_k = b_0 \gamma_k + \sum_{g=1}^Q b_g \gamma_{k-g}; \\
-J(b_0 \omega_k + \sum_{g=1}^Q b_g \omega_{k-g}) + M_{ek} - M_{sk} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.154}$$

САР (3.154) є нелінійною внаслідок нелінійної ММХ та ВАХ напівпровідникових елементів схеми. Розв'язуватимемо її методом Ньютона.

Лінійна САР, породжена нелінійною (3.154), на l -ій ітерації методу Ньютона має вигляд

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_f \Delta \vec{u}_{Tk}^{(l)} + \mathbf{R}_f \Delta \vec{i}_k^{(l)} + b_0 \mathbf{P}_f \Delta \vec{\psi}_k^{(l)} + \mathbf{K}_f \Delta u_{LCk}^{(l)} &= -\vec{y}_{1k}^{(l-1)}; \\
\mathbf{Z}_L \Delta \vec{i}_{Lk}^{(l)} + b_0 \mathbf{P}_L \Delta \vec{i}_{Lk}^{(l)} + \mathbf{K}_L \Delta u_{LCk}^{(l)} + \mathbf{S}(\Delta \vec{i}_{Dk}^{(l)} - \Delta \vec{i}_{Tk}^{(l)}) &= -\vec{y}_{2k}^{(l-1)}; \\
\Delta u_{LCk}^{(l)} = \frac{1}{b_0} \mathbf{E}_L \Delta \vec{i}_{Lk}^{(l)}; & \quad \mathbf{C}_I \Delta \vec{i}_{Tk}^{(l)} - \mathbf{C}_I \Delta \vec{i}_{Dk}^{(l)} - \Delta \vec{i}_k^{(l)} = -y_{3k}^{(l-1)}; \\
\Delta \vec{u}_{Tk}^{(l)} = \mathbf{R}_{Tk}^{(l-1)} \Delta \vec{i}_{Tk}^{(l)}; & \quad \Delta \vec{u}_{Dk}^{(l)} = \mathbf{R}_{Dk}^{(l-1)} \Delta \vec{i}_{Dk}^{(l)}; \\
\Delta \vec{\psi}_k^{(l)} = \mathbf{L}_k^{(l-1)} \Delta \vec{i}_k^{(l)} + \mathbf{K}_k^{(l-1)} \Delta \gamma_k^{(l)}; & \quad \Delta M_{ek}^{(l)} = \mathbf{K}_k'^{(l-1)} \Delta \vec{i}_k^{(l)} + G_k^{(l-1)} \Delta \gamma_k^{(l)}; \\
\Delta \vec{u}_{Tk}^{(l)} + \Delta \vec{u}_{Dk}^{(l)} = -\vec{y}_{4k}^{(l-1)}; & \quad \Delta \omega_k^{(l)} = b_0 \Delta \gamma_k^{(l)}; \\
-J b_0 \Delta \omega_k^{(l)} + \Delta M_{ek}^{(l)} = -y_{5k}^{(l-1)}, &
\end{aligned} \tag{3.155}$$

де $\Delta \vec{i}_k^{(l)}, \Delta \vec{i}_{Lk}^{(l)}, \Delta \vec{i}_{Dk}^{(l)}, \Delta \vec{i}_{Tk}^{(l)}, \Delta u_{LCk}^{(l)}, \Delta \vec{u}_{Dk}^{(l)}, \Delta \vec{u}_{Tk}^{(l)}, \Delta \vec{\psi}_k^{(l)}, \Delta M_{ek}^{(l)}, \Delta \omega_k^{(l)}, \Delta \gamma_k^{(l)}$ – поправки невідомих на l -ій ітерації k -го кроку інтегрування;

$$\mathbf{R}_{\mathbf{T}k}^{(l-1)} = \left. \frac{\partial \vec{u}_{Tk}}{\partial \vec{i}_{Tk}} \right|_{\vec{i}_{Tk} = \vec{i}_{Tk}^{(l-1)}}; \quad \mathbf{R}_{\mathbf{D}k}^{(l-1)} = \left. \frac{\partial \vec{u}_{Dk}}{\partial \vec{i}_{Dk}} \right|_{\vec{i}_{Dk} = \vec{i}_{Dk}^{(l-1)}} \quad - \text{діагональні матриці диференційних опорів транзисторів та діодів, які обчислюються за } (l-1)\text{-им наближенням}$$

кореня (див. п. 3.3.4);

$$\mathbf{L}_k^{(l-1)} = \left. \frac{\partial \vec{\psi}_k}{\partial \vec{i}_k} \right|_{\vec{i}_k = \vec{i}_k^{(l-1)}}; \quad \mathbf{K}_k^{(l-1)} = \left. \frac{\partial \vec{\psi}_k}{\partial \gamma_k} \right|_{\gamma_k = \gamma_k^{(l-1)}}; \quad \mathbf{K}_k^{\prime(l-1)} = \left. \frac{\partial M_{ek}}{\partial \vec{i}_k} \right|_{\vec{i}_k = \vec{i}_k^{(l-1)}};$$

$$G_k^{(l-1)} = \left. \frac{\partial M_{ek}}{\partial \gamma_k} \right|_{\gamma_k = \gamma_k^{(l-1)}} \quad - \text{магніто-механічні параметри ВБПМ, які обчислюються за}$$

$(l-1)$ -им наближенням кореня (див. п. 3.3.3);

$$\begin{aligned} \vec{y}_{1k}^{(l-1)} &= \mathbf{C}_f \vec{u}_{Tk}^{(l-1)} + \mathbf{R}_f \vec{i}_k^{(l-1)} + \mathbf{P}_f \left(b_0 \vec{\psi}_k^{(l-1)} + \sum_{g=1}^Q b_g \vec{\psi}_{k-g} \right) + \mathbf{K}_f u_{LCk}^{(l-1)}; \\ \vec{y}_{2k}^{(l-1)} &= \vec{u}_k + \mathbf{Z}_L \vec{i}_{Lk}^{(l-1)} + \mathbf{P}_L \left(b_0 \vec{i}_{Lk}^{(l-1)} + \sum_{g=1}^Q b_g \vec{i}_{Lk-g} \right) + \mathbf{K}_L u_{LCk}^{(l-1)} + \mathbf{S} \left(\vec{i}_{Dk}^{(l-1)} - \Delta \vec{i}_{Tk}^{(l-1)} \right); \\ \vec{y}_{3k}^{(l-1)} &= \mathbf{C}_I \vec{i}_{Tk}^{(l-1)} - \mathbf{C}_I \vec{i}_{Dk}^{(l-1)} - \vec{i}_k^{(l-1)}; \\ \vec{y}_{4k}^{(l-1)} &= \vec{u}_{Tk}^{(l-1)} + \vec{u}_{Dk}^{(l-1)}; \\ y_{5k}^{(l-1)} &= -J \left(b_0 \omega_k^{(l-1)} + \sum_{g=1}^Q b_g \omega_{k-g} \right) + M_{ek}^{(l-1)} - M_{sk}^{(l-1)}, \end{aligned} \quad (3.156)$$

– нев'язки рівнянь стандартного виду системи (3.154), отримані за $(l-1)$ -им наближенням кореня.

Оскільки лінійна САР (3.156) містить лише 5 рівнянь стандартного виду, а решта виразів є формулами, спростимо її шляхом вилучення невідомих, що обчислюються за формулами. Тобто

$$\mathbf{C}_f \mathbf{R}_{\mathbf{T}k}^{(l-1)} \Delta \vec{i}_{Tk}^{(l)} + \mathbf{R}_f \Delta \vec{i}_k^{(l)} + b_0 \mathbf{P}_f \mathbf{L}_k^{(l-1)} \Delta \vec{i}_k^{(l)} + b_0 \mathbf{P}_f \mathbf{K}_k^{(l-1)} \Delta \gamma_k^{(l)} + \frac{1}{b_0} \mathbf{K}_f \mathbf{E}_L \Delta \vec{i}_{Lk}^{(l)} = -\vec{y}_{1k}^{(l-1)};$$

$$\mathbf{Z}_L \Delta \vec{i}_{Lk}^{(l)} + b_0 \mathbf{P}_L \Delta \vec{i}_{Lk}^{(l)} + \frac{1}{b_0} \mathbf{K}_L \mathbf{E}_L \Delta \vec{i}_{Lk}^{(l)} + \mathbf{S} \Delta \vec{i}_{Dk}^{(l)} - \mathbf{S} \Delta \vec{i}_{Tk}^{(l)} = -\vec{y}_{2k}^{(l-1)};$$

$$\mathbf{C}_I \Delta \vec{i}_{Tk}^{(l)} - \mathbf{C}_I \Delta \vec{i}_{Dk}^{(l)} - \Delta \vec{i}_k^{(l)} = -\vec{y}_{3k}^{(l-1)};$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{T}k}^{(l-1)} \Delta \bar{i}_{\mathbf{T}k}^{(l)} + \mathbf{R}_{\mathbf{D}k}^{(l-1)} \Delta \bar{i}_{\mathbf{D}k}^{(l)} &= -\bar{y}_{4k}^{(l-1)}; \\ -Jb_0^2 \Delta \gamma_k^{(l)} + \mathbf{K}_k'^{(l-1)} \Delta \bar{i}_k^{(l)} + G_k^{(l-1)} \Delta \gamma_k^{(l)} &= -y_{5k}^{(l-1)}. \end{aligned} \quad (3.157)$$

Четверте рівняння системи (3.157) легко розв'язується відносно поправки $\Delta \bar{i}_{\mathbf{T}k}^{(l)}$:

$$\Delta \bar{i}_{\mathbf{T}k}^{(l)} = \left(\mathbf{R}_{\mathbf{T}k}^{(l-1)} \right)^{-1} \left(-y_{4k}^{(l-1)} - \mathbf{R}_{\mathbf{D}k}^{(l-1)} \Delta \bar{i}_{\mathbf{D}k}^{(l)} \right). \quad (3.158)$$

Необхідність знаходження оберненої матриці $\left(\mathbf{R}_{\mathbf{T}k}^{(l-1)} \right)^{-1}$, на кожній ітерації методу Ньютона, не викличе істотного збільшення часу розрахунку, оскільки матриця $\mathbf{R}_{\mathbf{T}}$ є діагональною.

Вилучимо поправку $\Delta \bar{i}_{\mathbf{T}k}^{(l)}$ з САР (3.157):

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{R}_{\mathbf{f}} + b_0 \mathbf{P}_{\mathbf{f}} \mathbf{L}_k^{(l-1)} \right) \Delta \bar{i}_k^{(l)} + \left(-\mathbf{C}_{\mathbf{f}} \mathbf{R}_{\mathbf{D}k}^{(l-1)} \right) \Delta \bar{i}_{\mathbf{D}k}^{(l)} + \left(\frac{1}{b_0} \mathbf{K}_{\mathbf{f}} \mathbf{E}_{\mathbf{L}} \right) \Delta \bar{i}_{\mathbf{L}k}^{(l)} + \\ &+ \left(b_0 \mathbf{P}_{\mathbf{f}} \mathbf{K}_k^{(l-1)} \right) \Delta \gamma_k^{(l)} = -\bar{y}_{1k}^{(l-1)} + \mathbf{C}_{\mathbf{f}} \bar{y}_{4k}^{(l-1)}; \\ &\left(\mathbf{S} \left(\mathbf{R}_{\mathbf{T}k}^{(l-1)} \right)^{-1} \mathbf{R}_{\mathbf{D}k}^{(l-1)} + \mathbf{S} \right) \Delta \bar{i}_{\mathbf{D}k}^{(l)} + \left(\mathbf{Z}_{\mathbf{L}} + b_0 \mathbf{P}_{\mathbf{L}} + \frac{1}{b_0} \mathbf{K}_{\mathbf{L}} \mathbf{E}_{\mathbf{L}} \right) \Delta \bar{i}_{\mathbf{L}k}^{(l)} = \\ &= -\bar{y}_{2k}^{(l-1)} - \mathbf{S} \left(\mathbf{R}_{\mathbf{T}k}^{(l-1)} \right)^{-1} \bar{y}_{4k}^{(l-1)}; \\ &-\Delta \bar{i}_k^{(l)} + \left(-\mathbf{C}_{\mathbf{I}} \left(\mathbf{R}_{\mathbf{T}k}^{(l-1)} \right)^{-1} \mathbf{R}_{\mathbf{D}k}^{(l-1)} - \mathbf{C}_{\mathbf{I}} \right) \Delta \bar{i}_{\mathbf{D}k}^{(l)} = -y_{3k}^{(l-1)} + \mathbf{C}_{\mathbf{I}} \left(\mathbf{R}_{\mathbf{T}k}^{(l-1)} \right)^{-1} \bar{y}_{4k}^{(l-1)}; \\ &\mathbf{K}_k'^{(l-1)} \Delta \bar{i}_k^{(l)} + \left(G_k^{(l-1)} - Jb_0^2 \right) \Delta \gamma_k^{(l)} = -y_{5k}^{(l-1)}. \end{aligned} \quad (3.159)$$

Остаточно, отримуємо лінійну систему чотирьох векторних рівнянь

$$\left\| \begin{array}{cccc} \mathbf{R}_{\mathbf{f}} + b_0 \mathbf{P}_{\mathbf{f}} \mathbf{L}_k^{(l-1)} & -\mathbf{C}_{\mathbf{f}} \mathbf{R}_{\mathbf{D}k}^{(l-1)} & \frac{1}{b_0} \mathbf{K}_{\mathbf{f}} \mathbf{E}_{\mathbf{L}} & b_0 \mathbf{P}_{\mathbf{f}} \mathbf{K}_k^{(l-1)} \\ 0 & \mathbf{S} \left(\mathbf{R}_{\mathbf{T}k}^{(l-1)} \right)^{-1} \mathbf{R}_{\mathbf{D}k}^{(l-1)} + \mathbf{S} & \mathbf{Z}_{\mathbf{L}} + b_0 \mathbf{P}_{\mathbf{L}} + \frac{1}{b_0} \mathbf{K}_{\mathbf{L}} \mathbf{E}_{\mathbf{L}} & 0 \\ -1 & -\mathbf{C}_{\mathbf{I}} \left(\mathbf{R}_{\mathbf{T}k}^{(l-1)} \right)^{-1} \mathbf{R}_{\mathbf{D}k}^{(l-1)} - \mathbf{C}_{\mathbf{I}} & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_k'^{(l-1)} & 0 & 0 & G_k^{(l-1)} - Jb_0^2 \end{array} \right\| \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \Delta \bar{i}_k^{(l)} \\ \Delta \bar{i}_{Dk}^{(l)} \\ \Delta \bar{i}_{Lk}^{(l)} \\ \Delta \gamma_k^{(l)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \bar{y}_{1k}^{(l-1)} - \mathbf{C}_f \bar{y}_{4k}^{(l-1)} \\ \bar{y}_{2k}^{(l-1)} + \mathbf{S} \left(\mathbf{R}_{Tk}^{(l-1)} \right)^{-1} \bar{y}_{4k}^{(l-1)} \\ \bar{y}_{3k}^{(l-1)} - \mathbf{C}_I \left(\mathbf{R}_{Tk}^{(l-1)} \right)^{-1} \bar{y}_{4k}^{(l-1)} \\ y_{5k}^{(l-1)} \end{pmatrix}, \quad (3.160)$$

з чотирма векторними невідомими — поправками $\Delta \bar{i}_k^{(l)}$, $\Delta \bar{i}_{Dk}^{(l)}$, $\Delta \bar{i}_{Lk}^{(l)}$, $\Delta \gamma_k^{(l)}$.

Отже, алгоритм виконання k -го кроку інтегрування наступний:

1. Сформувати сталі матриці \mathbf{R}_f , \mathbf{C}_f , \mathbf{P}_f , \mathbf{K}_f , \mathbf{C}_I , \mathbf{R}_f , \mathbf{E}_L , \mathbf{Z}_L , \mathbf{P}_L , \mathbf{K}_L , \mathbf{S} .
2. За $(l-1)$ -им наближенням кореня обчислити значення нев'язок (3.156).
3. За $(l-1)$ -им наближенням кореня обчислити значення диференціальних параметрів $\mathbf{R}_{Tk}^{(l-1)}$, $\mathbf{R}_{Dk}^{(l-1)}$ та ММП $\mathbf{L}_k^{(l-1)}$, $\mathbf{K}_k^{(l-1)}$, $\mathbf{K}_k'^{(l-1)}$, $G_k^{(l-1)}$.
4. Обчислити значення коефіцієнтів та правих частин лінійної САР (3.160).
5. Розв'язати САР (3.160) відносно невідомих значень поправок $\Delta \bar{i}_k^{(l)}$, $\Delta \bar{i}_{Dk}^{(l)}$, $\Delta \bar{i}_{Lk}^{(l)}$, $\Delta \gamma_k^{(l)}$.
6. За (3.158) обчислити значення поправки $\Delta \bar{i}_{Tk}^{(l)}$.
7. Розрахувати l -те наближення невідомих за формулами

$$\begin{aligned} \bar{i}_k^{(l)} &= \bar{i}_k^{(l-1)} + \Delta \bar{i}_k^{(l)}; & \gamma_k^{(l)} &= \gamma_k^{(l-1)} + \Delta \gamma_k^{(l)}; \\ \bar{i}_{Dk}^{(l)} &= \bar{i}_{Dk}^{(l-1)} + \Delta \bar{i}_{Dk}^{(l)}; & \bar{i}_{Tk}^{(l)} &= \bar{i}_{Tk}^{(l-1)} + \Delta \bar{i}_{Tk}^{(l)}; \\ \bar{i}_{Lk}^{(l)} &= \bar{i}_{Lk}^{(l-1)} + \Delta \bar{i}_{Lk}^{(l)}. \end{aligned} \quad (3.161)$$

8. Решта невідомих обчислити за формулами

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_k^{(l)} &= \bar{\psi} \left[\bar{i}_k^{(l)}, \gamma_k^{(l)} \right]; & M_{ek}^{(l)} &= M_e \left[\bar{i}_k^{(l)}, c_k^{(l)} \right]; \\ \bar{u}_{Dk}^{(l)} &= \bar{u}_D \left[\bar{i}_{Dk}^{(l)} \right]; & \bar{u}_{Tk}^{(l)} &= \bar{u}_T \left[\bar{i}_{Tk}^{(l)} \right]; \\ u_{LCk}^{(l)} &= \frac{1}{b_0} \left(\mathbf{E}_L \bar{i}_{Lk}^{(l)} - \sum_{g=1}^Q b_g u_{LCk-g} \right); & \omega_k^{(l)} &= b_0 \gamma_k^{(l)} + \sum_{g=1}^Q b_g \gamma_{k-g}. \end{aligned} \quad (3.162)$$

Якщо точність визначення поправок невідомих незадовільна — повторити п. 2-8. У протилежному випадку — перейти до виконання наступного кроку інтегрування.

Запропонований алгоритм реалізований у вигляді комп'ютерної програми. Для її відлагодження та з метою перевірки адекватності моделі ВБПМ, було проведено низку математичних експериментів на прикладі машини потужністю 100 кВА, номінальною частотою обертання 30000 об/хв. Її головні розміри: розрахункова довжина осердя – 200 мм, діаметр розточки статора – 91 мм. Повітряний проміжок становить 3 мм, пази на статорі напівзакриті. Рівень дискретизації розрахункової області показано на рис. 3.17 (зліва).

Результати розрахунку перехідного процесу показано на рис. 3.25 – рис. 3.28. Загальна тривалість даного розрахунку, що проводився на комп'ютері Intel Core™ 2 Quad Q6600 2,8 ГГц; 3,24 ГБ RAM, становила ≈ 170 год.

У часовому діапазоні $4,0 \div 5,8$ мс машина перебувала в режимі генератора під навантаженням ≈ 23 кВА. Частота обертання в цьому режимі була незмінною й становила 30000 об/хв. Далі ($5,8 \div 7,0$ мс) здійснено скидання навантаження практично до неробочого ходу, частота обертання не змінювалася. В діапазоні $7,0 \div 12,0$ мс відбувся перехід в режим двигуна. Навантаження на валу встановлено на рівні 3,2 Нм, а напруга живлення — 550 В (DC). Й, нарешті, в діапазоні $12,0 \div 17,0$ мс розраховувалося раптове навантаження двигуна до 16 Нм на валу.

Для мінімізації похибок за обчислення тригонометричних функцій, всі кутові величини зводяться до діапазону $0 \div 2\pi$ рад. Тому залежність кута повороту на рис. 3.26 має саме такий вигляд.

Для перевірки правильності фазування струмів, на одному графіку рис. 3.25, зображено ЕРС 1-ої фази та відповідний фазний струм. Як видно з рисунку, ці величин знаходяться у фазі в режимі генератора й у протифазі в режимі двигуна, отже, саме за такого зсуву машина віддаватиме максимальну потужність або розвиватиме максимально можливий момент та працюватиме з найвищою віддачею.

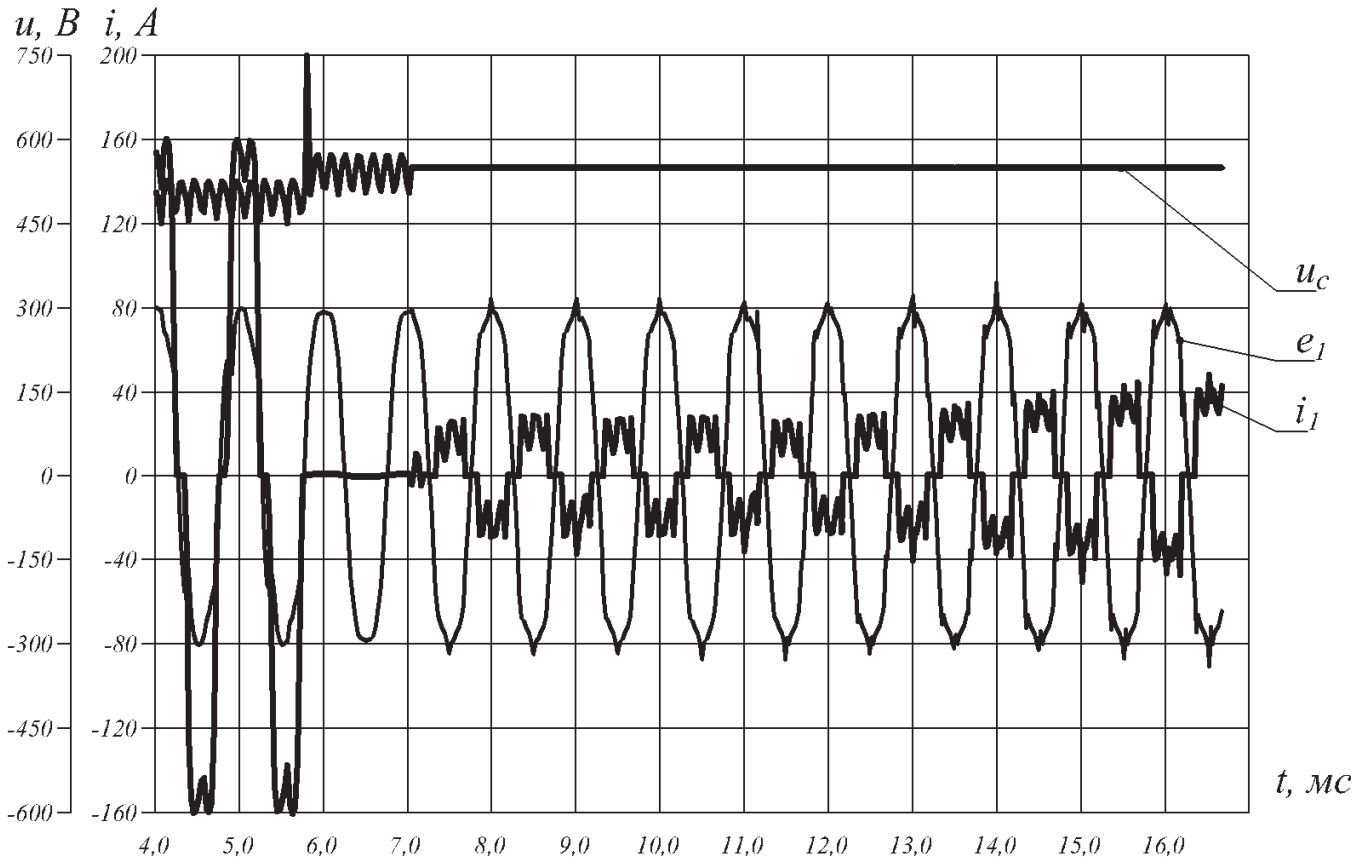


Рис. 3.25. Залежності від часу фазного струму, фазної ЕРС та напруги DC

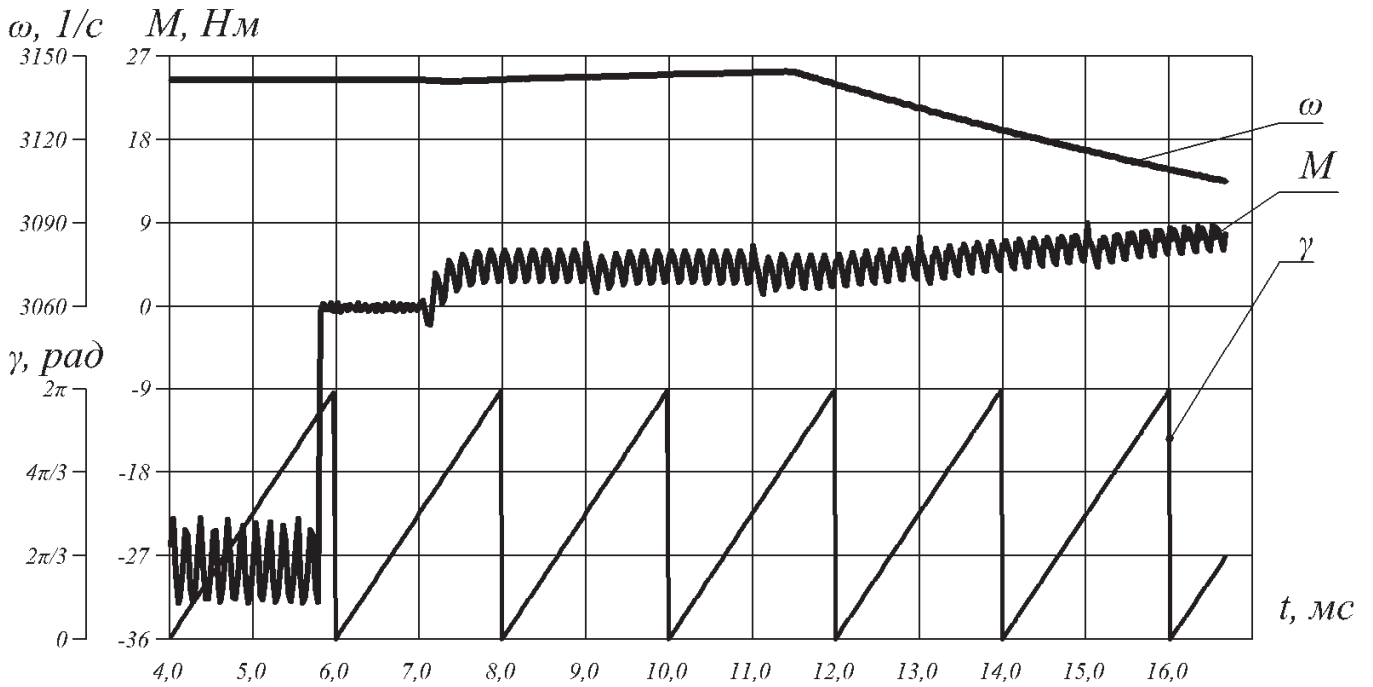


Рис. 3.26. Залежності від часу частоти обертання, електромагнітного моменту, та кута повороту ротора

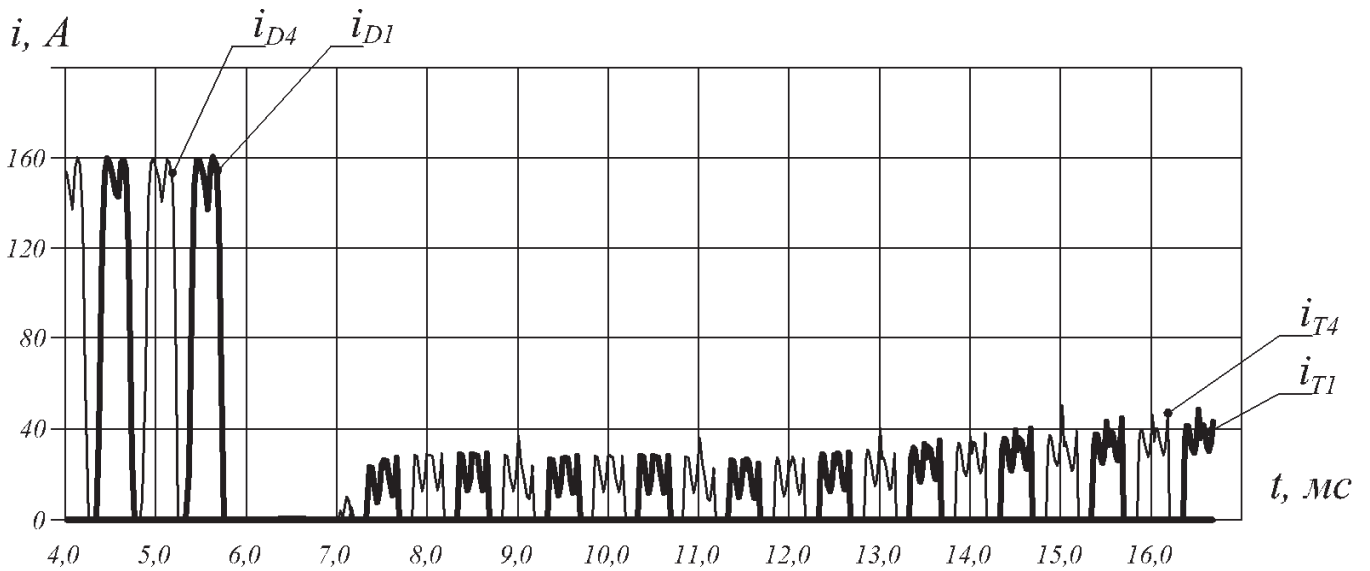


Рис. 3.27. Залежності від часу струмів транзисторів та діодів у плечі комутатора в режимах випрямляча та інвертора

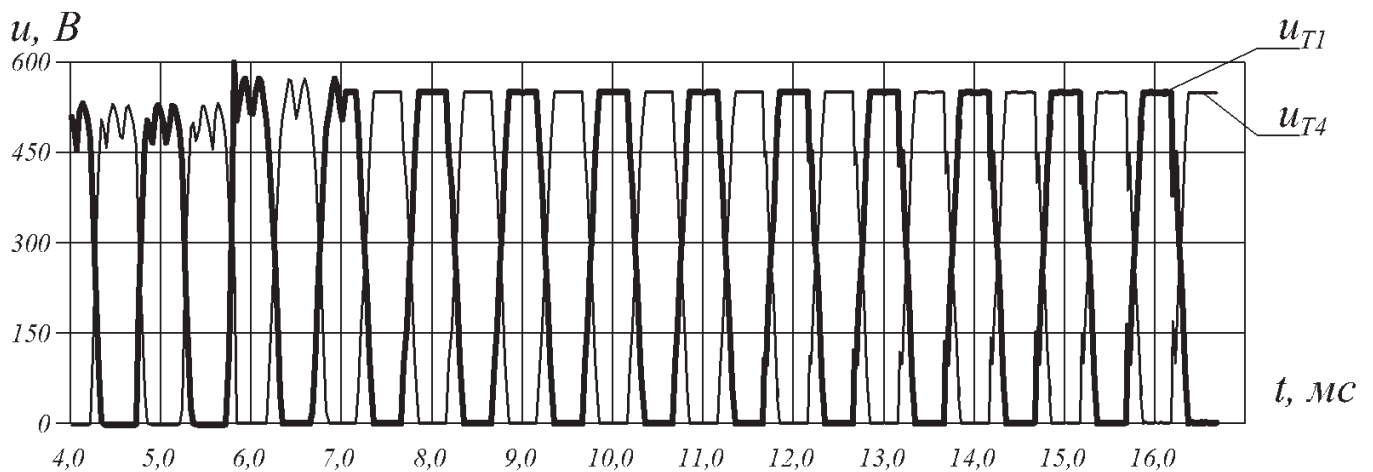


Рис. 3.28. Залежності від часу напруг транзисторів у плечі комутатора в режимах випрямляча та інвертора

Проведені експерименти показали, що величину кроку інтегрування доцільно вибрати обернено пропорційною до частоти обертання $h \approx \frac{4\pi}{(25 \div 50)p|\omega|}$ с, а масштабні коефіцієнти (3.134) в даному випадку — для фазних струмів 1,0 А, для кута повороту 0,0523 рад ($\approx 3^\circ$).

Аналіз розглянутих режимів на якісному рівні дає право стверджувати, що запропоновані у п.п. 3.3.2 – 3.3.4 алгоритми розрахунку ММХ ВБІМ, ММП та ВАХ

напівпровідникових елементів коректно взаємодіють з алгоритмом чисельного інтегрування САДР (3.150).

На завершення можна сказати, що картина перебігу перехідних та усталених процесів, отримана розрахунковим шляхом за допомогою математичної моделі ВБПМ не суперечить фізиці явищ, що відбуваються в такій машині, а її кількісний аналіз підтверджує правильність запропонованого алгоритму розрахунку.

Використання для опису ММХ рівнянь магнітного поля у квазістаціонарному наближенні робить модель в цілому більш адекватною, ніж існуючі колові моделі аналогічного призначення.

Висновки до розділу

1. Зв'язок між головними розмірами та електромагнітними навантаженнями, що враховує формула Арнольда, у високошвидкісних машинах не може вважатися самодостатнім. У цьому випадку вимоги до механічної міцності та жорсткості обертової частини матимуть пріоритетне значення.

2. Додаткові втрати в обмотці статора ВБПМ можуть у кілька разів перевищувати основні втрати в міді.

3. Для зменшення додаткових втрат в обмотці статора ВБПМ радіальний розмір елементарного провідника повинен бути меншим глибини проникнення поля у матеріал обмотки за номінальної частоти струму.

4. Для зменшення основних втрат у магнітопроводі, допустимі значення магнітної індукції у зубцях не повинні перевищувати $1,0 \div 1,3$ Тл, а у ярмі статора — $0,8 \div 1,1$ Тл.

5. Величина робочого повітряного проміжку повинна визначатися з умови запобігання незворотного розмагнічування полюсів індуктора струмом перевантаження.

6. Формулювання задачі розрахунку усталеного значення напруги ВБПМ у режимі генератора від струму навантаження з використанням d, q перетворення координат дає змогу побудувати ефективний алгоритм, що не потребує виконання чисельного інтегрування САДР по часу.

7. Для адекватного розрахунку залежності частоти обертання ВБПМ у режимі двигуна від моменту навантаження, необхідно враховувати особливості комутаційного процесу машин типу BLDC.

8. Величина додаткових втрат в обмотці, ефективні провідники якої складаються з великої кількості елементарних, яка розрахована на підставі функцій Емде, істотно менша (>30%) порівняно зі значенням, отриманим чисельним способом.

9. Насичення зубцевої зони статора полем індуктора у взаємозв'язку з полем пазового розсіювання стає причиною зменшення прояву ефекту витіснення струму та сприяє зниженню додаткових втрат в обмотці. З іншого боку, насичення цієї частини магнітопроводу призводить до збільшення основних втрат в матеріалі осердя.

10. За використання відкритих пазів спостерігається істотне відгалуження магнітного потоку в паз. Вихрові струми, спричинені цим, можуть викликати надмірний нагрів провідників обмотки, розташованих в околі відкриття паза. В цьому випадку рекомендуємо розташовувати котушки в пазу на глибині, що перевищує ширину паза.

11. Особливості конструкції осердя статора ВБПМ та підвищена частота його перемагнічування змушують відмовитись від традиційного методу розрахунку основних втрат в магнітопроводі. Натомість, пропонуємо алгоритм, що відокремлює кожен з причин виникнення основних втрат — гістерезис, вихрові струми, неоднорідність ступеня намагнічування, та надає можливість провести обчислення з урахуванням довільної частоти, реальних значень індукції та товщини листів осердя статора.

12. Гармоніка магнітного поля зубцевого порядку, що обертається відносно ротора з частотою $Zn_n/60$ спричиняє появу вихрових струмів у тілі полюсів та у валі, за умови використання електропровідних матеріалів. Результати аналітичних та чисельних розрахунків відповідних втрат, взаємно підтверджуючи один одного на кількісному рівні, дає змогу рекомендувати наступне:

- використання відкритого прямокутного паза в статорних осердях ВБПМ є

небажаним; це пов'язано з потенційною небезпекою збільшення поверхневих та пульсаційних втрат у роторі до неприпустимо великого значення, що призводитиме до термічного розмагнічування або навіть руйнування полюсів;

- за необхідності використання провідників обмотки прямокутного перетину пропонуємо обирати напівзакриті прямокутні пази та, як наслідок, стрижньові хвилеві статорні обмотки.

13. Алгоритм розрахунку явної ММХ ВБПМ як залежності повних потокозчеплень електричних контурів статора й електромагнітного моменту від струмів у цих контурах і кута повороту ротора, побудований на підставі квазістаціонарного наближення магнітного поля машини у двовимірній постановці, придатний не лише за розрахунку динамічних процесів, а й на етапах первинного проектування допомагає у визначенні ustalених значень режимних величин та оптимізації розмірів, обмоткових даних тощо.

14. Алгоритм розрахунку магнітно-механічних параметрів ВБПМ, як повної похідної явної ММХ, на підставі теорії інваріантного наближення функцій, є оптимізованим за швидкодією, а тому не вимагає значних обчислювальних ресурсів. Вироблено рекомендації щодо вибору відповідних масштабних коефіцієнтів.

15. Запропонований спосіб опису ВАХ напівпровідникових елементів силового комутатора може використовуватися для математичної формалізації електронних схем, що містять напівпровідникові елементи на основі біполярних, MOSFET, IGBT транзисторів або тиристорів та працюють у режимі ключа.

16. Отримані за допомогою створеної моделі результати розрахунків перехідних електромеханічних процесів у електромеханотронній системі «ВБПМ–комутатор–ДПР» підтверджують правильність та коректність взаємодії алгоритмів розрахунку магнітно-механічної характеристики, магнітно-механічних параметрів, диференційних параметрів напівпровідникових елементів комутатора з алгоритмом чисельного інтегрування САДР. Вироблено рекомендації щодо величини кроку інтегрування та необхідних обчислювальних ресурсів.

РОЗДІЛ 4.

МЕХАНІЧНІ ПРОЦЕСИ

ВИСОКОШВИДКІСНИХ БЕЗКОНТАКТНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ МАШИН ЗІ ЗБУДЖЕННЯМ ВІД ПОСТІЙНИХ МАГНІТІВ

З огляду на окреслені в п. 1.3 потенційні проблеми розробки конструкції ВБПМ, встановимо залежності максимально можливих діаметрів роторів цих машин від частоти обертання, зважаючи на допустимі значення механічних напружень у них. Для роторів з ПМ різних типів виконаємо дослідження впливу віддалі між опорами на величину критичної частоти обертання, що, в свою чергу, надасть можливість виробити рекомендації щодо початкового вибору головних розмірів ВБПМ.

4.1. Конструкції роторів ВБПМ

Розглядатимемо конструкції роторів ВБПМ двох типів. Ротори першого типу виготовляються з одного матеріалу без застосування складальних операцій. Це, як правило, магнітотвердий сплав заліза з хромом та кобальтом. Хоча властивості даного сплаву як постійного магніту порівняно не найкращі, але, завдячуючи високій механічній міцності, він з успіхом застосовується для виготовлення роторів, що працюють в діапазоні частот обертання 100 – 200 тис. об/хв.

Такі ротори є суцільними валами, що містять дві поверхні садіння, які можуть бути шийками для підшипників кочення або ковзання та дві або три торцеві поверхні для осьової фіксації елементів, що насаджуються на вал, зокрема для підшипників кочення (рис. 4.1). У випадку використання підшипників ковзання, на валу можуть розташовуватися оливовідбивні виступи або канавки лабіринтних ущільнень. Намагнічування такого ротора здійснюється після його виготовлення та необхідної термічної обробки.

Ротори другого типу складаються з вала, полюсів та елементів кріплення полюсів як окремих деталей (рис. 4.2). Ділянка вала такого ротора, на якій розташовано полюси, має пази глибиною 0,5 – 2,0 мм для їх фіксації від тангенціальних переміщень. Перерізи цих ділянок роторів різної полюсності показано на рис. 4.3.

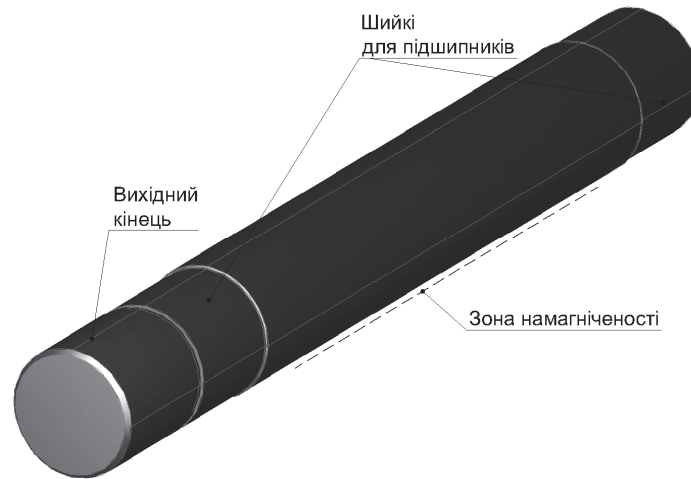


Рис. 4.1. Конструкція суцільного ротора

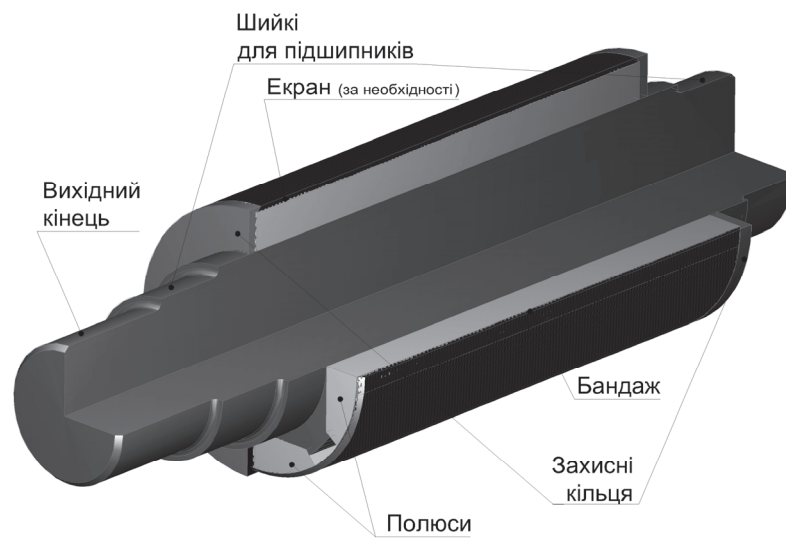


Рис. 4.2. Конструкція складеного ротора

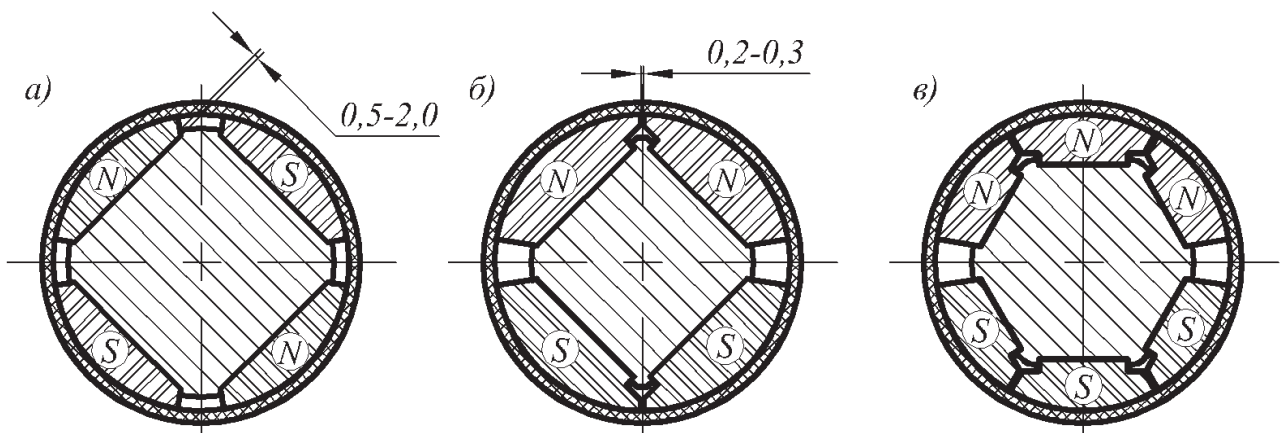


Рис. 4.3. Фіксація полюсів у тангенціальному напрямі для складених роторів різної полюсності: а) $2p = 4$; б), в) $2p = 2$

Більшість магнітотвердих матеріалів, що використовуються для виготовлення полюсів, є порівняно крихкими, тобто, маючи достатньо високу межу міцності на стискання, межа їх міцності на згин лежить в діапазоні $80 \div 200$ МПа. Враховуючи це, рекомендуємо уникати посадок з натягом для кріплення полюсів на валу, а для тангенціальної фіксації використовувати пази, одна або обидві бокові стінки яких утворюють з дном паза кут, менший за 90° . Бокові поверхні полюса, скошені на той самий кут, будуть виконувати функцію клина. Такий спосіб кріплення дає змогу досягнути прилягання полюсів практично без проміжків.

Використання полюсів у вигляді дугоподібних сегментів потребує внутрішнього шліфування й у даних застосуваннях економічно не вигідно.

Для уникнення радіальних переміщень полюсів відносно вала використовують бандажі. Найчастіше застосовують бандаж з надміцних синтетичних волокон типу «кевлар». Намотування проводиться у кілька шарів, з попереднім натягом, величина якого визначається з механічного розрахунку. Волокна бандажу розташовують у шарах під кутом, як показано на рис. 4.4, що запобігатиме його ослабленню та сповзанню. Під час намотування бандаж просочується полімерним компаундом, наприклад, на основі епоксидних смол. Після вакуумування та полімеризації компаунду утворюється бандажне кільце, яке унеможливило радіальне переміщення полюсів.

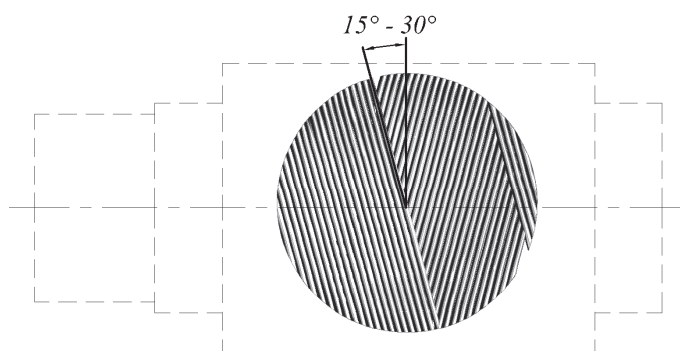


Рис. 4.4. Спосіб нанесення волокнистого бандажу

Для фіксації полюсів від осьового переміщення та одночасно захисту країв бандажу від сповзання та механічного пошкодження, наприклад, при заведенні ротора в статор, на відповідні ділянки вала насаджують металеві кільця. Фіксація

кілець на валу здійснюється за рахунок натягу.

Для роторів, діаметр яких не перевищує 150 мм, використовують бандажі у вигляді металеві тонкостінної циліндричної гільзи. Зовнішня твірна поверхня полюсів та внутрішня поверхня гільзи виготовляються конічними. Гільзу надягають на полюси та підтискають в осьовому напрямі, наприклад, натискним кільцем та гайкою до створення необхідного натягу. Упорне кільце, що встановлюється на вал зі сторони протилежної до сторони заведення бандажа, унеможлиблює осьове переміщення полюсів як під час складання ротора, так і під час його роботи (рис. 4.5).

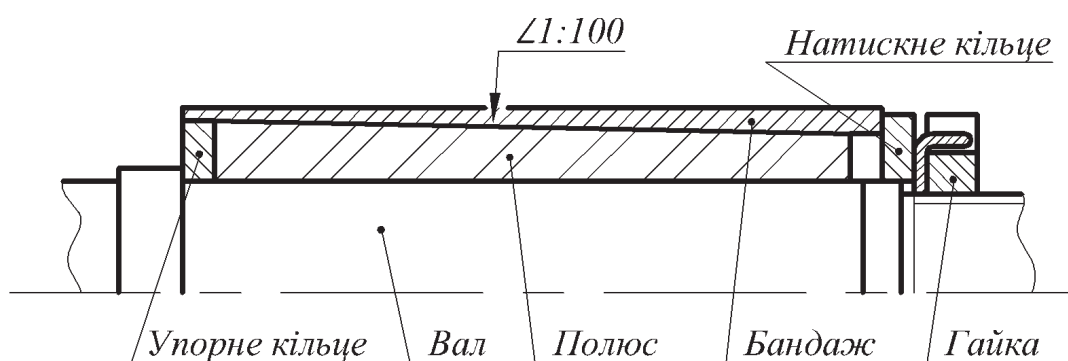


Рис. 4.5. Кріплення полюсів складеного ротора металевим бандажем

Для уникнення шунтування магнітного потоку полюсів металевий бандаж повинен виготовлятися з немагнітного матеріалу, а також, по можливості, бути легким, мати межу плинності вищу ніж у матеріалу вала та відносно низьку електропровідність. Практично всім цим вимогам відповідають сплави на основі титану (див. табл. 1.5).

4.2. Граничний діаметр ротора

4.2.1. Аналітичний розрахунок напружень у валі, навантаженому відцентровими силами

Розглянемо аналітичний спосіб розв'язання задачі розрахунку механічних напружень у суцільному циліндрі, що навантажений відцентровими силами, тобто обертається із заданою кутовою швидкістю ω .

За складання математичного формулювання задачі прийнято, що поперечні

перерізи обертового тіла за його деформування залишаються плоскими. Тобто нормальні та тангенціальні напруження в усіх поперечних перерізах циліндра створюють однакове розширення, а аксіальні напруження відсутні. Таке допущення дає право розглядати НДС цього тіла як плоский.

Під дією відцентрової сили dP , яка для малого об'єму на рис. 4.6 визначається як

$$dP = dm \cdot \omega^2 r = \omega^2 r^2 \gamma_m h dr \cdot d\varphi, \quad (4.1)$$

де $r, h, d\varphi$ – розміри, зрозумілі з рисунку;

γ_m – густина матеріалу (на його гранях виникають нормальні напруження σ_r та $\sigma_r + d\sigma_r$ у радіальному напрямі й σ_τ — у тангенціальному).

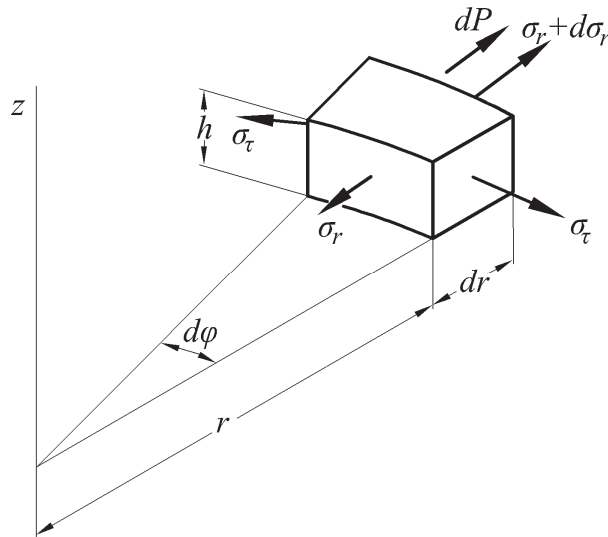


Рис. 4.6. Елементарний об'єм однорідного циліндра

Окреслимо сили, які діятимуть на ці грані. Так, напруження σ_r викликатиме сила $\sigma_r r h d\varphi$, напруження $(\sigma_r + d\sigma_r)$ — сила $(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) h d\varphi$, а σ_τ — $\sigma_\tau h dr \sin d\varphi / 2 = \sigma_\tau h dr d\varphi / 2$. Запишемо рівняння рівноваги сил, що діють на елементарний об'єм:

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) h d\varphi - \sigma_r r h d\varphi - \sigma_\tau h dr d\varphi + \omega^2 r^2 \gamma_m h dr \cdot d\varphi = 0,$$

або, нехтуючи складовою другого порядку малості, після нескладних перетворень

$$\frac{d(\sigma_r r)}{dr} - \sigma_\tau = -\gamma_m \omega^2 r^2. \quad (4.2)$$

У свою чергу, радіальна деформація об'єму становить

$$\varepsilon_r = \frac{du + dr - dr}{dr} = \frac{du}{dr}, \quad (4.3)$$

а тангенціальна —

$$\varepsilon_\tau = \frac{2\pi(r + u - r)}{2\pi r} = \frac{u}{r}, \quad (4.4)$$

де u – зміщення в радіальному напрямі.

З (4.3), (4.4) вилучимо u та запишемо вираз

$$\frac{d(\varepsilon_\tau r)}{dr} - \varepsilon_r = 0. \quad (4.5)$$

Запишемо закон Гука в полярних координатах, враховуючи що напруження $\sigma_z = 0$:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\tau), \quad \varepsilon_\tau = \frac{1}{E}(\sigma_\tau - \nu\sigma_r). \quad (4.6)$$

Враховуючи (4.5), (4.6) та (4.2), отримаємо вираз

$$\frac{d(\sigma_\tau r)}{dr} - \sigma_r = -\nu\gamma_m\omega^2 r^2. \quad (4.7)$$

Додаючи (4.7) та (4.2), а потім віднімаючи їх, остаточно отримуємо два рівняння

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}[(\sigma_\tau + \sigma_r)r] - (\sigma_\tau + \sigma_r) &= -(1 + \nu)\gamma_m\omega^2 r^2; \\ \frac{d}{dr}[(\sigma_\tau - \sigma_r)r] + (\sigma_\tau - \sigma_r) &= (1 - \nu)\gamma_m\omega^2 r^2, \end{aligned} \quad (4.8)$$

розв'язком яких є шукані механічні напруження як функції поточного значення координати r .

Аналітичний розв'язок цих рівнянь, наведений у [150], виглядає так

$$\sigma_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{(3 + \nu)}{8}\gamma_m\omega^2 r^2; \quad \sigma_\tau = C_1 + \frac{C_2}{r^2} - \frac{(1 + 3\nu)}{8}\gamma_m\omega^2 r^2, \quad (4.9)$$

де C_1, C_2 – сталі інтегрування.

Для їх визначення розглянемо обертання циліндра з зовнішнім радіусом r_2 , що має внутрішній отвір радіусу r_1 . Сталі інтегрування знайдемо, беручи до уваги

рівність нуліві радіальних напружень на зовнішній та внутрішній поверхнях циліндра:

$$C_1 = \frac{(3+\nu)}{8} \gamma_m \omega^2 (r_1^2 + r_2^2); \quad C_2 = \frac{(3+\nu)}{8} \gamma_m \omega^2 r_1^2 r_2^2. \quad (4.10)$$

На рис. 4.7 зображено розв'язок (4.9) для випадку обертання циліндра розміру $r_2 = 0,05$ м, зліва за наявності внутрішнього отвору $r_1 = 0,005$ м, справа без отвору, з частотою обертання $n = 80000$ об/хв. Густина та коефіцієнт Пуассона матеріалу відповідають сталі AISI-C1020: $\gamma_m = 7850$ кг/м³, $\nu = 0,29$.

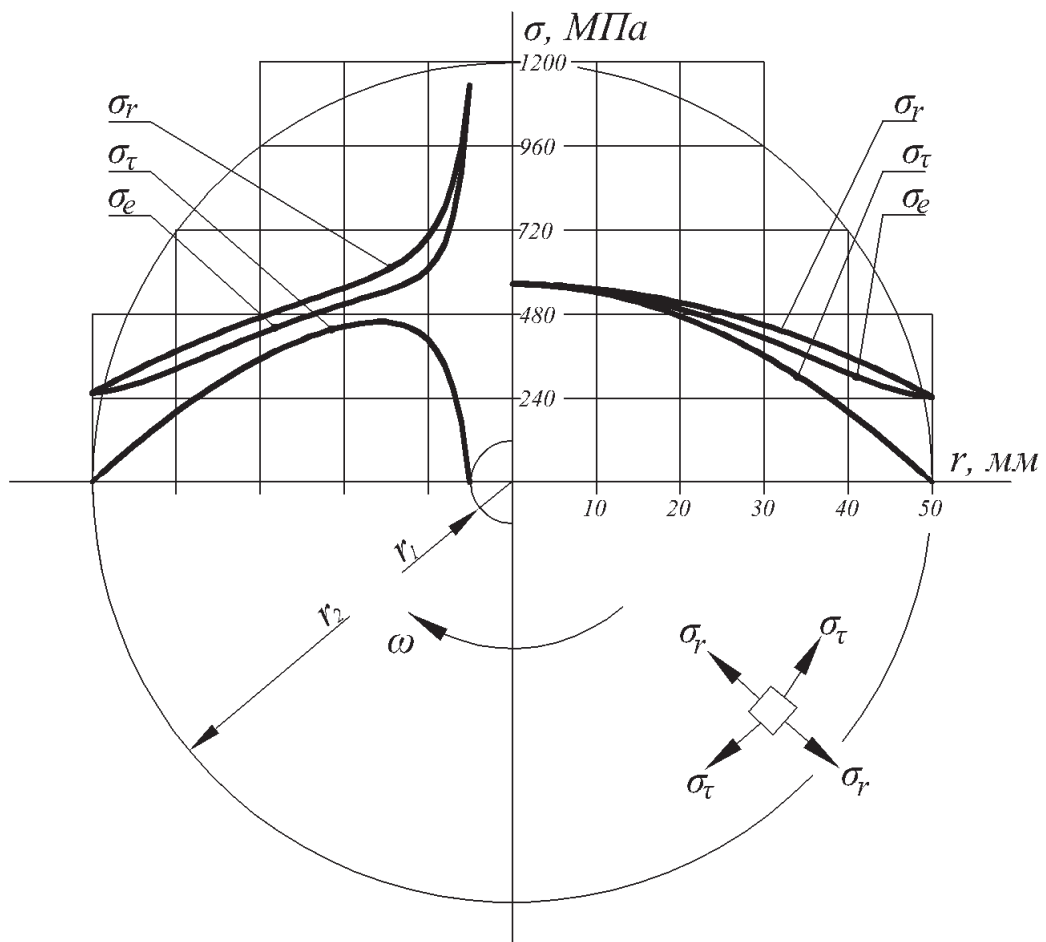


Рис. 4.7. Епюри напружень для вала з центральним отвором та без нього

Найбільші за Мізесом напруження σ_e (2.128) виникають в околі центральної частини вала, але у випадку вала з осьовим отвором, незалежно від його діаметру, максимальне напруження стає принаймні у двічі більшим порівняно з валом без нього.

Отриманий результат буде використовуватись для перевірки адекватності тривимірної польової моделі для аналогічного об'єкту.

4.2.2. Адекватність математичних моделей розрахунку напружень у валах

Використовуючи спеціалізоване програмне забезпечення, створена математична модель, що дає змогу розрахувати поля механічних напружень в суцільному циліндрі довільного діаметра та довжини, що обертається з довільною частотою. Задача формулюється у тривимірному просторі як статична, тобто її визначальним рівнянням є (2.126), яке розв'язується МСЕ.

Для перевірки адекватності даної моделі проведено тестовий розрахунок поля механічних напружень у циліндричному стрижні, розміри та місця закріплень якого показано на рис. 4.8. Зауважимо, що обмеження ступенів свободи (закріплення) накладалися на два вузли, які належать осі обертання z , у вигляді умов $u = 0$, $v = 0$. Обмеження зміщень в аксіальному напрямі не передбачалося.

Як і у прикладі, що розглядався у п. 4.2.1, властивості матеріалу стрижня відповідають сталі AISI-C1020, а модуль Юнга становить $E = 2,07 \times 10^{11}$ Па. Стрижень обертається з частотою $n = 80000$ об/хв.

Рівень дискретизації об'єкта показаний на рис. 4.9 (кількість СЕ – 18524).

Результати розрахунку поля еквівалентних напружень показані на рис. 4.10 у вигляді растрового зображення, на якому ділянкам з більш темним забарвленням відповідає вищий рівень напружень, а їх кількісна оцінка можлива з використанням шкали в нижній його частині. Результати порівнювалися з аналітичним розв'язком, наведеним у п. 4.2.1. На рис. 4.11 графічно показано це порівняння. Залежності на рис. 4.11, б відповідають поперечному перерізу, розташованому посередині між місцями закріплень.

Значення максимальних напружень в околі осі обертання записані до табл. 4.1.

Як бачимо з порівняння, радіальна та тангенціальна складові напруження в центрі вала практично збігаються, а еквівалентні максимальні напруження відрізняються істотно. Це пояснюється наявністю осьової складової σ_z , яка, до того ж, змінює знак приблизно на половинному радіусі.

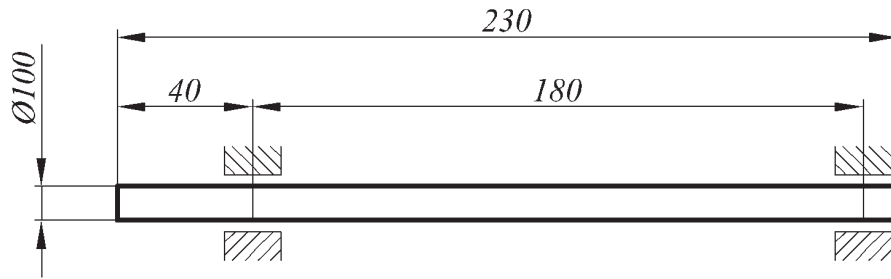


Рис. 4.8. Розміри стрижня

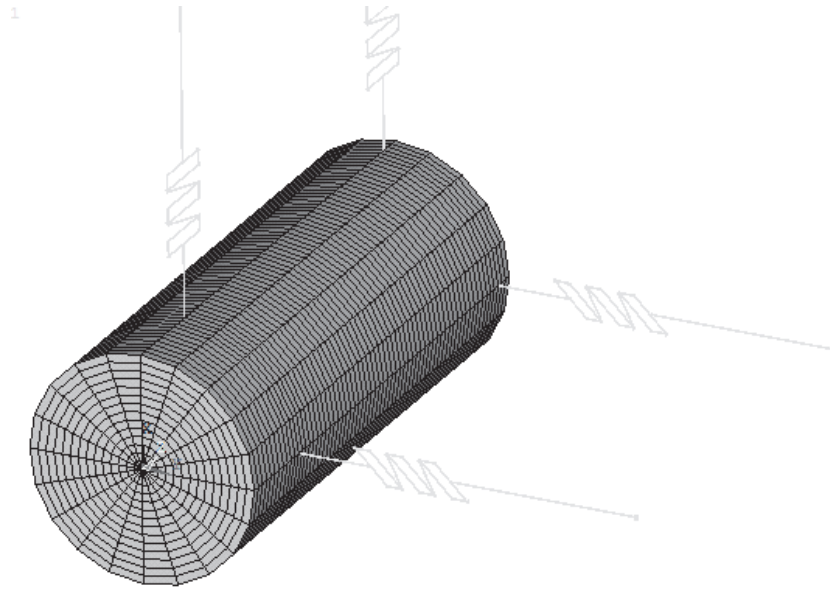


Рис. 4.9. Сітка СЕ та закріплення моделі вала

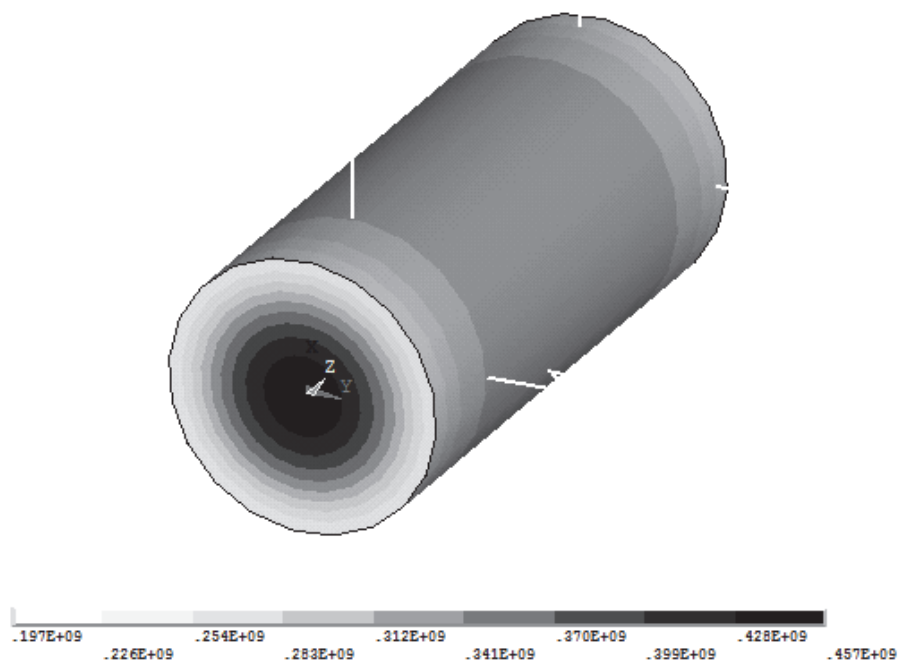


Рис. 4.10. Поле еквівалентного напруження, Па

Порівняльна характеристика аналітичного та чисельного розв'язків

Вид максимального напруження	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок	Розбіжність, %
Радіальна складова σ_r , МПа	566,50	578,44	2,1
Тангенціальна складова σ_τ , МПа	566,50	578,44	2,1
Осьова складова σ_z , МПа	-	138,22	-
Еквівалентне напруження σ_e , МПа	566,50	440,22	22,3

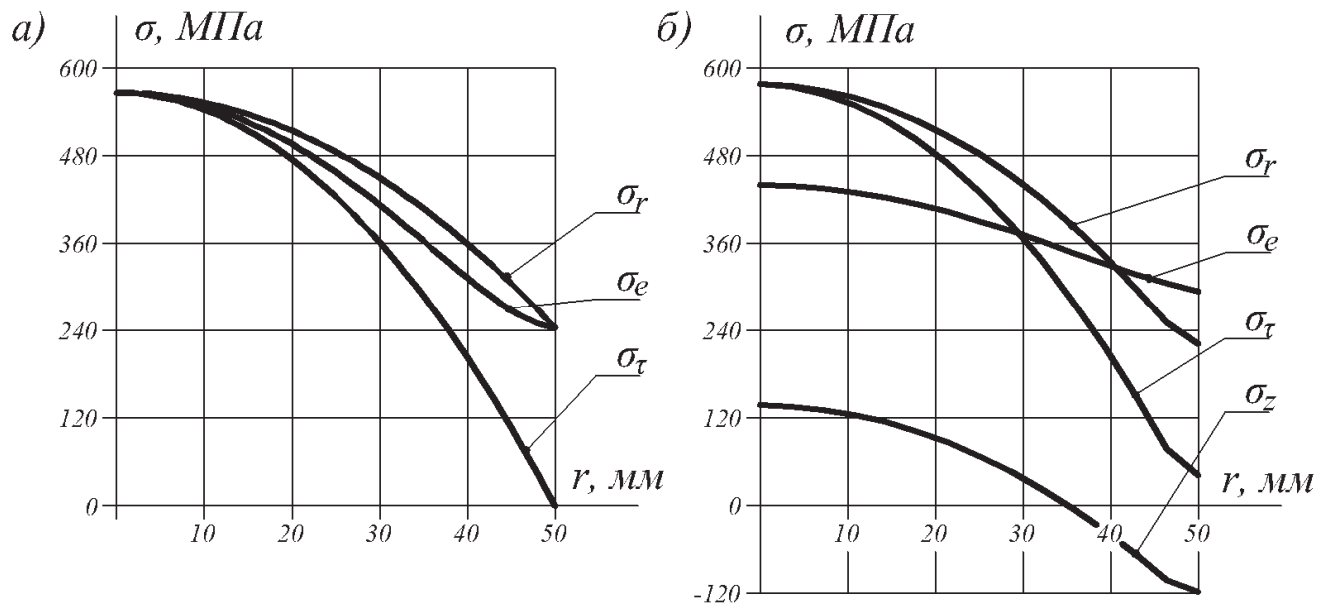


Рис. 4.11. Порівняння аналітичного (а) та чисельного (б) розв'язків

Пласке, двовимірне формулювання задачі не відтворює в принципі цієї особливості, на рівні допущень. Отже, можна стверджувати, що створена модель має вищий рівень адекватності, ніж аналітичний алгоритм.

Розрахунки аналогічних залежностей для складеного ротора, показали дещо вищий рівень максимального еквівалентного напруження. Так, для ротора зображеного на рис. 4.12, розраховані розподіли головних механічних напружень в залежності від радіальної координати r . На рис. 4.13, а показано такий розподіл вздовж осі, що проходить через полюс (умовно, вздовж осі d), а на рис. 4.13, б — вздовж осі поміж полюсами (вздовж осі q).

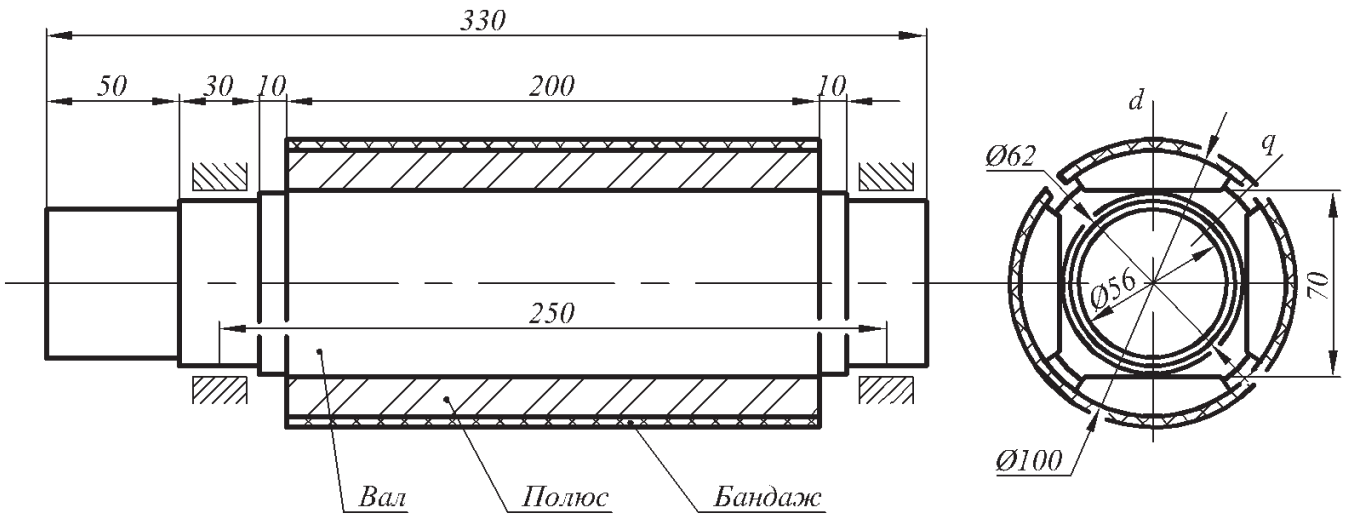


Рис. 4.12. Розміри складеного ротора

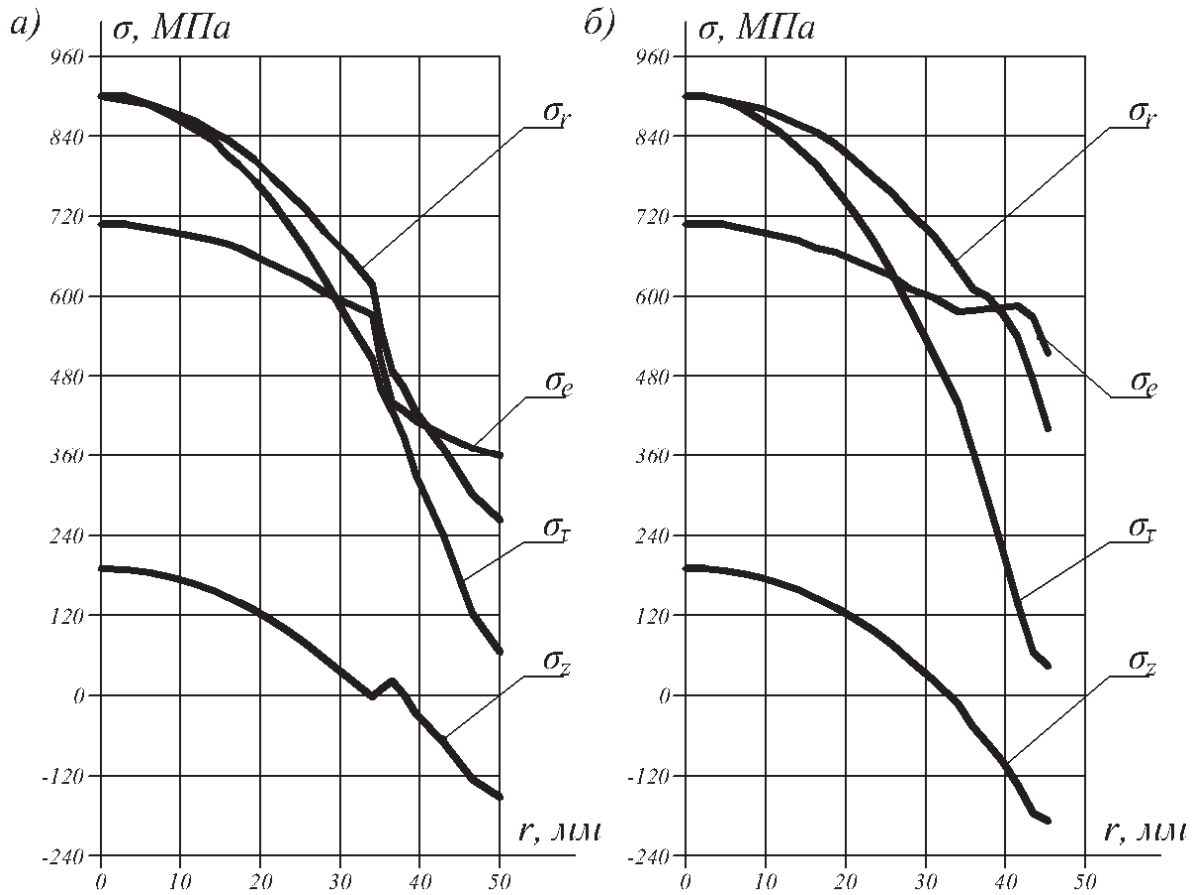


Рис. 4.13. Розподіл напружень складеного ротора вздовж осей

а) поздовжньої; б) поперечної

Бандаж, насаджений на поверхню полюсів з попереднім натягом, ймовірно, компенсуватиме певну частину напружень, викликаних відцентровою силою. Однак, за розрахунку граничних діаметрів його наявність не враховувалася, що зумовлено випадковим характером величини попереднього натягу, залежним від технології виготовлення бандажу.

Нами прийнято, що вал виготовлено з конструкційної сталі AISI-C1020: густина $\gamma_m = 7850 \text{ кг/м}^3$, модуль Юнга $E = 2,07 \times 10^{11} \text{ Па}$; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,29$; полюси з інтерметалічної сполуки NdFeB: $\gamma_m = 7700 \text{ кг/м}^3$ $E = 1,6 \times 10^{11} \text{ Па}$, $\nu = 0,30$. Ротор обертається з частотою $n = 100000 \text{ об/хв}$.

Рівень дискретизації об'єкта — на рис. 4.14, б (кількість СЕ – 28208).

Як видно з рис. 4.15, максимальні напруження в складеному роторі виникають не в центральній частині вала, а в околі бокових поверхонь пазів, що слугують для фіксації полюсів від переміщень у тангенціальному напрямі.

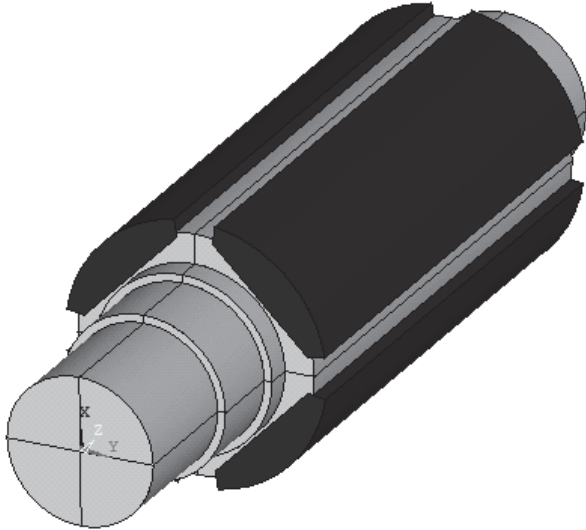
Непряме підтвердження цього факту містять графіки σ_e на рис. 4.13, у яких на радіусі $\approx 35 \text{ мм}$, у місці ідеалізованого контакту матеріалів з різними властивостями, спостерігаються злами. Зрозуміло, що наявність залишкових деформацій у цих місцях призведе до порушення балансування всієї конструкції. Отже, критерієм міцності складеного ротора обрано величину максимального напруження у валі.

4.2.3. Обмеження щодо вибору діаметра ротора

З використанням розробленої математичної моделі отримана сукупність залежностей максимального еквівалентного за Мізесом механічного напруження σ_e від частоти обертання n для різних зовнішніх діаметрів циліндричного ротора в діапазоні розмірів $D_j = 25 \div 250 \text{ мм}$ та частот обертання $n = 5000 \div 200000 \text{ об/хв}$.

За допомогою цих залежностей визначено запас міцності конструкції, який оцінюється відношенням потенційно небезпечного навантаження до фактичного. В пружному діапазоні (в межах закону Гука) там, де існує пропорційна залежність між деформацією та напруженням, запас міцності може визначатися відношенням напружень.

a)



б)

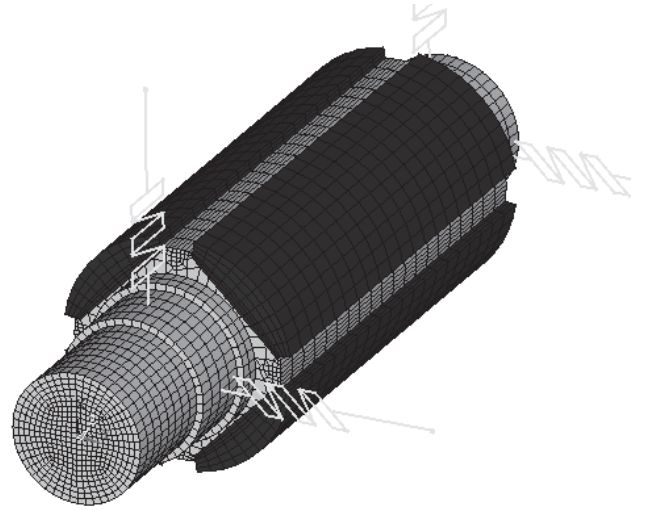
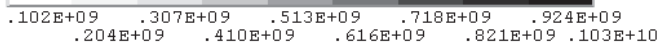
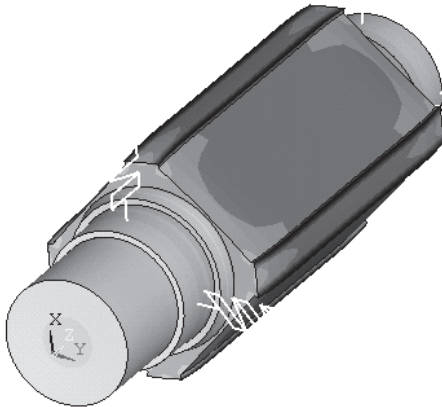
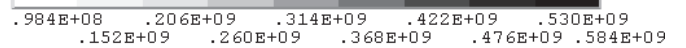
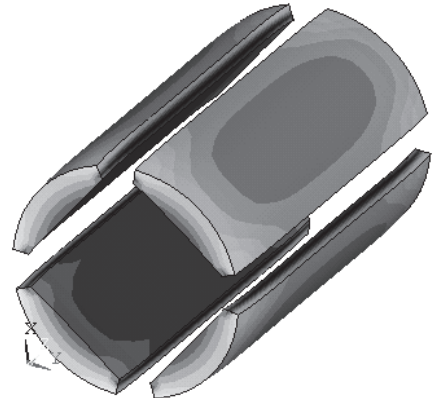


Рис. 4.14. Моделі складеного ротора: а) геометрична; б) зі скінченних елементів

a)



б)



в)

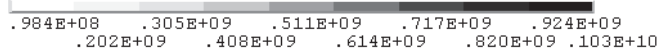
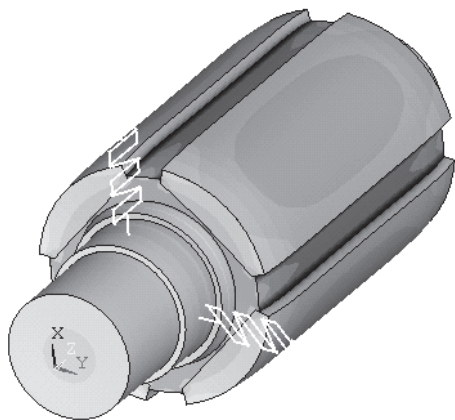


Рис. 4.15. Поле еквівалентного напруження, Па
а) у валі; б) у полюсах; в) у складеному роторі

У галузі електромашинобудування, особливо високошвидкісних машин, необхідно уникати виникнення будь-яких залишкових деформацій, отже, потенційно небезпечною можна вважати межу пружності або межу плинності. Запас міцності визначаємо так:

$$S_s = \frac{\sigma_s}{\sigma_{e\max}}, \quad (4.11)$$

де $\sigma_{e\max}$ – допустиме еквівалентне напруження (2.128);

σ_s – межа плинності за одноосного розтягу.

У відповідності до рекомендацій [66], за статичного навантаження запас міцності становить $\approx 1,4$. Для динамічного навантаження допустимі напруження з урахуванням концентрації, масштабних і технологічних факторів повинні бути зменшені.

Розрахунок граничних значень діаметрів проводився для допустимого еквівалентного напруження $\sigma_{e\max} = \sigma_s / S_s = 400 / 1,4 \approx 280$ МПа, що відповідає використанню хром-кобальтових сплавів заліза без додаткової термообробки.

Перетин отриманої сукупності залежностей $\sigma_e[n]$, $D_j = \text{const}$ прямою $\sigma_e = \sigma_{e\max}$ дозволяє побудувати функцію $D_j[n]$, яка безпосередньо може використовуватися для обмеження діаметра ротора. Ця сукупність та функція $D_j[n]$ для суцільних роторів показані на рис. 4.16, а для складених роторів — рис. 4.17.

Граничний діаметр роторів розраховано за максимально можливої частоти обертання ротора. Якщо таке значення не задано в ТЗ, то за максимальну частоту приймаємо $n_{\max} = 1,2n_H$.

4.3. Гранична довжина ротора

4.3.1. Аналітичний розрахунок критичних частот обертання

Виведемо аналітично рівняння руху горизонтального пружного циліндричного вала, закріпленого на двох нерухомих опорах, із рівномірно розподіленою масою за його довжиною.

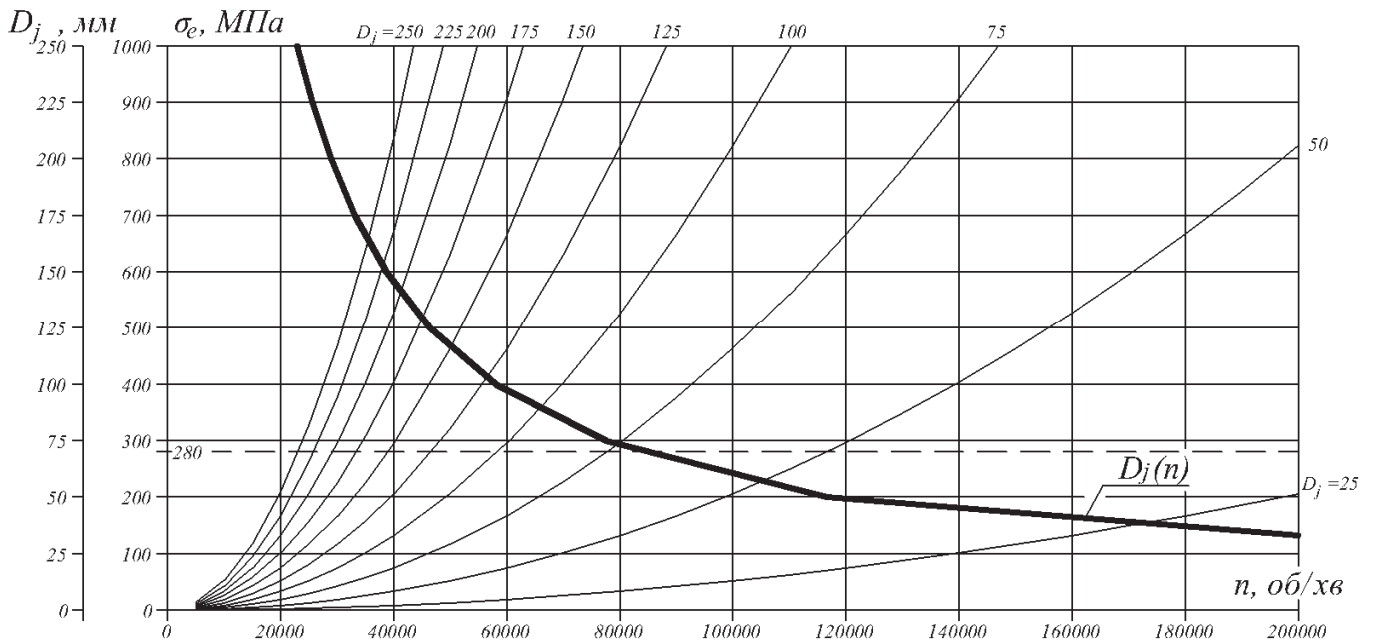


Рис. 4.16. Залежності максимальних напружень σ_e та граничного зовнішнього діаметра D_j суцільного ротора від частоти обертання

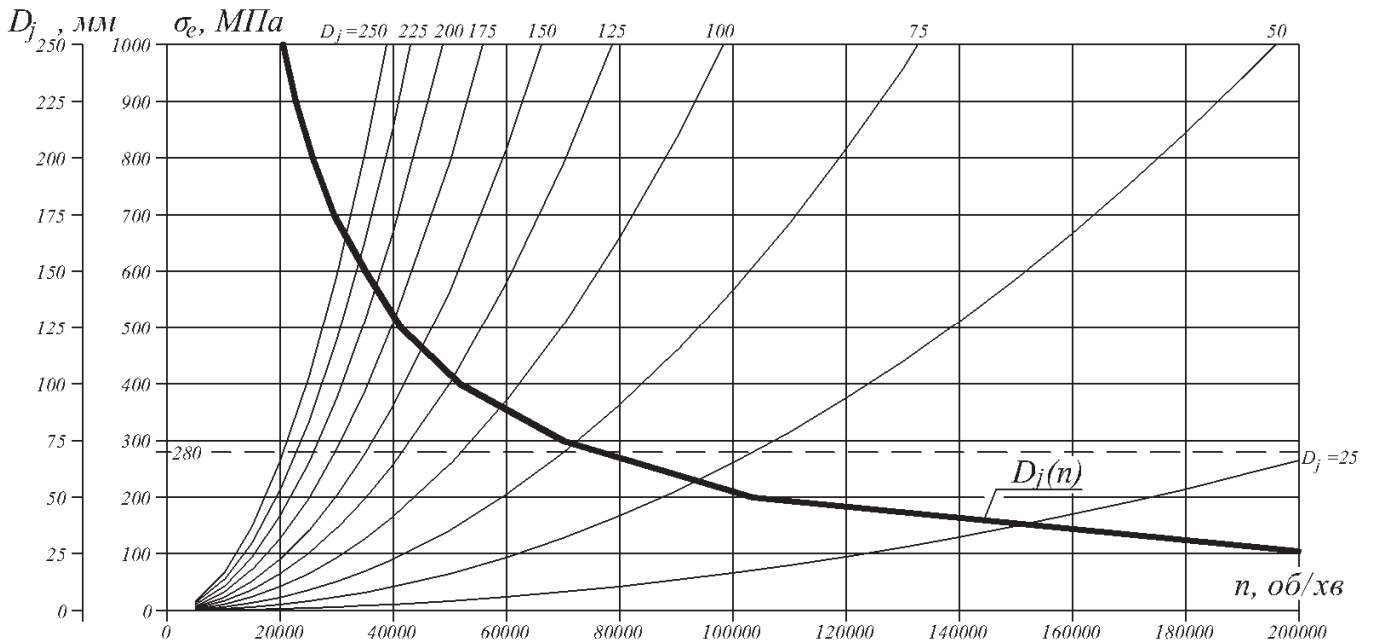


Рис. 4.17. Залежності максимальних напружень σ_e та граничного зовнішнього діаметра D_j складеного ротора від частоти обертання

Заданою системою координат xuz , такою, яка зображена на рис. 4.18.

Вважатимемо, що вал обертається із заданою кутовою швидкістю ω та знаходиться під дією наступних зовнішніх сил: сили ваги, розподіленої вздовж осі z , та відцентрової сили зумовленої ексцентриситетом центра мас.

Виділимо елемент вала довжиною dz . Тоді кутові зміщення торцевих поверхонь елемента визначатимуться як

$$\varphi_x = -\frac{\partial y}{\partial z}; \quad \varphi_y = \frac{\partial x}{\partial z}, \quad (4.12)$$

де x, y – координати геометричного центру перерізу вала на віддалі z .

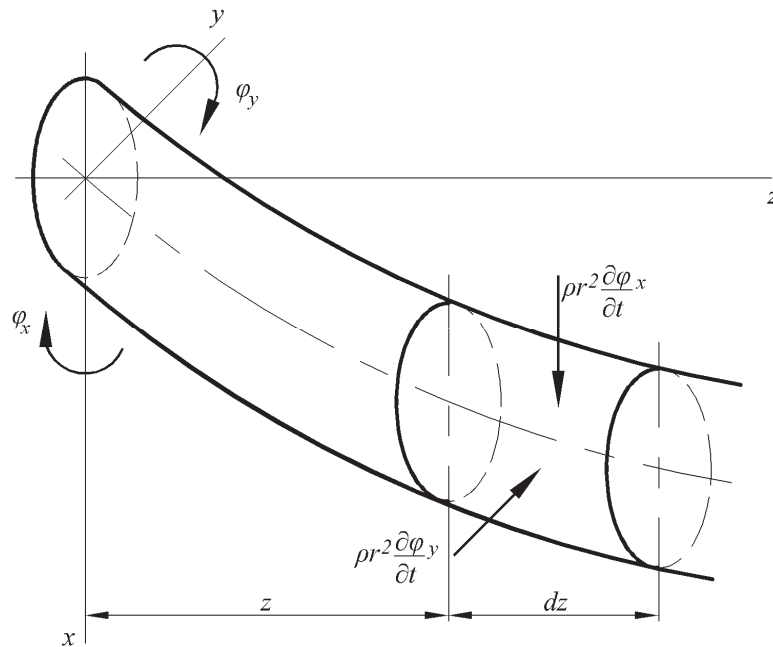


Рис. 4.18. До визначення моментів сил інерції

Проекції на осі системи координат векторів кутової швидкості та прискорення елемента dz записуються як

$$\omega_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} = -\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t}; \quad \omega_y = \frac{\partial \varphi_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial t}; \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \omega_x}{\partial t} = -\frac{\partial^3 y}{\partial z \partial t^2}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \omega_y}{\partial t} = \frac{\partial^3 x}{\partial z \partial t^2}. \quad (4.14)$$

Моменти сил інерції елемента довжиною dz [141]

$$\begin{aligned}
 M_{ix} &= -\rho r^2 \varepsilon_x dz - 2\rho r^2 \omega \omega_y dz = \rho r^2 \frac{\partial^3 y}{\partial z \partial t^2} dz - 2\rho r^2 \omega \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial t} dz; \\
 M_{iy} &= -\rho r^2 \varepsilon_y dz + 2\rho r^2 \omega \omega_x dz = -\rho r^2 \frac{\partial^3 x}{\partial z \partial t^2} dz - 2\rho r^2 \omega \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} dz,
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

де ρ – маса одиниці довжини вала;

r – радіус інерції вала;

ρr^2 – масовий момент інерції вала відносно осі обертання;

ω – кутова швидкість.

Згинаючі моменти пружних сил, враховуючи (4.13), визначаються як

$$M_x = EI \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} = EI \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}; \quad M_y = -EI \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} = -EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2},
 \tag{4.16}$$

де I – момент інерції перерізу вала відносно головних осей.

Виходячи з умови рівноваги моментів, нехтуючи складовими другого порядку малості, отримуємо (рис. 4.19):

$$-\frac{\partial M_y}{\partial z} + \frac{M_{iy}}{dz} + Q_x = 0; \quad -\frac{\partial M_x}{\partial z} + \frac{M_{ix}}{dz} + Q_y = 0,
 \tag{4.17}$$

де Q_x, Q_y – проекції на осі перерізаючої сили.

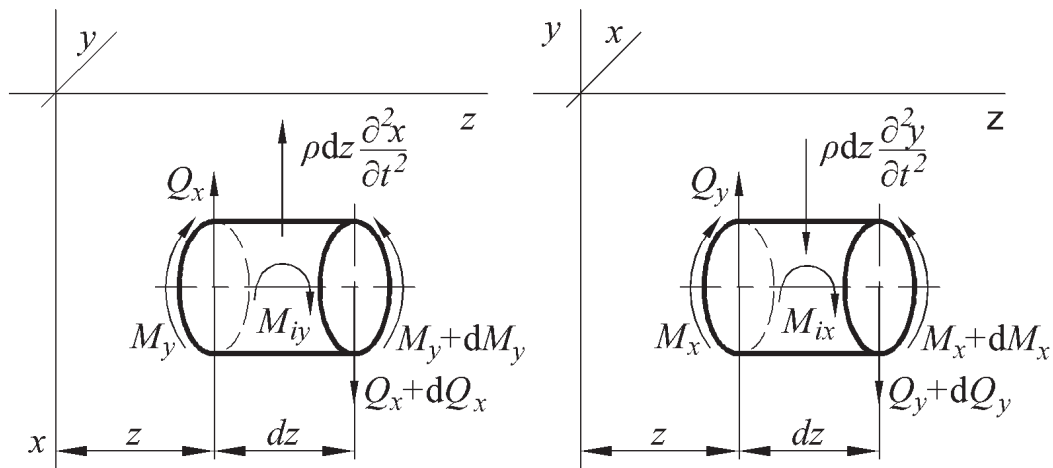


Рис. 4.19. До запису умов рівноваги

З умови рівноваги сил отримуємо

$$\frac{\partial Q_x}{\partial z} - \rho \frac{\partial V_x}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial Q_y}{\partial z} + \rho \frac{\partial V_y}{\partial t} = 0, \quad (4.18)$$

де V_x, V_y – проекції лінійної швидкості руху центра вала;

$\rho \frac{\partial \bar{V}}{\partial t}$ – сила інерції на одиницю довжини вала;

або

$$\frac{\partial Q_x}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial Q_y}{\partial z} = -\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (4.19)$$

Підставимо (4.15) та (4.16) у (4.17):

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} - \rho r^2 \left(\frac{\partial^3 x}{\partial z \partial t^2} + 2\omega \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} \right) + Q_x &= 0; \\ EI \frac{\partial^3 y}{\partial z^3} - \rho r^2 \left(\frac{\partial^3 y}{\partial z \partial t^2} - 2\omega \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial t} \right) - Q_y &= 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Продиференціюємо (4.20) та, враховуючи (4.19), отримуємо систему однорідних диференціальних рівнянь 4-го порядку, що описує динаміку руху гладкого вала у нерухомій системі координат:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} - \rho r^2 \left(\frac{\partial^4 x}{\partial z^2 \partial t^2} + 2\omega \frac{\partial^3 y}{\partial z^2 \partial t} \right) + \rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= 0; \\ EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} - \rho r^2 \left(\frac{\partial^4 y}{\partial z^2 \partial t^2} - 2\omega \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t} \right) - \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Введемо позначення

$$r_{xy} = x + jy \quad (4.22)$$

– радіус-вектор у нерухомій системі координат xy , де $j = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Помножимо друге рівняння (4.21) на j та додаючи його до першого рівняння системи. Враховуючи позначення (4.22), отримуємо

$$EI \frac{\partial^4 r_{xy}}{\partial z^4} - \rho r^2 \left(\frac{\partial^4 r_{xy}}{\partial z^2 \partial t^2} - j2\omega \frac{\partial^3 r_{xy}}{\partial z^2 \partial t} \right) + \rho \frac{\partial^2 r_{xy}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.23)$$

Перейдемо до обертової системи координат dq , такої, що

$$r_{dq} = d + jq \quad (4.24)$$

– радіус-вектор у рухомій системі координат dq , а зв'язок між нерухомою та рухомою системами координат встановимо рівнянням

$$r_{xy} = r_{dq} e^{j\omega t}. \quad (4.25)$$

Виділимо у (4.23) дійсну та уявну частини:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 d}{\partial z^4} - \rho r^2 \left(\frac{\partial^4 d}{\partial z^2 \partial t^2} + \omega^2 \frac{\partial^2 d}{\partial z^2} \right) + \rho \left(\frac{\partial^2 d}{\partial t^2} - 2\omega \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \omega^2 d \right) &= 0; \\ EI \frac{\partial^4 q}{\partial z^4} - \rho r^2 \left(\frac{\partial^4 q}{\partial z^2 \partial t^2} + \omega^2 \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \right) + \rho \left(\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + 2\omega \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} - \omega^2 q \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Крайову умову формулюємо на підставі фізичних міркувань. Обидва кінці вала знаходяться в шарнірно-нерухомих опорах, отже, сумістивши початок СК з одним із кінців вала, маємо

$$d|_{z=0} = d|_{z=l_{bm}} = 0; \quad q|_{z=0} = q|_{z=l_{bm}} = 0, \quad (4.27)$$

де l_{bm} – віддаль між опорами вала.

На кінцях вала згинаючий момент рівний нулеві, тобто

$$\left. \frac{\partial^2 d}{\partial z^2} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial^2 d}{\partial z^2} \right|_{z=l_{bm}} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \right|_{z=l_{bm}} = 0, \quad (4.28)$$

або у нерухомій системі координат

$$M_x|_{z=0} = M_x|_{z=l_{bm}} = 0; \quad M_y|_{z=0} = M_y|_{z=l_{bm}} = 0. \quad (4.29)$$

Отже, система диференціальних рівнянь (4.26) разом із крайовою умовою (4.27), (4.28) складає зміст двовимірної крайової задачі, яка дає змогу знайти власні частоти коливань пружного вала, що обертається з довільною частотою [82]. Її розв'язання передбачає виконання процедур чисельного інтегрування як за просторовою, так і за часовою координатами.

Менш трудомісткий але наближений спосіб визначення критичної кутової

швидкості ω_k у випадку синхронної прецесії запропоновано в [141]

$$\omega_k = \frac{(n\pi)^2}{l_{bm}^2} \sqrt{\left(1 - \left(\frac{rn\pi}{l_{bm}}\right)^2\right)^{-1} \frac{EI}{\rho}}. \quad (4.30)$$

Для циліндричних валів діаметром $D_j = 0,12$ м та трьох різних довжин l_{bm} за формулою (4.30) розраховано значення 1-ої та 2-ої критичних частот обертання. Результати наведені у табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Результати розрахунку критичних частот обертання

Номер форми	Одиниці вим.	Віддаль між опорами, м		
		0,8	1,0	1,2
$n = 1$	рад/с	2393	1527	1059
	об/хв	22851	14582	10113
$n = 2$	рад/с	9780	6195	4278
	об/хв	93392	59158	40852

У розрахунках приймалося: модуль Юнга $E = 2,07 \times 10^{11}$ Па; момент інерції

перерізу вала $I = \frac{\pi D_j^4}{64} = \frac{\pi 0,12^4}{64} = 0,1018 \times 10^{-4} \text{ м}^4$; радіус інерції $r = \frac{D_j}{4} = \frac{0,12}{4} =$

$= 0,03$ м; маса одиниці довжини вала $\rho = \gamma_m \frac{\pi D_j^2}{4} = 7850 \frac{\pi 0,12^2}{4} = 88,79$ кг/м.

Отриманий результат буде використовуватись для перевірки адекватності тривимірної польової моделі, призначеної для обчислення критичних частот обертання валів довільної форми.

4.3.2. Адекватність математичної моделі розрахунку критичних частот

З використанням спеціалізованого програмного забезпечення створено математичну модель для здійснення модального аналізу матриці жерсткості валів, на базі МСЕ. Їх розміри та властивості матеріалів приймалися такими самими, що й за аналітичного аналізу (п. 4.3.1).

Рівень дискретизації вала довжиною 1,0 м показаний на рис. 4.20 (кількість СЕ – 1500).

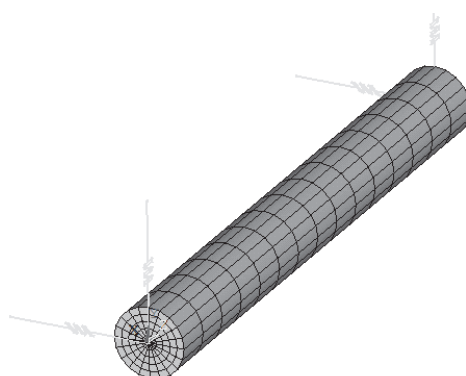
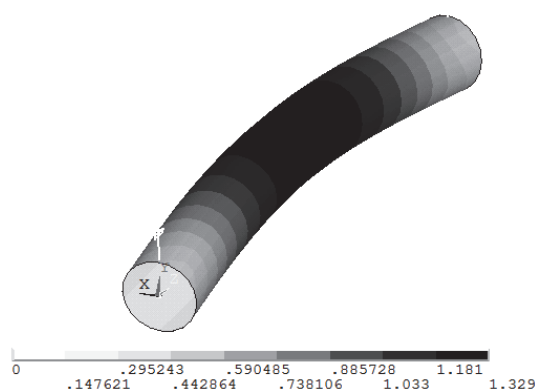


Рис. 4.20. Сітка СЕ та закріплення моделі вала

а)



б)

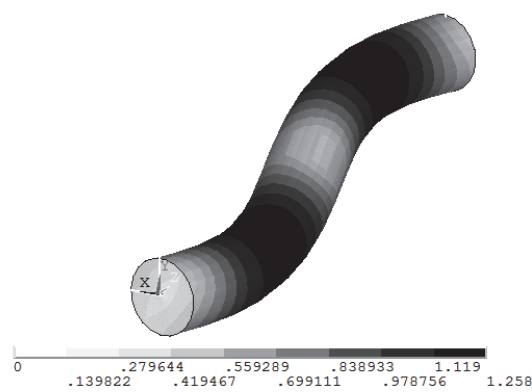


Рис. 4.21. Форми вала, що відповідають критичним частотам обертання

а) першій; б) другій

Таблиця 4.3

Порівняльна характеристика аналітичного та чисельного розв'язків

Номер форми	Критична частота обертання, об/хв		
	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок	Розбіжність, %
Віддаль між опорами 0,8 м			
$n = 1$	22851	24187	5,8
$n = 2$	93392	89344	4,3
Віддаль між опорами 1,0 м			
$n = 1$	14582	15180	4,1
$n = 2$	59158	57442	2,9
Віддаль між опорами 1,2 м			
$n = 1$	10113	10616	5,0
$n = 2$	40852	40908	0,1

Форми вала, які відповідають коливанням з 1-ою та 2-ою критичними частотами, за умови синхронної прецесії, показані на рис. 4.21, *a*. Порівняння значень критичних частот, отриманих аналітично та з використанням цієї моделі, зроблено у табл. 4.3. Воно свідчить про те, що результати корелюють між собою та не суперечать фізичній сутності явищ, які відбуваються в реальному об'єкті. Це, на нашу думку, підтверджує адекватність математичної моделі для здійснення модального аналізу матриці жорсткості валів та розрахунку їх критичних частот обертання.

4.3.3. Обмеження щодо вибору віддалі між опорами ротора

З використанням створених моделей проведений розрахунок критичних частот обертання для суцільних та складених роторів. Алгоритми цих моделей використовують обертову СК та враховують сили Коріоліса (2.112).

Так, для суцільного ротора, конструкція якого показана на рис. 4.1, розраховано залежності критичних частот обертання від співвідношення його розмірів l_{bm} / D_j . Довжина вихідного кінця та решта розмірів, позначених на рис. 4.22, змінювалися пропорційно до l_{bm} . Залежності $l_{bm} / D_j [n]$ для 1-ої критичної частоти обертання показані на рис. 4.23, а для 2-ої — на рис. 4.24.

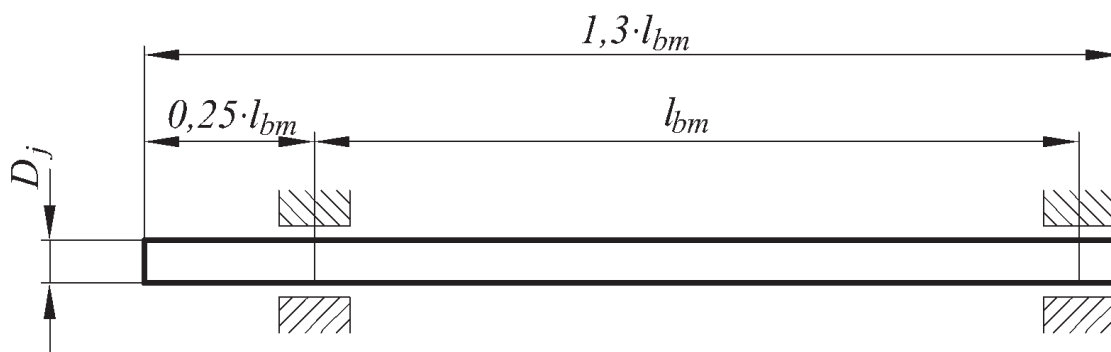


Рис. 4.22. Розміри суцільного ротора

Значення власних частот за прямої та зворотної синхронної прецесії не рівні між собою. Отже, криві на графіках фактично є смугами, товщина яких поступово збільшується зі збільшенням частоти. Ці смуги показують небезпечні зони, робота в середині або в околі яких недопустима.

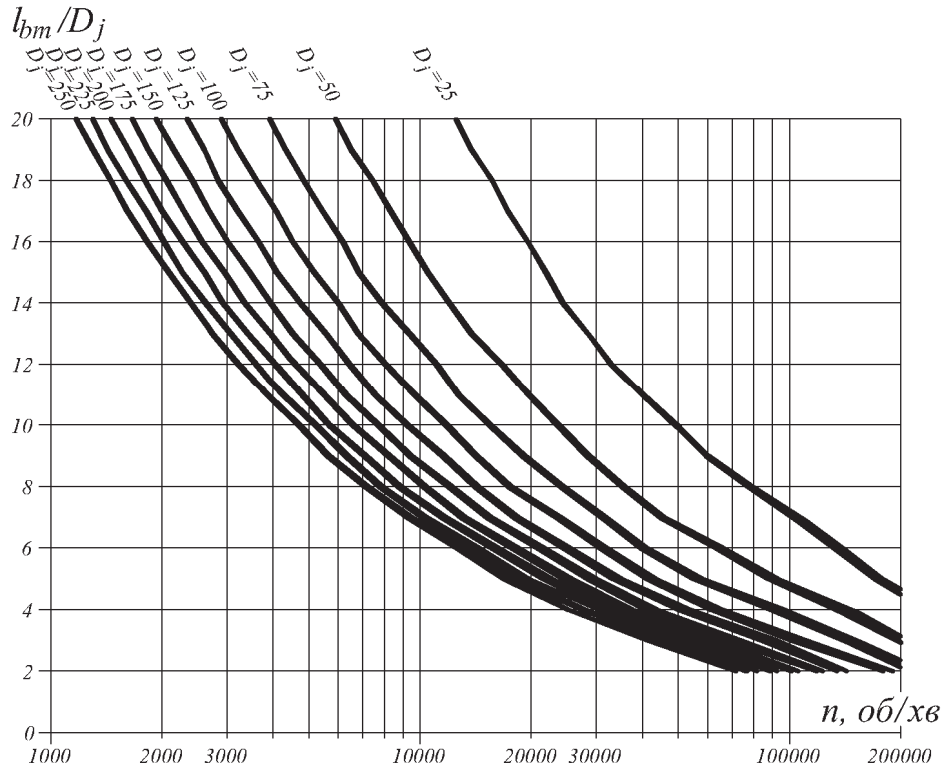


Рис. 4.23. Залежності 1-ої критичної частоти обертання від співвідношення l_{bm}/D_j для суцільних роторів

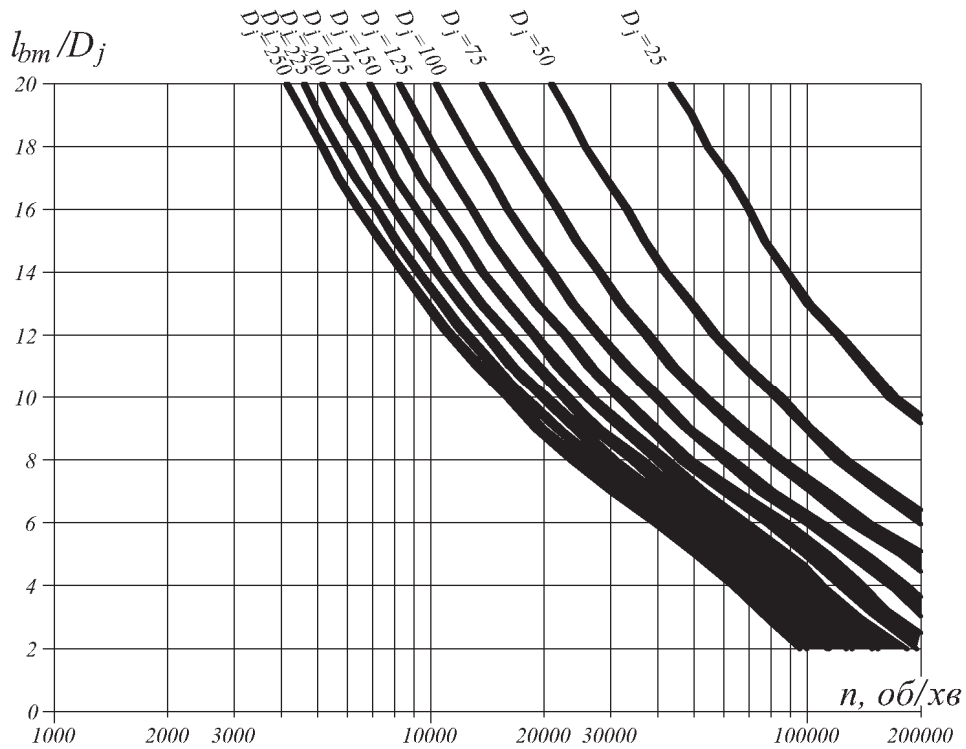


Рис. 4.24. Залежності 2-ої критичної частоти обертання від співвідношення l_{bm}/D_j для суцільних роторів

Як видно з рисунків, за порівняно невеликих довжин ротора $l_{bm} / D_j < 6$ «проміжки» між забороненими зонами стають дуже вузькими, або навіть перекриваються. Це унеможлиблює, в принципі, використання роторів певних діаметрів.

У випадку прямої прецесії вимушуюча сила збігається з напрямом вільних коливань, жорсткість системи збільшується й критична частота є дещо більшою за розраховану на підставі аналітичного підходу (п. 4.3.1), а у випадку зворотної прецесії напрями вимушуючих сил та вільних коливань протилежні, й значення $n_{кр}$ є меншими за аналітичні.

Вплив інерційних моментів та ефекту Коріоліса на ширину вищезгаданої смуги в околі критичних частот обертання проілюстровано на діаграмах Кемпбела (рис. 4.25), побудованих для ротора з розмірами $D_j = 100$ мм, $l_{bm} = 1,2$ м ($l_{bm} / D_j = 10$).

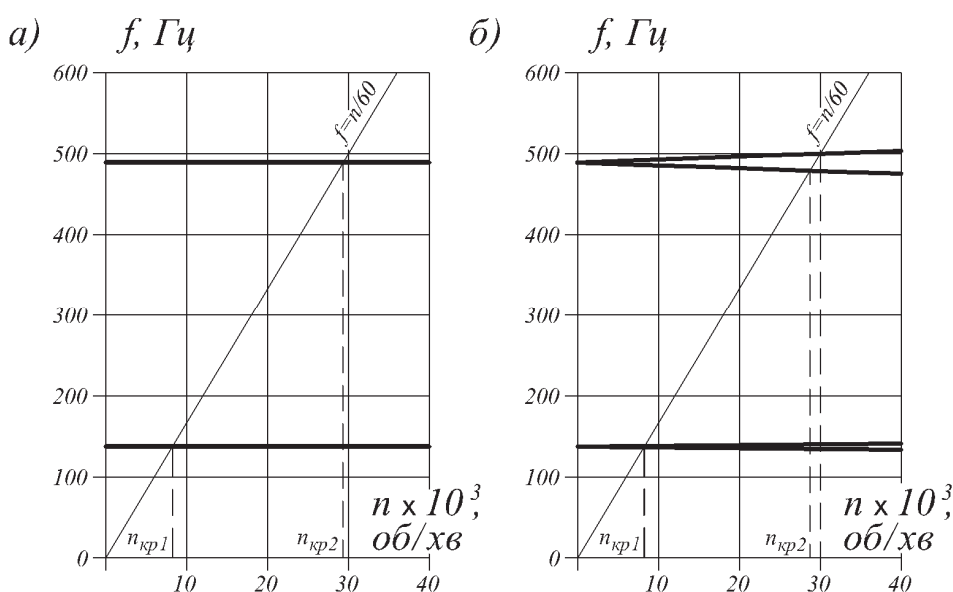


Рис. 4.25. Діаграми Кемпбела для вала $D_j = 100$ мм, $l_{bm} = 1,2$ м

а) без гіроскопічного ефекту; б) з урахуванням гіроскопічного ефекту

На рис. 4.25, б показано дві пари частотних залежностей: з урахуванням прямої та зворотної прецесій для 1-ої та 2-ої форми власних коливань. Перетини функції $f = n / 60$ з цими залежностями відповідають критичним частотам

обертання ротора за прямої та зворотної синхронних прецесій. На рис. 4.25, а тіж самі частоти визначені без урахування гіроскопічного ефекту.

Розрахунок критичних частот для складеного ротора вимагає прийняття певних додаткових допущень, пов'язаних з ідеалізацією форми такого ротора та способом кріплення полюсів. Конструкція ротора на рис. 4.2 передбачає наявність захисних кілець та бандажу, що утримують полюси від переміщень у будь-якому напрямі. Вважатимемо, що ці елементи не впливають на частоту власних коливань. Також припускаємо, що опори ротора є абсолютно жорсткими, а конструкційне та гістерезисне демпфування відсутнє.

За розрахунку залежностей критичних частот обертання від співвідношення розмірів l_{bm} / D_j решта розмірів ротора вважалися пропорційними до D_j або l_{bm} . За прийнятої системи позначень, показаної на рис. 4.26, параметризація розмірів є такою:

$$d_4 = \frac{D_j}{\sqrt{2}} - h_v, \text{ де } h_v = 6,67 \cdot 10^{-3} D_j + 3,33 \cdot 10^{-4} \text{ – глибина паза для кріплення}$$

полюса, [м] (за прийнятого діапазону $D_j = 0,025 \div 0,25$ м, глибина паза змінюється в межах $h_v = 0,5 \div 2,0$ мм);

$$d_3 = d_5 = d_4 - 4h_v; \quad d_2 = d_6 = d_3 - 4h_v; \quad d_1 = d_2 - 4h_v;$$

$$b_2 = b_6 = 0,12 \cdot l_{bm}; \quad b_1 = 0,25 \cdot l_{bm} - 0,5 \cdot b_2; \quad b_3 = b_5 = 0,04 \cdot l_{bm}; \quad b_4 = l_{bm} - 2 \cdot b_3 - b_2.$$

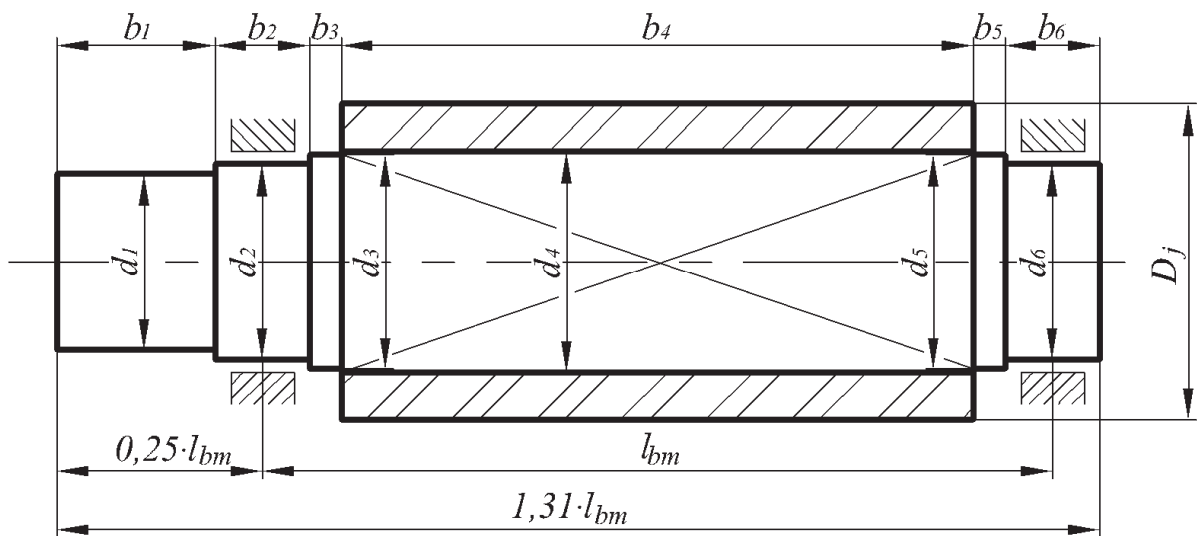


Рис. 4.26. Розміри складеного ротора

Зауважимо, що розмір d_4 є стороною квадрата (див. рис. 4.3, а,б).

Хоча така параметризація є доволі умовною, але дає можливість, на нашу думку, з достатньою точністю визначати власні частоти роторів у всьому діапазоні розмірів, які є технічно здійсненними з огляду на результати, отримані у п. 4.2.

Розраховані залежності для 1-ої критичної частоти обертання складеного ротора показані на рис. 4.27, а для 2-ої — на рис. 4.28.

Аналіз цих залежностей та результати аналітичного розрахунку дають право стверджувати, що за сталих зовнішніх сил, що діють на ротор, за зростання деформації вала зменшується його критична швидкість. Отже, зміна діаметру вала, віддалі між опорами, жорсткості вала в напрямі однієї з ортогональних осей, пружності опор — чинники, які роблять можливим вибір шляхів, що приведуть до зміни критичної частоти в напрямі необхідному, конструктору.

Існують практичні реалізації добре збалансованих технічних систем, які працюють на частоті, що перевищує 1-шу критичну [66]. У випадках коли ці системи містять електричні машини, їм, для переходу небезпечної зони $n_{кр1}$, необхідно підвищувати енергоспоживання. Генераторам — збільшувати потужність на валу, двигунам — споживану потужність. Тобто, прийняття рішення про роботу ВБПМ за межами $n_{кр1}$ повинно підкріплюватися дуже вагомими причинами.

Рекомендації загального характеру стосовно умов роботи роторів ВБПМ полягають у наступному:

- робоча частота обертання повинна бути меншою від 1-ої критичної частоти принаймні на 20%;
- за робочої частоти, що перевищує 1-шу критичну, вона повинна належати діапазону $1,4n_{кр1} \leq n < 0,8n_{кр2}$.

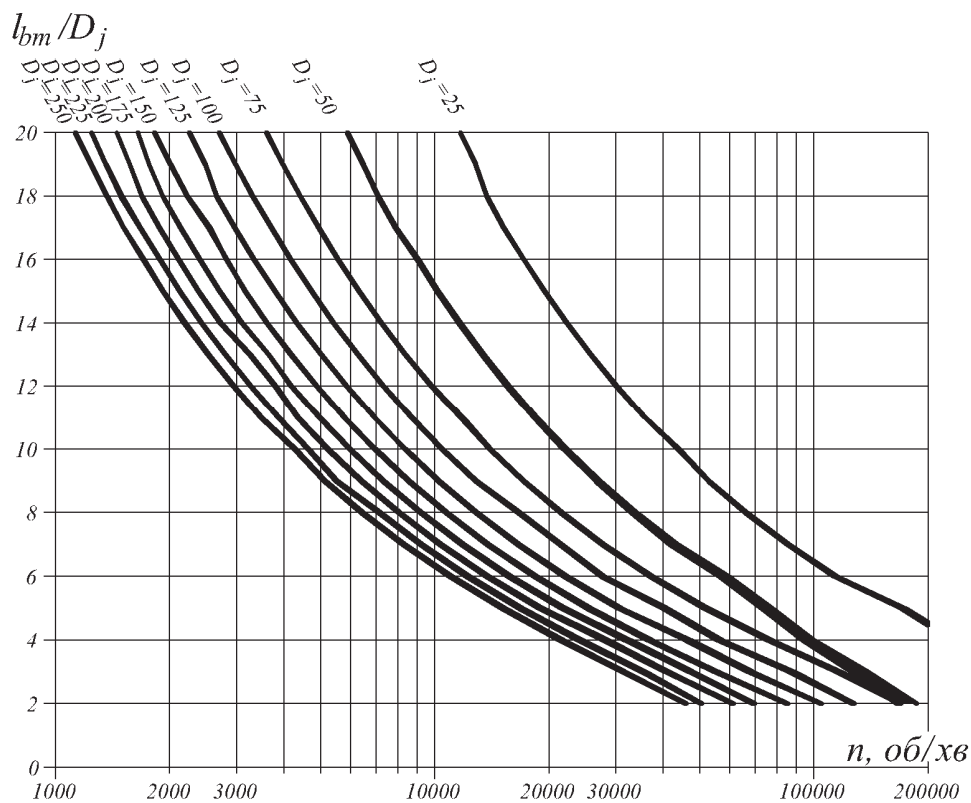


Рис. 4.27. Залежності 1-ої критичної частоти обертання від співвідношення l_{bm}/D_j для складених роторів

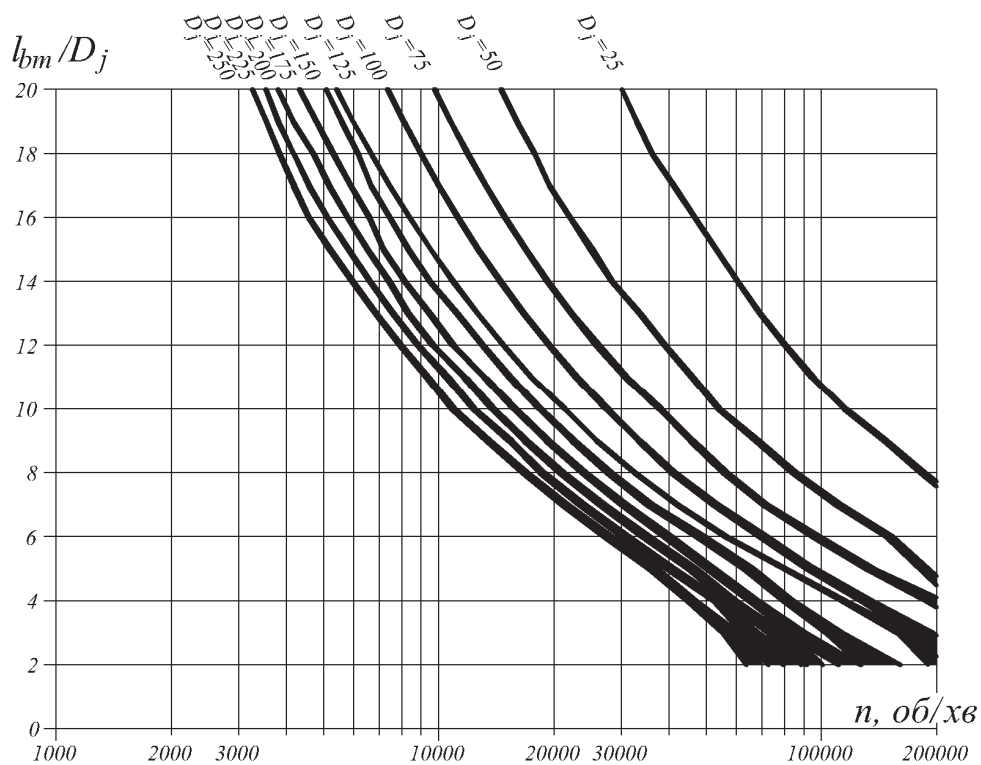


Рис. 4.28. Залежності 2-ої критичної частоти обертання від співвідношення l_{bm}/D_j для складених роторів

4.4. Опóри ротора

Займаючись проектуванням підшипникових вузлів ВБПМ, необхідно звернути увагу на низку чинників. Розташуємо їх у порядку спадання пріоритетів. Отже, конструктор повинен забезпечити:

- задану довговічність роботи підшипникового вузла за номінальної частоти обертання;
- працездатність підшипникового вузла за максимальної частоти обертання;
- температурну стабільність підшипникового вузла;
- необхідну жорсткість підшипникових опор;
- динамічну стійкість підшипникового вузла;
- екологічні вимоги.

Після концептуального вирішення вищезгаданих задач необхідно: обрати тип підшипника (ковзання або кочення); розробити конструкцію підшипникового вузла; встановити спосіб передачі обертального моменту, тип змащування та систему подачі змащувально-охолоджувальної рідини.

Розглянемо детальніше ці етапи проектування опор.

4.4.1. Вибір типу підшипникових опóр

Вибір типу підшипникових опор пропонуємо здійснювати на підставі рекомендацій (рис. 1.7) — за залежностями максимальної частоти обертання підшипників кочення та їх динамічної вантажності від середнього діаметру d_m (1.3). Як вже згадувалося у п. 1.2, ці залежності отримано, спираючись на передовий світовий досвід виробників підшипників кочення.

На початкових етапах проектування можна прийняти

$$d_m \approx 0,85D_j. \quad (4.31)$$

4.4.2. Опóри на підшипниках кочення

Для роторів ВБПМ використовують спеціальні високоточні підшипники кочення класу «*high speed*», як кулькові, так і роликові.

Кулькові радіально-упорні високошвидкісні підшипники складаються з

внутрішнього та зовнішнього кілець, виготовлених з високоякісних термостійких сталей, тіл кочення — сталевих або керамічних кульок на основі нітриду кремнію (Si_3N_4) та сепаратора з поліамідної або фенолформальдегідної пластмаси. Складові роликів підшипників виготовляються з використанням тих самих матеріалів (рис. 4.29). На рисунках справа в однаковому масштабі показані підшипники різних типів, що мають однаковий діаметр внутрішнього кільця.

Типові методики вибору підшипників кочення [12,105] відпрацьовані роками й увійшли до міжнародних та державних стандартів [41,230], однак, за високих частот обертання вони потребують істотного корегування.

Коли підшипник обертається з високою частотою, тиск на повернях дотику тіл кочення з кільцями призводить до збільшення внутрішніх напружень, викликаних відцентровою силою та перепадом температури між зовнішнім та внутрішнім кільцями. Можлива ситуація, коли рух у вигляді чистого кочення замінюється частковим ковзанням, зокрема внаслідок гіроскопічних моментів, що діють на тіло обертання. Таке просковзування матиме тенденцію до поступового збільшення, тому що надлишок тепла призводитиме до зменшення в'язкості змащувальної рідини. Ймовірно виникнення пробою масляного шару й повне заклинювання підшипника.

Значення відцентрової сили, що діє на тіло кочення, може бути співмірним з розрахунковим радіальним навантаженням та суттєво впливати на утомну міцність підшипника, скорочуючи довговічність його роботи. В таких випадках необхідно розраховувати контактні напруження між тілами кочення та зовнішнім кільцем, враховуючи цілу низку чинників, зокрема гіроскопічні моменти, реакцію змащувального шару, попередній осьовий натяг та деформації контактуючих тіл. Розрахунок такого рівня може стати темою окремого дослідження. До речі, фірми виробники підшипників «*high speed*» пропонують свої послуги у виконанні подібних обчислень.

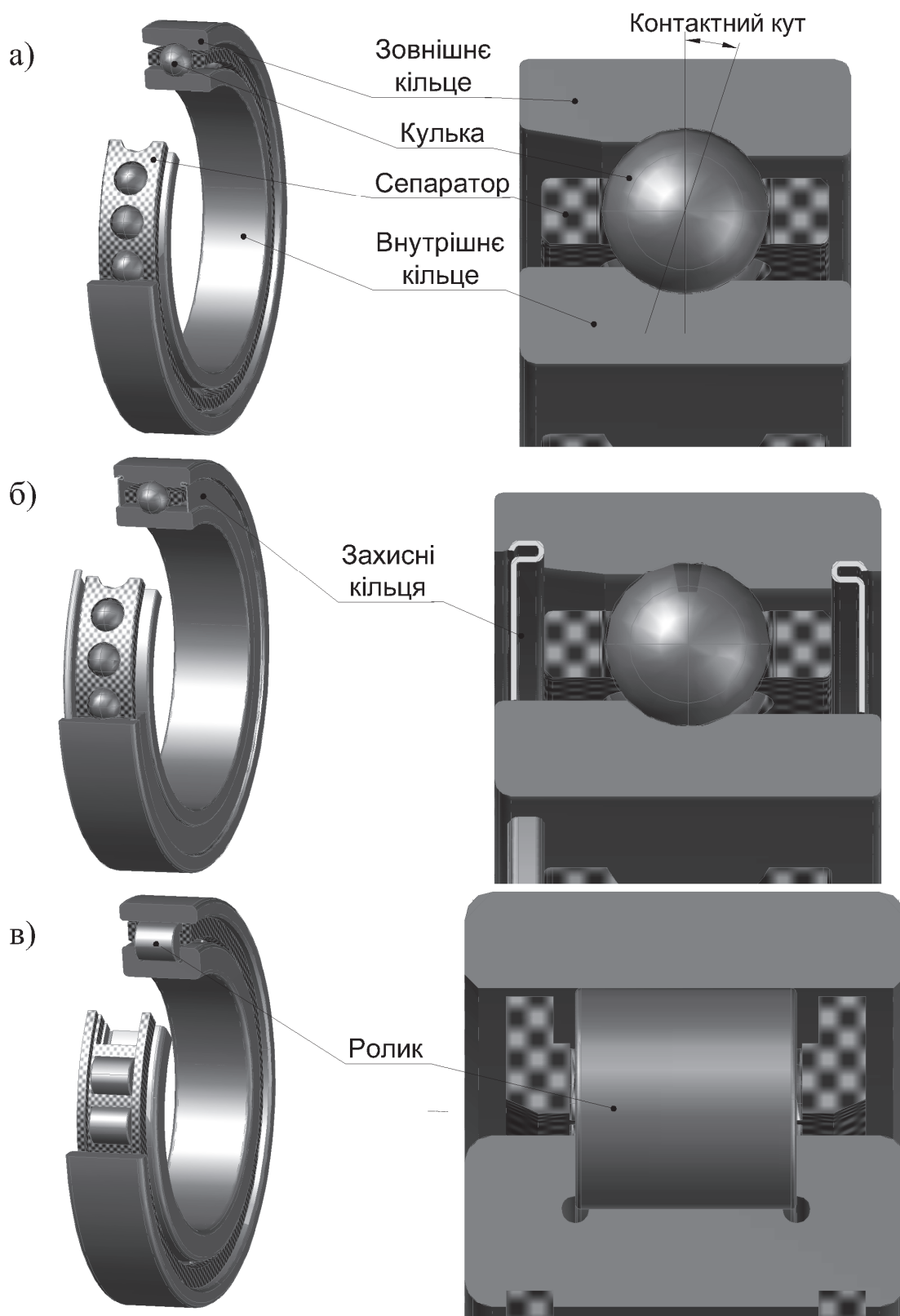


Рис. 4.29. Конструкції високошвидкісних підшипників кочення

- а) кульковий відкритий радіально-упорний;
 б) кульковий закритий радіально-упорний; в) роликовий відкритий радіальний

На етапі проектного синтезу необхідно мати відносно простий, але порівняно адекватний алгоритм вибору підшипників кочення. Тому пропонуємо прийняти наступну послідовність проектування підшипникових вузлів:

- розрахунок динамічного еквівалентного радіального навантаження;
- розрахунок базової динамічної вантажності;
- вибір системи змащування;
- розрахунок втрат на тертя;
- визначення продуктивності системи змащування;
- розрахунок скорегованого розрахункового ресурсу.

Розглянемо детальніше кожен етап даної послідовності

Динамічне еквівалентне радіальне навантаження — стале радіальне навантаження, за якого підшипник матиме такий самий ресурс, як і в умовах дійсного навантаження [41].

Таке навантаження N_r визначається як

$$N_r = XF_{pr} + YF_{pa}, \quad (4.32)$$

де X, Y — коефіцієнти динамічного радіального та осьового навантажень, відповідно;

F_{pr}, F_{pa} — радіальне та аксіальне навантаження на підшипник або радіальна та осьова складові фактичного навантаження, що діє на підшипник;

Значення коефіцієнтів X, Y бажано вибирати, користуючись технічною документацією обраної фірми виробника, а не на підставі рекомендацій зі стандартів або загальнотехнічних довідників. Наприклад, для кулькових «*high speed*» підшипників фірми SKF значення цих коефіцієнтів залежать від номінального кута контакту α між радіальним напрямом і прямою, що проходить через точки контакту тіл кочення та кілець, в осьовому перерізі підшипника (див. рис. 4.29, *a*). Так, для $\alpha = 18^\circ$ й у випадку, коли співвідношення складових навантаження $F_{pa}/F_{pr} \leq 0,57$, осьова складова не враховується — $X = 1; Y = 0$, інакше — $X = 0,43; Y = 1$. Для підшипників з $\alpha = 25^\circ$ співвідношення, за якого починають враховувати осьову

складову, становить $F_{pa}/F_{pr} \leq 0,68$, тобто за порушення цієї нерівності $X = 0,41$; $Y = 0,87$. Для роликкових підшипників, які не сприймають осьового навантаження, завжди $X = 1$; $Y = 0$. Допускається їх використання в парі з фіксуєчим радіально-упорним підшипником.

Радіальну складову F_{pr} , яка залежить від маси ротора, сили одностороннього магнітного притягання ротора до статора та радіальних навантажень, що виникатимуть за передавання обертового моменту від машини до приводу, розраховуємо за традиційними методиками [105]. Осьова F_{pa} , насамперед, залежить від величини попереднього осьового натягу F_{la} підшипників, наявність якого у ВБПМ є обов'язковою.

Причини, що примушують попередньо навантажувати підшипники, які й так працюють за межею утомної міцності матеріалів, наступні:

- запобігання проковзування між тілами обертання й кільцями і встановлення останніх у визначене (розрахункове) положення;
- запобігання наклепування бігової доріжки або тіл кочення;
- зменшення вібрацій та шумів;
- збільшення осьової жорсткості підшипників та підвищення точності переміщення вала.

Вибір величини попереднього натягу є ще одним чинником, що потребує особливої уваги за створення високошвидкісних машин. На етапі проектування, користуючись рекомендаціями фірм-виробників [313], обираємо наближене значення попереднього натягу залежно від застосування підшипникових опор (рис. 4.30). Його величина умовно розділена на класи: дуже легкий (*Extra Light*), легкий (*Light*), середній (*Medium*), важкий (*Heavy*). Для кулькових високошвидкісних підшипників використовують перші три класи. Якщо інші складові осьового навантаження підшипників невідомі, то саме це значення F_{la} фігуруватиме у (4.32) як F_{pa} .

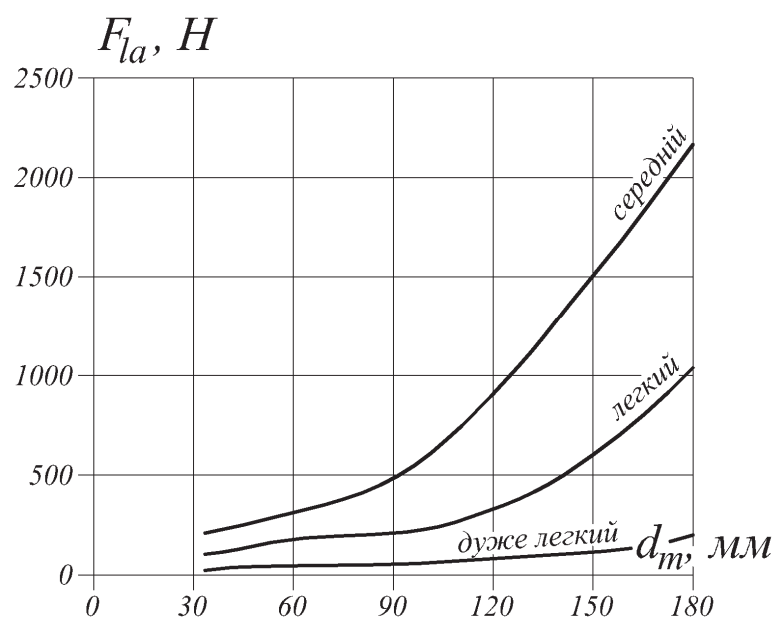


Рис. 4.30. Залежності попереднього натягу від середнього діаметра підшипника

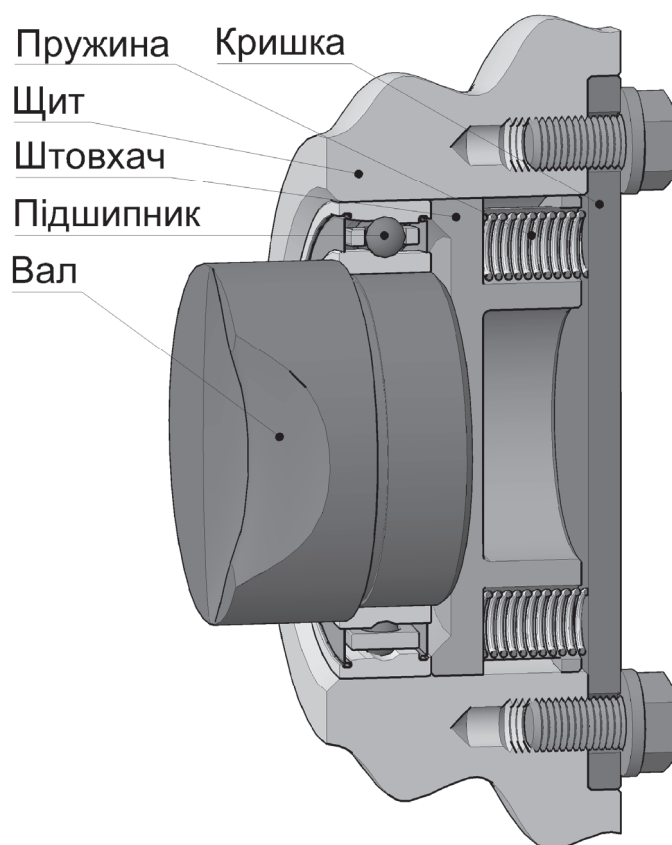


Рис. 4.31. Конструкція підшипникового вузла для створення попереднього натягу

Після вибору F_{la} належить розробити таку конструкцію підшипникового вузла, яка надаватиме можливість здійснювати його регулювання. Рекомендуємо конструкцію з використанням спіральних пружин, показану на рис. 4.31, в якій величина натягу практично не змінюється за обкатування машини, термічного розширення ротора і т.п.

Остаточно проблему вибору величини осьового натягу підшипників доцільно вирішувати на попередніх випробуваннях машини, орієнтуючись на робочу температуру підшипникового вузла.

Базова динамічна вантажність — це стале радіальне навантаження, яке умовно може сприймати підшипник протягом 1-го мільйона обертів за ймовірності безвідмовної роботи 90% [41].

Базова динамічна вантажність підшипника C_r визначається за відомого, заздалегідь заданого в ТЗ, значення базового розрахункового ресурсу.

Базовий розрахунковий ресурс — кількість обертів, яку одне кільце підшипника робить відносно іншого до появи перших ознак утомності матеріалу будь-якого з кілець або тіл кочення, що відповідає 90% надійності, за звичайних умов експлуатації [41].

Для перерахунку величини базового розрахункового ресурсу L_{10} у години, в залежності від номінальної частоти обертання, використовуються формули:

$$L_{10} = \frac{10^6}{60 \cdot n_H} \left(\frac{C_r}{N_r} \right)^3, \text{ [год]} \quad (4.33)$$

для кулькових підшипників або

$$L_{10} = \frac{10^6}{60 \cdot n_H} \left(\frac{C_r}{N_r} \right)^{\frac{10}{3}}, \text{ [год]} \quad (4.34)$$

для роликових.

Отже, на підставі (4.33), (4.34) можна обчислити шукану вантажність як

$$C_r = \frac{N_r}{25,54} \sqrt[3]{L_{10} n_H}, \text{ [Н]}; \text{ або } C_r = \frac{N_r}{18,47} (L_{10} n_H)^{0,3}, \text{ [Н]}, \quad (4.35)$$

для кулькових та роликових підшипників, відповідно.

За отриманий значенням C_r з довідникових джерел вибираємо необхідний підшипник. Якщо діаметр зовнішнього кільця обраного в такий спосіб підшипника перевищує діаметр D , або підшипника з необхідною вантажністю не існує, допускається встановлення комплекту (пари) підшипників з кожної сторони.

Система змащування та вибір її продуктивності.

Основною метою змащування є зменшення тертя та спрацювання підшипників. Такий ефект змащування можна пояснити наступним:

- створенням масляної плівки, яка запобігає прямому «металевому» дотику між деталями підшипника, що істотно зменшує спрацювання контактних поверхонь;
- збільшенням утомної довговічності підшипника, яка залежить від товщини масляної плівки між контактуючими тілами, а, отже, від в'язкості оливи;
- циркуляція оливи відводить тепло, що утворюється внаслідок тертя або привнесене ззовні, тим самим захищає підшипник від перегрівання, а оливу — від старіння;
- правильно спроектована система змащування перешкоджає домішкам з довкілля (конденсат, технічна вода) потрапляти у підшипник, а також запобігає корозії;
- масляна плівка певною мірою демпфує вібрації.

Для підшипників ВБПМ рекомендуємо застосовувати циркуляційні системи змащування, в яких олива, проходячи через точки тертя, перетікає назад у накопичувальний резервуар для повторного використання. Саме такі системи змащування забезпечують найефективніший тепловідвід.

Циркуляційні системи змащування бувають розімкненими (рис. 4.32, *a*) — тиск оливи в резервуарі рівний атмосферному, та замкненими (рис. 4.32, *б*) — тиск оливи в системі перевищує атмосферний.

До традиційних методів змащування ЕМ відносять: змащування консистентним мастилом, змащування рідкою оливою за способом «масляна ванна»; змащування за допомогою оливоподаючих кілець; змащування типу «масляний туман», струменеве (інжекторне) змащування та повітряно-оливне змащування.

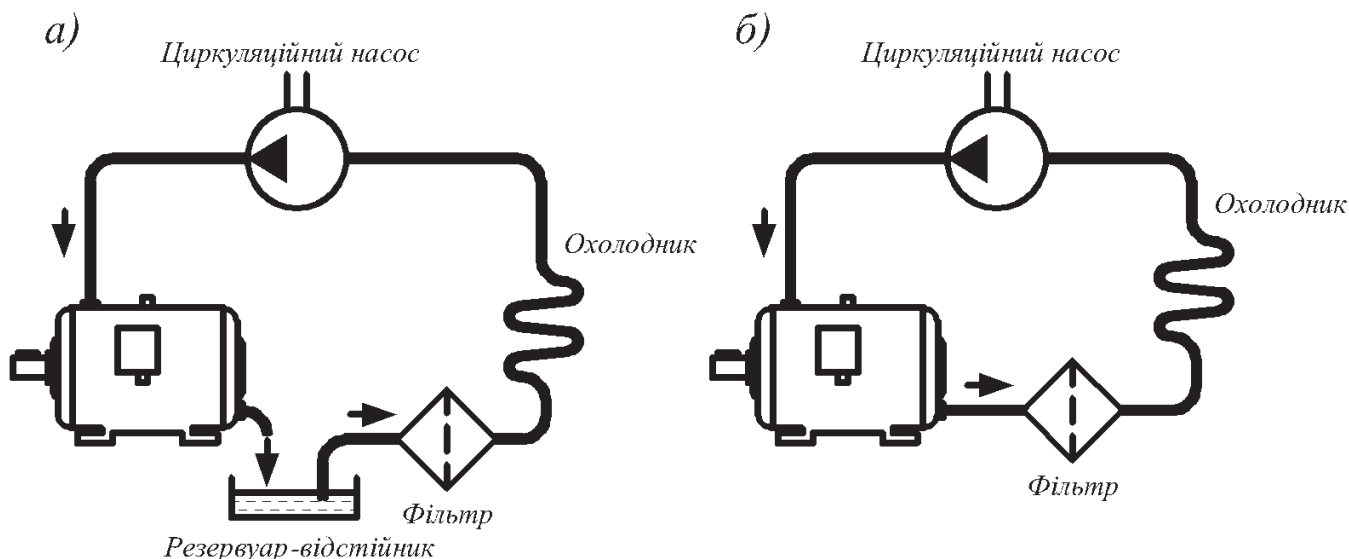


Рис. 4.32. Циркуляційні системи змащування: а) розімкнена; б) замкнена

Стосовно першого способу, він лишається найпростішим у реалізації та найдешевшим, але область його застосування у ВБПМ істотно вужча (див. рис. 1.7).

Застосування змащування за допомогою «масляної ванни», коли рідка олива підхоплюється обертовими деталями підшипника, розподіляється всередині та стікає назад у масляну ванну для ВБПМ може виявитися не ефективним. За високих частот обертання рівень оливи в зоні контакту істотно падає, а корпус підшипника або оливна камера стають переповненими.

Оливоподаючі кільця розташовують вільно на валу так, щоби нижня частина звисаючих кілець була занурена в оливу. Кільця, обертаючись разом з валом, переносять оливу з нижньої частини корпусу в зону змащування. Такий спосіб теж неприйнятний для використання у ВБПМ. Кільце, внаслідок своєї інерційності не встигатиме обертатися разом з валом.

Спосіб змащування «масляний туман» передбачає перетворення оливи на аерозоль за допомогою стиснутого повітря. Для цього використовуються спеціальні генератори «масляного туману», який по трубопроводах потрапляє у зону змащування. Останнім часом такий спосіб не рекомендують до використання внаслідок його негативного впливу на довкілля. Однак застосування новітніх конструкцій, якісних ущільнень та нетоксичних синтетичних олив допускає використання цього способу для змащування ВБПМ.

Повітряно-оливне змащування передбачає подачу оливи в потік стиснутого повітря через задані інтервали часу, за допомогою спеціального дозуючого змішувача (рис. 4.33). Невелика й точно дозована кількість оливи спрямовується до кожного підшипника. Олива «сповзає» по стінках каналів, притискаючись до них дією стиснутого повітря, й потрапляє у підшипник через штуцер. Аерозоль при цьому не утворюється, що зменшує потрапляння оливи в довкілля. Стиснуте повітря одночасно охолоджує підшипник та створює надлишковий тиск у машині, що перешкоджає проникненню всередину речовин, що забруднюють оливу. Цей спосіб забезпечує найнижчу температуру підшипника за мінімальної витрати оливи [313].

Для найвищих частот обертання, досяжних для підшипників кочення ($d_m n > 1 \cdot 10^6$) застосовують струменеве (інжекторне) змащування. Крізь одну або кілька форсунок струмені змащувальної речовини під сталим тиском вприскуються у підшипники (рис. 4.34). За високої частоти обертання повітря, що оточує підшипник та обертається разом з ним, формує своєрідний повітряний корок. Для його подолання, швидкість подачі оливи повинна бути принаймні на 20% більшою за лінійну швидкість на поверхні внутрішнього кільця підшипника. Внаслідок відносно великої витрати оливи, яка необхідна для ефективного тепловідведення, у машинах з таким способом змащування деколи доводиться застосовувати додаткові пристрої (насоси) для відсмоктування її надлишків.

У відповідності до рекомендацій фірми-виробника [313], необхідна витрата рідких змащувальних речовин в залежності від середнього діаметра d_m підшипника за $d_m n < 0,8 \cdot 10^6$ для повітряно-оливного типу змащування показана на рис. 4.35.

За вищих значень фактору $d_m n$ необхідну витрату оливи визначають експериментальним шляхом.

У випадку струменевого змащування спосіб розрахунку необхідної витрати оливи наступний. За графіком на рис. 4.36 задаємося необхідною кінематичною в'язкістю змащувальної оливи за робочої температури. Обране значення в'язкості ν_m в майбутньому буде орієнтиром для обрання марки необхідного мастила.

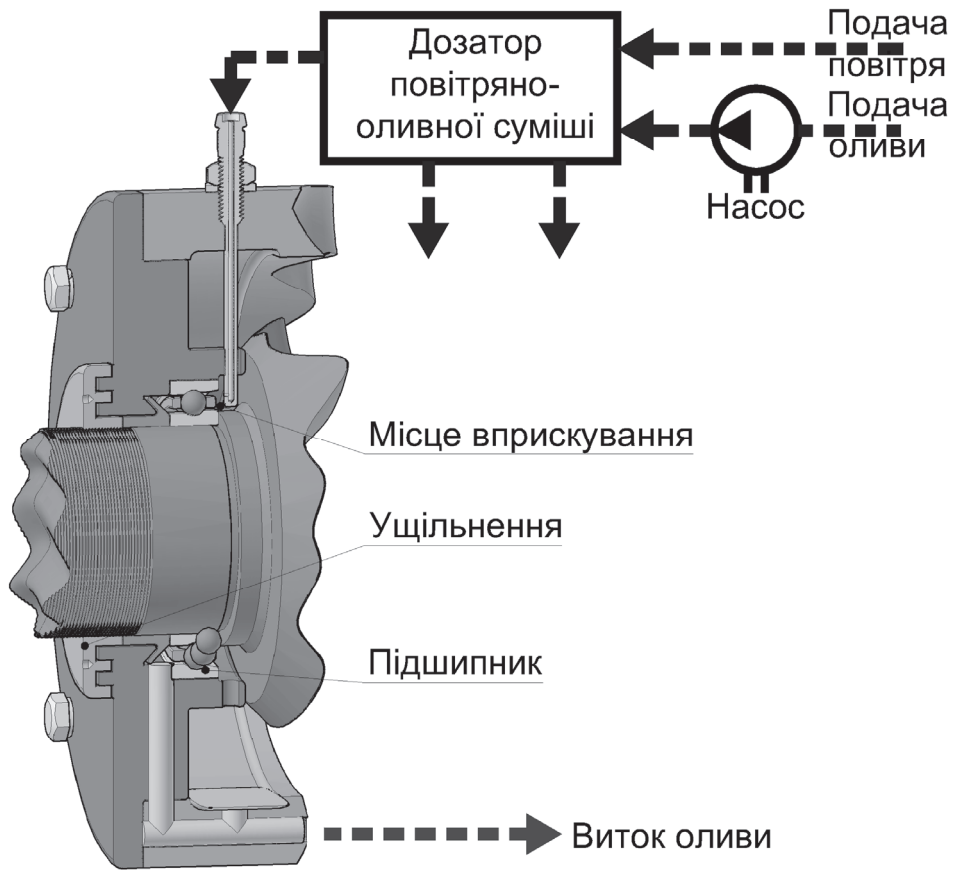


Рис. 4.33. Повітряно-оливна система змащування

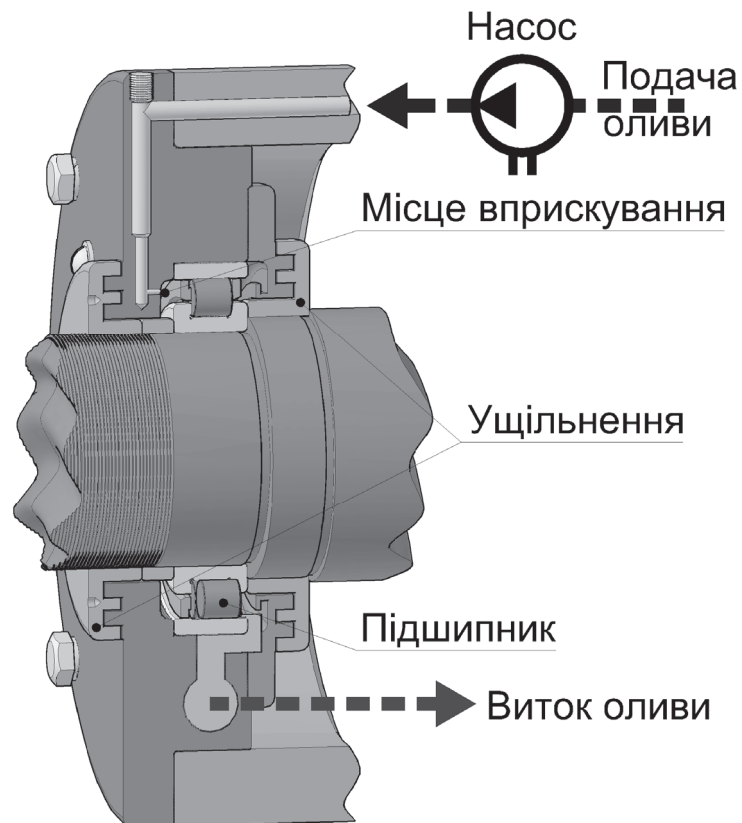


Рис. 4.34. Струменева (інжекторна) система змащування

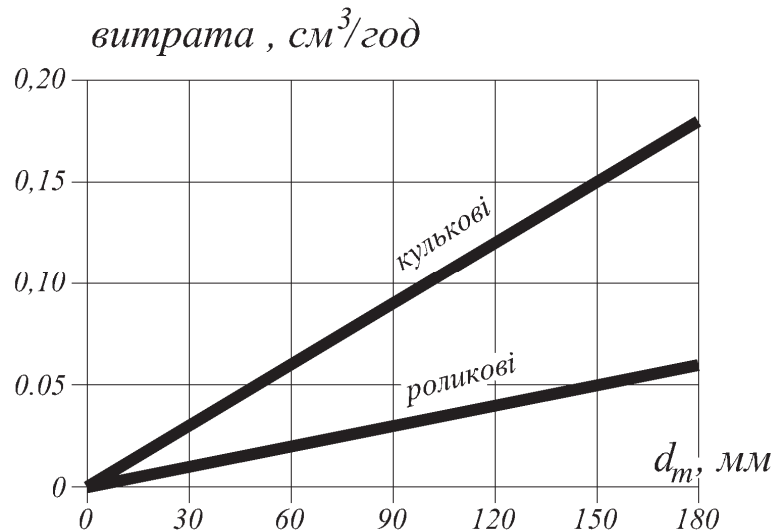


Рис. 4.35. Залежності витрати оливи від середнього діаметру для підшипників різних типів за повітряно-оливного змащування

Далі визначаємо обертовий момент опору підшипника

$$M_f = k_1 N_r d_m + k_2 (v_m n_{\max})^{\frac{2}{3}} d_m^3, \quad (4.36)$$

де k_1 – коефіцієнт, що залежить від типу підшипника та еквівалентного навантаження N_r , за (4.32);

k_2 – коефіцієнт, залежний від способу змащування.

Значення k_1 можна обчислити за емпіричними формулами [310]

$$k_1 = (0,02v_m + 0,9) \cdot 10^{-3} \quad k_1 = (0,05v_m + 2,0) \cdot 10^{-3} \quad (4.37)$$

для кулькових та роликових підшипників, відповідно.

Кінематичну в'язкість у (4.36), (4.37) належить підставляти у [сСт] або $\left[\frac{\text{мм}^2}{\text{с}} \right]$, n_{\max} – у [об/хв], решта величин у системі SI. Формули (4.37) справедливі для діапазону v_m до $150 \text{ мм}^2/\text{с}$.

Коефіцієнт k_2 визначається за результатами випробувань. Для початкового оцінювання рівня втрат у підшипниках його можна прийняти $k_2 = 0,14$ для підшипників з керамічними тілами кочення та $k_2 = 0,16$ — зі сталевими.

Втрати потужності у підшипниках визначаємо як

$$P_b = \frac{\pi \cdot n_{\max}}{30} M_f. \quad (4.38)$$

Тепер об'ємна витрата оливи, що забезпечує охолодження підшипника, розраховується як

$$Q_t = k_{rs} \frac{P_b}{\gamma_m c_p \Delta T}, \left[\frac{m^3}{c} \right], \quad (4.39)$$

де $k_{rs} = 1,3 \div 1,5$ – коефіцієнт запасу;

γ_m, c_p – густина та теплоємність оливи за робочої температури підшипника;

ΔT – його допустиме перевищення температури.

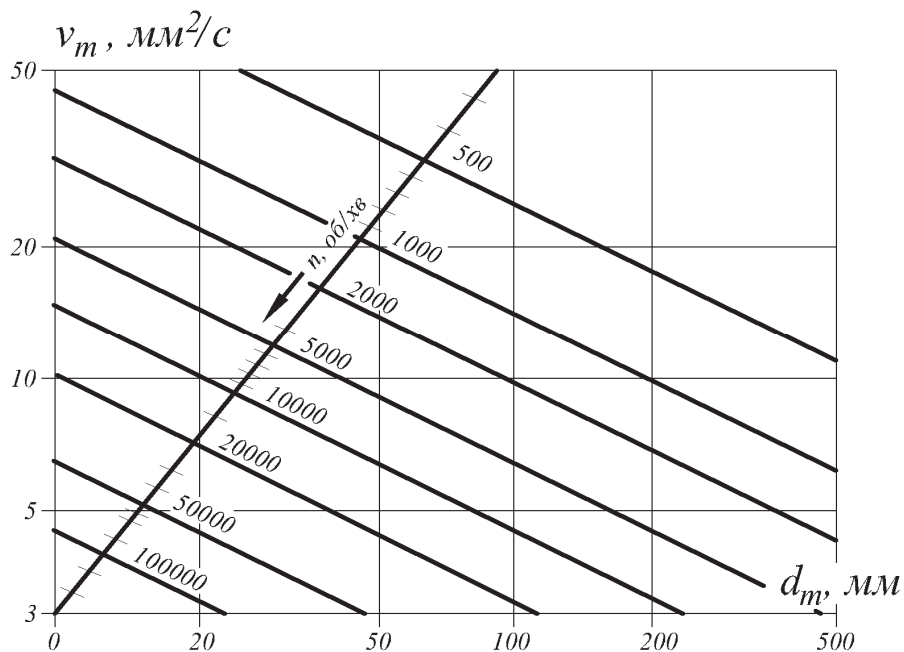


Рис. 4.36. Залежності необхідної кінематичної в'язкості оливи від діаметра d_m підшипника за різних частот обертання (запозичене з [253])

У табл. 4.4 здійснено порівняння різних способів змащування, яке, на нашу думку, допоможе з остаточним вибором.

Скорегований розрахунковий ресурс L_{na} — розрахунковий ресурс, отриманий шляхом корегування базового розрахункового ресурсу для заданого рівня надійності, спеціальних властивостей підшипника та конкретних умов експлуатації [230].

Порівняння методів змащування підшипників кочення

Назва методу	Переваги	Недоліки
Змащування консистентним мастилом	<ul style="list-style-type: none"> • низька вартість; • певне обмеження зростання температури підшипника; • не потребує обслуговування; 	<ul style="list-style-type: none"> • погіршення властивостей мастила може призвести до заклинювання підшипника; • не запобігає проникненню у зону контакту сторонніх речовин з довкілля;
«Масляний туман»	<ul style="list-style-type: none"> • відсутня небезпека старіння оливи, внаслідок її постійної подачі; • часткове перешкоджання потраплянню сторонніх речовин (порох, конденсат, технічна вода) з довкілля в зону тертя; 	<ul style="list-style-type: none"> • забруднює довкілля; • витрата оливи залежить від її в'язкості та температури, тому важко підтримувати її на мінімально необхідному рівні; • важко переконатися у фактичній подачі оливи в зону тертя;
Струменеве (інжекційне) змащування	<ul style="list-style-type: none"> • висока витрата оливи практично повністю унеможлиблює потрапляння сторонніх речовин з довкілля в зону тертя; • є можливість, певною мірою, регулювати температуру підшипника; 	<ul style="list-style-type: none"> • високі втрати на тертя; • не застосовують для вертикально розташованих валів, внаслідок потенційно можливих витоків оливи; • порівняно висока вартість;
Повітряно-оливне змащування	<ul style="list-style-type: none"> • можливість регулювання подачі змащувальної суміші дозволяє підтримувати температуру підшипника на бажаному рівні; • за рахунок часткового охолодження повітрям процес тепловідведення стає порівняно ефективнішим; • немає небезпеки старіння оливи; • перешкоджає стороннім речовинам з довкілля потрапляти в зону змащування; • порівняно низький рівень забруднення довкілля; 	<ul style="list-style-type: none"> • вартість доволі висока; • важко встановити факт безпосередньої подачі оливної суміші в підшипник.

Для особливо відповідальних ВБПМ, а також для емпіричного врахування чинників, що зменшують довговічність високошвидкісних підшипників, доцільно визначити L_{na} так

$$L_{na} = a_1 a_2 a_3 L_{10}, \quad (4.40)$$

де a_1, a_2, a_3 – коефіцієнти корегування ресурсу в залежності від надійності, спеціальних властивостей та умов роботи підшипника, відповідно.

Значення коефіцієнта a_1 наведені у [230], тут лише зазначимо, що за

надійності 99% $a_1 = 0,21$.

Значення коефіцієнта a_2 змінюються за умови застосування спеціальних матеріалів чи технологічних процесів при виготовленні підшипника або за впровадження новітніх конструкційних особливостей. Наукові дані не дають змогу визначити залежності між значенням a_2 та кількісними характеристиками притаманними тому чи іншому підшипнику, тому повинні ґрунтуватися на результатах експериментальних досліджень та експлуатаційних спостереженнях.

Значення коефіцієнта a_3 повинно залежати від основних експлуатаційних умов, що безпосередньо впливають на ресурс підшипника. Наприклад: величина та напрям навантаження; якість змащування з урахуванням частоти обертання, температури та наявності сторонніх включень у мастилi та умов, які викликають зміну властивостей матеріалів. У випадку корегування ресурсу високошвидкісних підшипників, значення коефіцієнтів a_2 та a_3 повинні вибиратися згідно рекомендацій відповідних фірм-виробників.

4.4.3. Опори на підшипниках ковзання

Конструкції підшипників ковзання доволі різноманітні, але використання їх як опор високошвидкісних машин істотно зменшує кількість допустимих варіацій. Так, вимоги до безпеки експлуатації та відповідного рівня жорсткості практично виключають можливість використання роз'ємних (складених з двох половин) конструкцій. Отже, типовий підшипник ковзання, що функціонує як опора ротора ВБПМ, складається з вкладки (рис. 4.37), виготовленої з антифрикційного матеріалу, яка запресовується безпосередньо в корпус (рис. 4.38), або представляє собою складену конструкцію безкорпусного або фланцевого виконання (рис. 4.39) [44]. Відповідна опорна ділянка вала називається цапфою. Внутрішня поверхня вкладки містить канавки різної форми для рівномірного розподілу змащувальної рідини. Олива подається через отвір або отвори у стінці вкладки.

З метою уніфікації підшипникового вузла та задля вимог повної взаємозамінності, доцільно застосовувати складніші конструкції, які, крім вкладки, ще містять корпусні елементи та елементи кріплення (рис. 4.40).

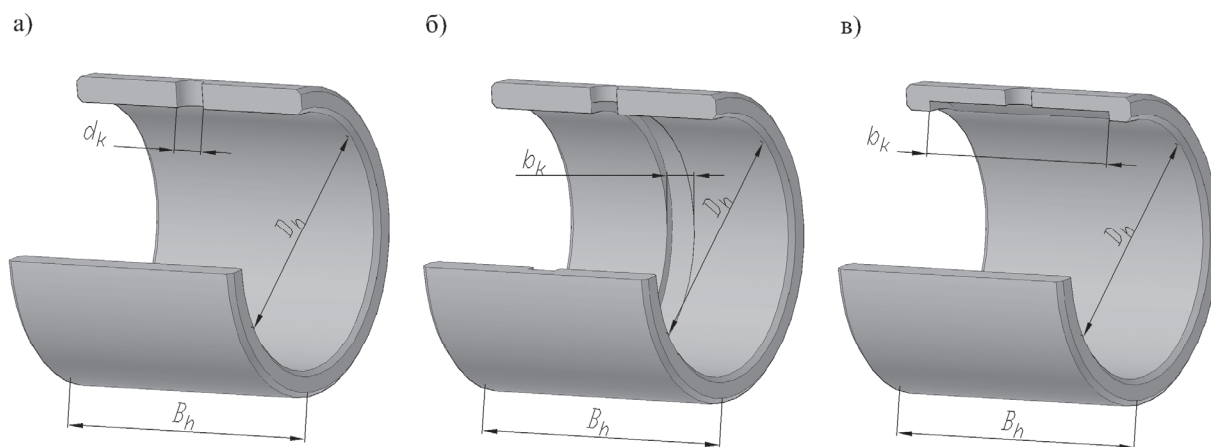


Рис. 4.37. Вкладки підшипників ковзання

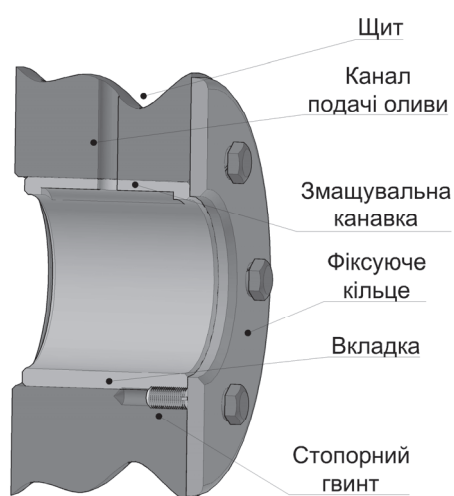


Рис. 4.38. Нероз'ємний підшипник, запресований у щит

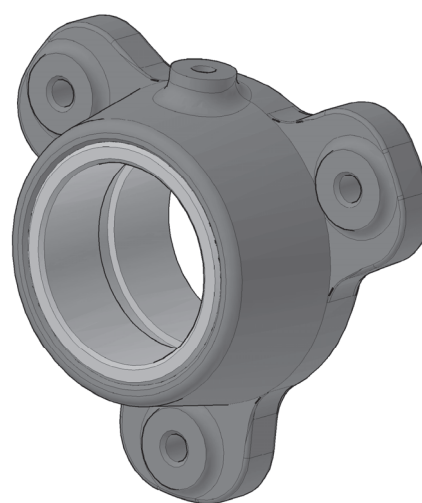


Рис. 4.39. Нероз'ємний підшипник фланцевого виконання

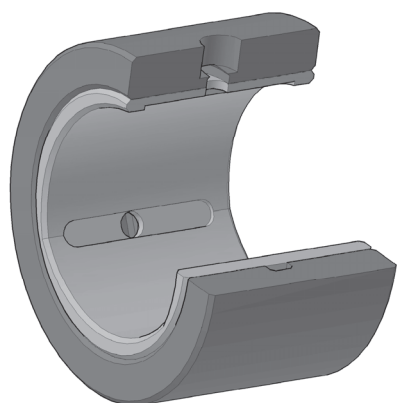


Рис. 4.40. Взаємозамінний триклиновий підшипник

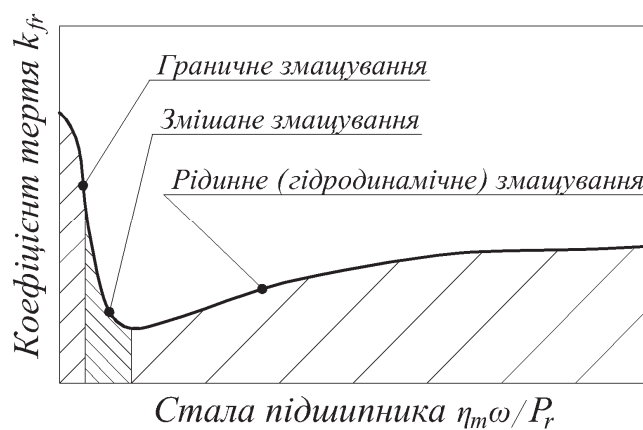


Рис. 4.41. Діаграма Герсі-Штрібека

Сама вкладка може вся складатися з одного матеріалу або бути біметалевою з нанесенням відносно тонкого шару антифрикційного покриття. Основні матеріали, що використовуються для виготовлення вкладок, — чавуни, бронзи, латуні, алюмінієві та цинкові сплави, бабіти, металокерамічні композити, графіт.

Розміри, форма розточки та чистота обробки поверхні цапфи — це не повний перелік факторів, що безпосередньо впливають на функціональну придатність підшипникового вузла.

Завдячуючи експериментально отриманій кривій Герсі-Штрібека (рис. 4.41), розрізняють три режими тертя у підшипниках ковзання. Граничне змащування — проявляється за малих швидкостей ковзання ($<0,1$ мм/с) та тонкого змащувального шару, що покриває цапфу і вкладку й утримується за рахунок адгезії молекул оливи й матеріалу поверхні вкладки. На вершинах мікронерівностей поверхонь відбувається руйнування оливної плівки й виникає безпосередній контакт двох контактуючих поверхонь.

Подальше зростання швидкості ковзання призводить до швидкого зменшення коефіцієнта тертя та віддалення поверхонь ковзання одна від одної. Однак можливість безпосереднього дотику окремих виступів мікронерівностей поверхонь не виключена. Такий режим розрізняють як «змішане» або «напіврідинне» тертя.

Рідинне тертя — товщина змащувального шару настільки велика, що виключає безпосередній контакт поверхонь ковзання.

Підшипники ковзання високошвидкісних машин повинні працювати в режимі рідинного тертя, за виключенням пусків та зупинок. Утворення режиму рідинного тертя є основним критерієм розрахунку таких підшипників.

Пропонуємо підхід, який дозволить розв'язати дану задачу, застосовуючи аналітичні та чисельні математичні методи, які добре формалізуються й адаптовані для використання комп'ютерів.

Вхідними даними проектного розрахунку підшипника ковзання вважатимемо:

- радіальне навантаження на підшипникову опору N_r , Н;
- частоту обертання n , об/хв;
- нормалізований внутрішній діаметр вкладки D_h , м;

- густину оливи γ_m , кг/м³;
- допустиме перевищення температури оливи ΔT , °С.

Починаємо розрахунок з визначення лінійної швидкості на поверхні цапфи. Її діаметр ще невідомий, тому у формулі фігуруватиме внутрішній діаметр вкладки. Отже,

$$v_s = \frac{\pi D_h n}{60}. \quad (4.41)$$

Кутова швидкість ротора

$$\omega = \frac{2\pi \cdot n}{60}. \quad (4.42)$$

За рекомендаціями [203] задаємося значенням відносного діаметрального проміжку

$$\psi = \frac{D_h - D_{sh}}{D_{sh}}, \quad (4.43)$$

де D_{sh} – діаметр цапфи (його нормалізовані значення в залежності від лінійної швидкості занесено до табл. 4.5).

Таблиця 4.5

Нормалізовані значення $\psi \cdot 10^3$

Діаметр вкладки D_h , мм	Лінійна швидкість поверхні цапфи v_s , м/с				
	0-3	3-10	10-25	25-50	50-125
0-100	1,32	1,6	1,9	2,24	2,24
100-250	1,12	1,32	1,6	1,9	2,24
>250	1,12	1,12	1,32	1,6	1,9

Значення ψ наближено можна визначити за формулою

$$\psi = 0,8 \cdot 10^{-3} \sqrt[4]{v_s}. \quad (4.44)$$

Далі, з (4.43) визначаємо діаметр цапфи

$$D_{sh} = \frac{D_h}{\psi + 1}, \quad (4.45)$$

й, за необхідності, підбираємо стандартну посадку.

Подальший розрахунок потребує визначення мінімальної товщини масляного шару h_0 за робочого навантаження підшипника, яка забезпечуватиме гарантовану відсутність дотику цапфи та вкладки. Очевидно, що допустима величина цього проміжку визначатиметься як сума висот мікронерівностей Ra_h , Ra_s вкладки та цапфи, відповідно, та абсолютної деформації вала ε_s на довжині підшипника:

$$h_0 = Ra_h + Ra_s + \varepsilon_s. \quad (4.46)$$

На даному етапі скористаємося експериментально напрацьованими рекомендаціями щодо вибору цього значення [203] — рекомендовані значення мінімальної товщини масляного шару наведені в табл. 4.6.

Таблиця 4.6

Рекомендовані значення $h_0 \cdot 10^6$, м

Діаметр цапфи D_{sh} , мм	Лінійна швидкість поверхні цапфи v_s , м/с				
	0-1	1-3	3-10	10-30	>30
24-63	3	4	5	7	10
63-160	4	5	7	9	12
160-400	6	7	9	11	14

Тепер визначаємо абсолютний та відносний ексцентриситети вала:

$$e = \frac{D_h - D_{sh}}{2} - h_0; \quad (4.47) \quad \varepsilon = 1 - \frac{2h_0(\psi + 1)}{D_h \cdot \psi}. \quad (4.48)$$

Усі розв'язки (1.4) передбачають ламінарний характер руху оливи у змащувальному шарі підшипника. Критерієм для визначення характеру течії є число Рейнольдса:

$$Re = \frac{\pi D_{sh} (D_h - D_{sh}) \cdot \gamma_m^n}{120 \cdot \eta_m}, \quad (4.49)$$

де η_m — динамічна в'язкість оливи, Па·с.

Експериментально встановлено [157], що ламінарний потік буде мати місце за умови

$$Re \leq 41,3 \sqrt{\frac{D_{sh}}{D_h - D_{sh}}}. \quad (4.50)$$

Отже, з виразів (4.49) та (4.50) визначимо мінімальне значення динамічної в'язкості оливи, яке забезпечуватиме ламінарну течію за робочої температури:

$$\eta_m \geq \frac{\pi D_{sh}(D_h - D_{sh}) \cdot \gamma_m^n}{4956 \cdot \sqrt{\frac{D_{sh}}{D_h - D_{sh}}}} \quad (4.51)$$

Відповідне значення кінематичної в'язкості, $\left[\text{мм}^2/\text{с} \right] = [\text{сСт}]$ визначатиметься як

$$\nu_m = \frac{\eta_m \cdot 10^6}{\gamma_m} \quad (4.52)$$

й може використовуватися для вибору марки оливи з каталожних джерел.

На даному етапі треба пам'ятати про залежність в'язкості змащувальних олив від температури та, за необхідності, виконати перерахунок [278]:

$$\eta_m = 0,36 \cdot 10^{-3} \left(\frac{\eta_{m40}}{0,36 \cdot 10^{-3}} \right)^{\left(\frac{191,953}{T+95} - 0,421874 \right)}, \quad (4.53)$$

де η_m – динамічна в'язкість за робочої температури $T = 40 + \Delta T$;

η_{m40} – динамічна в'язкість за температури 40°C.

Для розрахунку необхідної робочої довжини підшипника B_h пропонуємо скористатися значенням числа Зоммерфельда, яке встановлює умовну межу між напіврідинним та рідинним тертям. Для підшипників із зоною обхвату цапфи 360°, число Зоммерфельда визначається як [202]

$$So = \left(\frac{B_h}{D_{sh}} \right)^2 \cdot \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{\pi^2(1 - \varepsilon^2) + 16\varepsilon^2}}{2(1 - \varepsilon^2)^2} \cdot \frac{a_1(\varepsilon - 1)}{a_2 + \varepsilon}, \quad (4.54)$$

де B_h – розрахункова довжина підшипника;

$$a_1 = 1,1642 - 1,9456 \left(\frac{B_h}{D_{sh}} \right) + 7,1161 \left(\frac{B_h}{D_{sh}} \right)^2 - 10,1073 \left(\frac{B_h}{D_{sh}} \right)^3 + 5,0141 \left(\frac{B_h}{D_{sh}} \right)^4;$$

$$a_2 = -1,000026 - 0,023634 \left(\frac{B_h}{D_{sh}} \right) - 0,4215 \left(\frac{B_h}{D_{sh}} \right)^2 - 0,038817 \left(\frac{B_h}{D_{sh}} \right)^3 - 0,090551 \left(\frac{B_h}{D_{sh}} \right)^4$$

– розрахункові коефіцієнти.

Для виникнення рідинного тертя необхідно виконання умови

$$\frac{N_r \psi^2}{B_h D_{sh} \omega \eta_m} \leq S_o. \quad (4.56)$$

Використовуючи цю властивість, сформуємо систему рівнянь, яка дасть змогу визначити таку мінімальну робочу довжину підшипника, яка, за відомих діаметральних розмірів та в'язкості оливи, забезпечуватиме режим рідинного тертя.

Отже, на підставі (4.56) та (4.54) отримуємо

$$k_1 B_h^{-1} - \frac{k_2 a_1 B_h^2}{D_{sh}^2 a_2 + D_{sh}^2 \varepsilon} = 0, \quad (4.57)$$

де $k_1 = \frac{N_r \psi^2}{B_h D_{sh} \omega \eta_m}$; $k_2 = \frac{\varepsilon \cdot (\varepsilon - 1) \cdot \sqrt{\pi^2 (1 - \varepsilon^2) + 16 \varepsilon^2}}{2(1 - \varepsilon^2)^2}$ – сталі коефіцієнти.

Разом з (4.55) отримуємо нелінійну САР, розв'язувати яку будемо методом Ньютона. Лінійна САР, породжувана нелінійною на l -ій ітерації методу Ньютона

$$\begin{aligned} & -k_1 \left(B_h^{(l-1)} \right)^{-2} \Delta B_h^{(l)} - \frac{\left(2k_2 a_1^{(l-1)} B_h^{(l-1)} \left(D_{sh}^2 a_2^{(l-1)} + D_{sh}^2 \varepsilon \right) \right) \Delta B_h^{(l)} +}{\left(D_{sh}^2 a_2^{(l-1)} + D_{sh}^2 \varepsilon \right)^2} \\ & + \frac{\left(k_2 \left(B_h^{(l-1)} \right)^2 \left(D_{sh}^2 a_2^{(l-1)} + D_{sh}^2 \varepsilon \right) \right) \Delta a_1^{(l)} - \left(k_2 a_1^{(l-1)} \left(B_h^{(l-1)} \right)^2 D_{sh}^2 \right) \Delta a_2^{(l)}}{=} -y^{(l-1)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta a_1^{(l)} &= A_1^{(l-1)} \Delta B_h^{(l)}; \\ \Delta a_2^{(l)} &= A_2^{(l-1)} \Delta B_h^{(l)}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

де

$$A_1^{(l-1)} = \left(-\frac{1,9456}{D_{sh}} + \frac{2 \cdot 7,1161 \cdot B_h^{(l-1)}}{D_{sh}^2} - \frac{3 \cdot 10,1073 \cdot \left(B_h^{(l-1)} \right)^2}{D_{sh}^3} + \frac{4 \cdot 5,0141 \cdot \left(B_h^{(l-1)} \right)^3}{D_{sh}^4} \right);$$

$$A_2^{(l-1)} = \left(-\frac{0,023634}{D_{sh}} - \frac{2 \cdot 0,4215 \cdot B_h^{(l-1)}}{D_{sh}^2} - \frac{3 \cdot 0,038817 \cdot \left(B_h^{(l-1)}\right)^2}{D_{sh}^3} - \frac{4 \cdot 0,090551 \cdot \left(B_h^{(l-1)}\right)^3}{D_{sh}^4} \right)$$

– коефіцієнти, значення яких залежить від $(l-1)$ -го наближення кореня системи;

$$y^{(l-1)} = k_1 \left(B_h^{(l-1)}\right)^{-1} - \frac{k_2 a_1^{(l-1)} \left(B_h^{(l-1)}\right)^2}{D_{sh}^2 a_2^{(l-1)} + D_{sh}^2 \varepsilon} \quad (4.59)$$

– нев'язка рівняння (4.57), обчислена за $(l-1)$ -им наближенням кореня.

Ця лінійна САР дозволяє знайти поправки $\Delta B_h^{(l)}$, $\Delta a_1^{(l)}$, $\Delta a_2^{(l)}$ відповідних невідомих на l -ій ітерації методу Ньютона.

Вилучимо з системи (4.58) поправки, що визначаються за формулами

$$\left[\begin{aligned} & -k_1 \left(B_h^{(l-1)}\right)^{-2} - \frac{\left(2k_2 a_1^{(l-1)} B_h^{(l-1)} \left(D_{sh}^2 a_2^{(l-1)} + D_{sh}^2 \varepsilon\right)\right)}{\left(D_{sh}^2 a_2^{(l-1)} + D_{sh}^2 \varepsilon\right)^2} + \\ & + \frac{\left(k_2 \left(B_h^{(l-1)}\right)^2 \left(D_{sh}^2 a_2^{(l-1)} + D_{sh}^2 \varepsilon\right)\right) A_1^{(l-1)} - \left(k_2 a_1^{(l-1)} \left(B_h^{(l-1)}\right)^2 D_{sh}^2\right) A_2^{(l-1)}}{\left(D_{sh}^2 a_2^{(l-1)} + D_{sh}^2 \varepsilon\right)^2} \end{aligned} \right] \Delta B_h^{(l)} = y^{(l-1)}. \quad (4.60)$$

Розв'язавши (4.60) відносно $\Delta B_h^{(l)}$, визначимо l -те наближення за формулою

$$B_h^{(l)} = B_h^{(l-1)} + \Delta B_h^{(l)}. \quad (4.61)$$

Наближення інших невідомих розраховуються як

$$a_1^{(l)} = 1,1642 - 1,9456 \left(\frac{B_h^{(l)}}{D_{sh}}\right) + 7,1161 \left(\frac{B_h^{(l)}}{D_{sh}}\right)^2 - 10,1073 \left(\frac{B_h^{(l)}}{D_{sh}}\right)^3 + 5,0141 \left(\frac{B_h^{(l)}}{D_{sh}}\right)^4;$$

$$a_2^{(l)} = -1,000026 - 0,023634 \left(\frac{B_h^{(l)}}{D_{sh}}\right) - 0,4215 \left(\frac{B_h^{(l)}}{D_{sh}}\right)^2 - 0,038817 \left(\frac{B_h^{(l)}}{D_{sh}}\right)^3 - 0,090551 \left(\frac{B_h^{(l)}}{D_{sh}}\right)^4.$$

Досягнувши необхідної точності у визначенні розрахункової довжини підшипника та заокругливши його до найближчого більшого нормалізованого значення, переходимо до визначення коефіцієнта тертя цапфи, — $k_{fr} = T_f / N_r$, де T_f — сила в'язкого зсуву (сила тертя); N_r — несуча здатність масляного шару (радіальне навантаження). За формулою Маккі-Орлова [157] він становить

$$k_{fr} = \frac{\pi \eta_m \omega B_h D_{sh}}{\psi N_r} + 0,55 \psi \left(\frac{D_{sh}}{B_h} \right)^{1,5}. \quad (4.62)$$

Формула (4.62) справедлива для випадку $B_h \leq D_{sh}$. Якщо $B_h > D_{sh}$, то показник степені дорівнюватиме 1.

Тепер, відомою є механічна потужність, що витрачається на подолання тертя

$$P_b = k_{fr} N_r \omega \frac{D_{sh}}{2}. \quad (4.63)$$

Наприкінці розрахунку визначимо потрібний тиск p_t змащувальної рідини на вході у підшипник, який забезпечуватиме допустиме перегрівання. Необхідна, при цьому об'ємна витрата оливи Q_t вважається такою, що складається з двох частин [201]:

$$Q_t = Q_{t1} + Q_{t2}, \quad (4.64)$$

де Q_{t1} — складова зумовлена тиском, що виникає за обертання цапфи;

Q_{t2} — складова зумовлена тиском зовнішнього насоса.

Складові рівняння (4.64) рівні

$$Q_{t1} = \frac{\psi \omega D_{sh}^3 \varepsilon}{4} \left[\frac{B_h}{D_{sh}} - 0,223 \left(\frac{B_h}{D_{sh}} \right)^3 \right]; \quad Q_{t2} = \frac{\psi^3 D_{sh}^3}{\eta_m} p_t q_t; \quad (4.65)$$

p_t — тиск оливи, створований зовнішнім насосом;

q_t — розрахунковий коефіцієнт, який, в залежності від форми оливорозподіляючих канавок, визначається за однією з формул для різних вкладок:

— рис. 4.37, а

$$q_t = \frac{\pi}{48} \cdot \frac{(1 + \varepsilon)^3}{\ln\left(\frac{B_h}{d_k}\right) \cdot \left(1,204 + 0,368\left(\frac{d_k}{B_h}\right) + 1,046\left(\frac{d_k}{B_h}\right)^2 + 1,942\left(\frac{d_k}{B_h}\right)^3\right)};$$

– рис. 4.37, б

$$q_t = \frac{\pi}{24} \cdot \frac{(1 + 1,5\varepsilon^2)D_\varepsilon}{B_h} \cdot \frac{B_h}{B_h - b_k}; \quad (4.66)$$

– рис. 4.37, в

$$q_t = \frac{\pi}{48} \cdot \frac{(1 + \varepsilon)^3}{\ln\left(\frac{B_h}{b_k}\right) \cdot \left(1,188 + 1,582\left(\frac{b_k}{B_h}\right) + 2,585\left(\frac{b_k}{B_h}\right)^2 + 5,563\left(\frac{b_k}{B_h}\right)^3\right)}.$$

Перевищення температури оливи над температурою докїлля, за умови нехтування тепловіддачею через корпусні елементи підшипника, становить

$$\Delta T = \frac{P_b}{c_p \gamma_m Q_t}, \quad (4.67)$$

де c_p – питома теплоємність оливи.

Як вже згадувалося, фізичні характеристики оливи залежать від температури. Скористаємося такими емпіричними залежностями [278] для врахування даної особливості:

$$c_p = 2000 \left(1 - \frac{100 - T}{670}\right); \quad \gamma_m = \gamma_{m15} \left(1 - \frac{T - 15}{1540}\right), \quad (4.68)$$

де T – абсолютна середня температура оливи $T = 40^\circ \text{C} + \Delta T$;

γ_{m15} – густина оливи за температури 15°C .

З (4.65), використовуючи (4.64), (4.66), (4.67), шуканий тиск становитиме

$$p_t = \frac{\left(\frac{P_b}{c_p \gamma_m \Delta T} - Q_{t1}\right) \eta_m}{\psi^3 D_{sh}^3 q_t}. \quad (4.69)$$

На цьому проектний розрахунок підшипника ковзання можна вважати завершеним.

Висновки до розділу

1. Конструкції суцільних (рис. 4.1) та складених (рис. 4.2) роторів використовуються у ВБПМ найчастіше, а їх модифікації, в основному, пов'язані з використанням нових конструкційних матеріалів.

2. Для валів, навантажених відцентровими силами, підхід, що враховує наявність осьової складової механічного напруження, у порівнянні з підходом, у якому НДС таких валів вважається пласким, дає змогу підняти точність розрахунку запасу міцності більше ніж на 20%.

3. Осьові отвори у валах роторів слугують концентраторами механічних напружень. Тому, по можливості, необхідно уникати конструкцій роторів ВБПМ з такими отворами.

4. Отримані сукупності залежностей максимальних еквівалентних за Мізесом механічних напружень від частоти обертання для роторів різних типів дають можливість визначати граничні зовнішні діаметри цих роторів для довільних значень допустимих напружень.

5. Граничне значення діаметра ротора D_j , визначене на підставі залежності $D_j[n]$, може прийматися як один з головних розмірів на етапі первинного проектування ВБПМ.

6. Порівняння результатів розрахунку критичних частот обертання аналітичним шляхом та чисельним, з використанням математичних моделей на основі МСЕ, демонструє розбіжність, що не перевищує 6%. Цей факт свідчить про адекватність розроблених моделей стосовно циліндричних суцільних валів й дає підстави сподіватися у достовірності результатів, отриманих для валів складнішої форми.

7. Отримані сукупності залежностей співвідношення розмірів l_{bm}/D_j від частоти обертання n дозволяють уникати таких співвідношень головних розмірів

ВБПМ l_1 / D , що призведуть до потрапляння в резонансні зони.

8. Матеріал вала ротора, його розміри, форма поперечного перетину та жорсткість опór — чинники, які дають змогу впливати на величини критичних частот обертання.

9. Для жорстких суцільних роторів у діапазоні діаметрів $D_j \approx 100 \div 250$ мм та співвідношень $l_{bm} / D_j \approx 2 \div 7$, внаслідок перекривання резонансних зон, робота за частоти обертання > 90000 об/хв неможлива.

10. Конструкція підшипникового вузла, що передбачає використання високошвидкісного кулькового підшипника кочення, повинна забезпечувати регульований осьовий натяг кілець та тіл кочення.

11. Для змащування підшипників ВБПМ рекомендуємо циркуляційні повітряно-оливні або інжекторні системи. Використання систем типу «масляний туман» теж можливе, але, для дотримання вимог екологічної безпеки, вони потребують впровадження низки додаткових конструкторських рішень.

12. Існуюча методика проектного розрахунку підшипників ковзання, яка за відомими діаметральними розмірами та в'язкістю змащувальної рідини надає можливість визначити його довжину, що забезпечуватиме режим рідинного тертя, адаптована для безпосереднього використання обчислювальної техніки та дає змогу повністю автоматизувати цей вид проектних робіт. З її допомогою також можна знайти необхідний робочий тиск у системі змащування за умови заданого перевищення температури змащувальної рідини.

РОЗДІЛ 5.

СИСТЕМИ ОХОЛОДЖЕННЯ ТА ТЕПЛОВІ ПРОЦЕСИ ВИСОКОШВИДКІСНИХ БЕЗКОНТАКТНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ МАШИН ЗІ ЗБУДЖЕННЯМ ВІД ПОСТІЙНИХ МАГНІТІВ

Мета, якій присвячено дослідження в цьому розділі полягає у створенні методів аналізу, придатних для оцінювання теплового стану ВБПМ. Її досягнення передбачає розробку високоадекватних математичних моделей для розрахунку температурного поля машини у тривимірній постановці, аналіз отриманого розподілу теплових потоків та синтез, на його основі, теплових заступних схем, а також опрацювання методів розрахунку їх параметрів.

5.1. Конструкції систем охолодження

Першою розглянемо систему радіально-аксіального охолодження закритої машини, показану на рис. 5.1. Дана система повітряного охолодження є двоконтурною. Напрями повітряних течій умовно показані стрілками.

Первинний холодоагент, що циркулює у внутрішньому замкненому просторі в середині машини, за рахунок самовентиляції віддає своє тепло вторинному холодоагенту, яким є газ довкілля. Примусовому охолодженню піддається зовнішня поверхня машини. Рух вторинного холодоагенту здійснюється за допомогою незалежного пристрою, що може бути встановленим на машину, вбудованим в неї або повністю відокремленим. Ці способи охолодження, згідно з міжнародною класифікацією [42], відповідають позначенням IC0145, IC0146, IC0147.

Наступною розглянемо систему аксіального повітряного охолодження показану на рис. 5.2.

Ця система є одноконтурною розімкненою, а за напрямом руху повітря — аксіальною. Холодоагент від незалежного нагнітального пристрою потрапляє у машину через конфузур та отвори у задньому підшипниковому щиті.

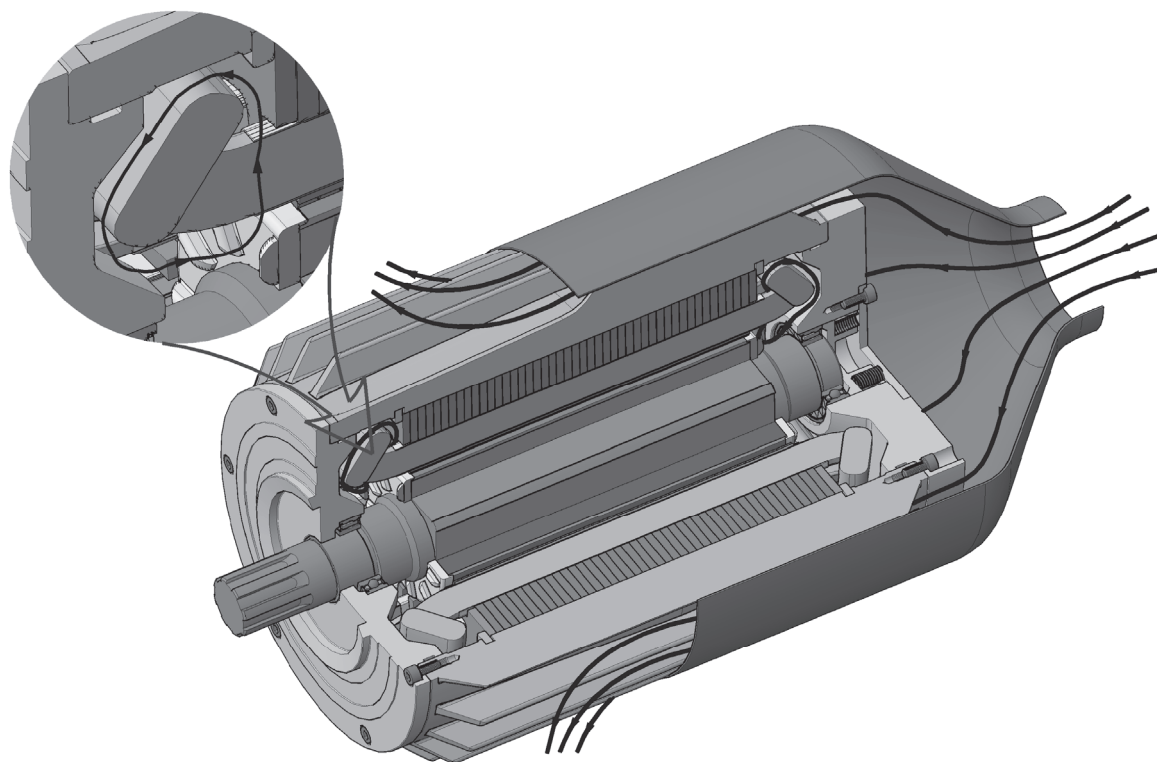


Рис. 5.1. Система двоконтурного радіально-аксіального повітряного охолодження машини IC0145 (0146,0147)

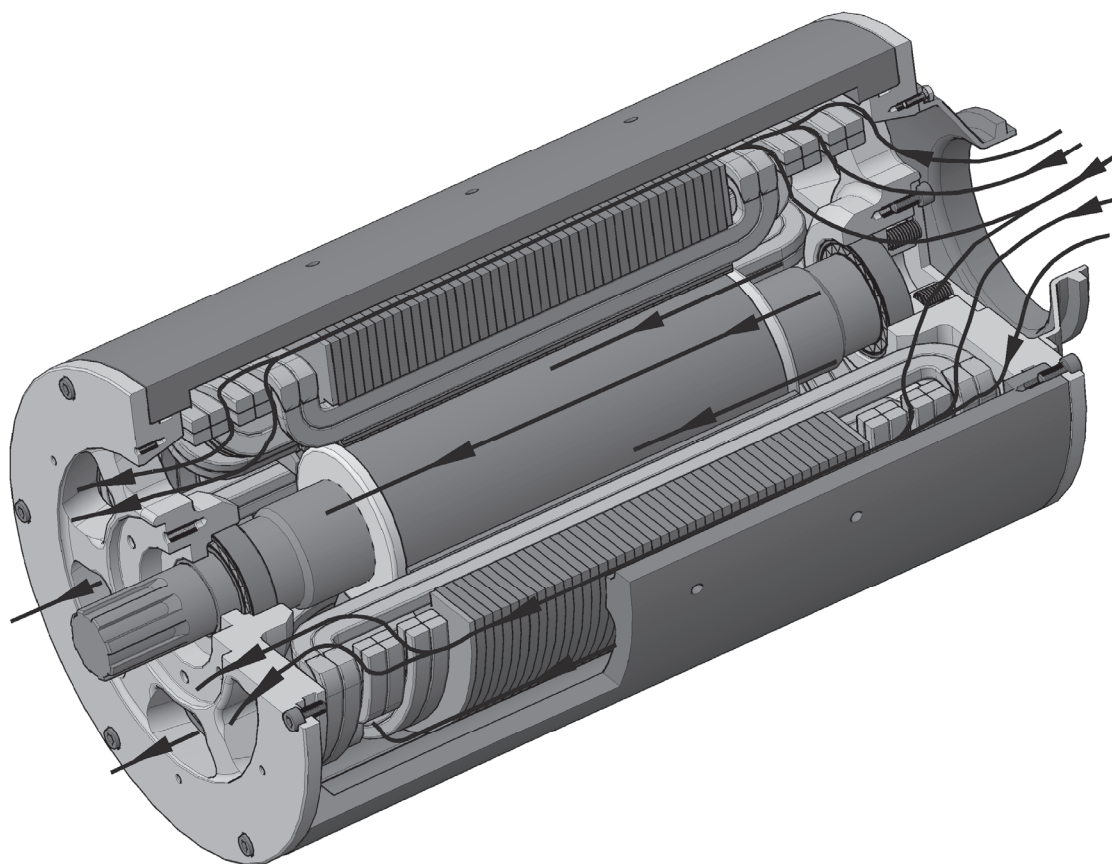


Рис. 5.2. Система аксіального повітряного охолодження машини IC15 (16,17)

Далі рухається двома паралельними шляхами — вздовж робочого повітряного проміжку між статором і ротором та аксіальними каналами, утвореними ребрами станини (корпуса), на які садиться осердя статора, внутрішньою поверхнею станини та зовнішньою осердя статора. Через отвори у передньому підшипниковому щиті холодоагент виходить у довкілля.

На своєму шляху повітря інтенсивно охолоджує обидві лобові частини обмотки статора, верхні ротора та спинки осердя статора.

Таке виконання системи охолодження відповідає позначенням IC15, IC16 або IC17 безпосередньо, але за незначної модифікації способу подачі холодоагенту воно легко перетворюється на IC25 (26, 27) або IC35 (36, 37).

Також заслуговують уваги системи рідинного охолодження. Як первинний холодоагент може використовуватися вода, олива чи антифриз. Використання оливи для охолодження машини може виявитися доцільним у машинах з примусовим змащуванням підшипникових вузлів (див. п. 4.4).

Тепло від активних частин машини передається за рахунок теплопровідності до станини та підшипникових щитів (рис. 5.3). Для більш ефективного охолодження лобових частин обмотки статора, порожнини кільцевої форми, обмежені внутрішньою поверхнею станини, торцевими поверхнями підшипникових щитів та осердя статора, а зсередини — циліндричною поверхнею з діаметром розточки статора, заповнені гелеподібною речовиною — компаундом, з порівняно високим коефіцієнтом теплопровідності ($0,5 \div 1,0$ Вт/м·К, що у $20 \div 40$ разів вищий ніж у повітря). Цей компаунд у своїй рідкій фазі заповнює всі проміжки між секціями обмотки, а після полімеризації, завдячуючи своїм адгезивним властивостям, надійно кріпить лобові частини від можливих переміщень. Електропровідність цієї речовини не перевищує $(2 \div 4) \times 10^{12}$ Ом·м.

Станина, в свою чергу, охолоджується рідиною, яка під тиском зовнішнього насоса рухається в каналі, утвореному її зовнішньою поверхнею, кожухом та перегородками. Надалі розглядатимемо системи рідинного охолодження з Z-подібним каналом (рис. 5.3) та каналом у вигляді спіралі (рис. 5.4).

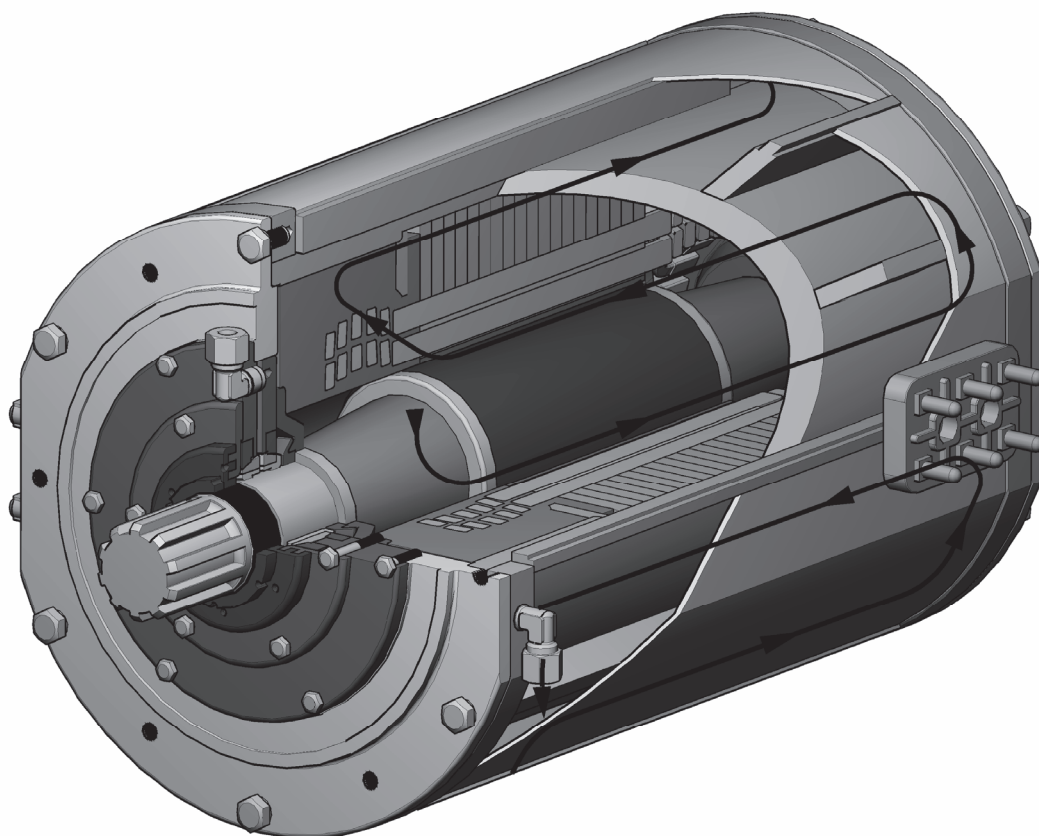


Рис. 5.3. Система рідинного охолодження із Z-подібним каналом ICW37 (97)

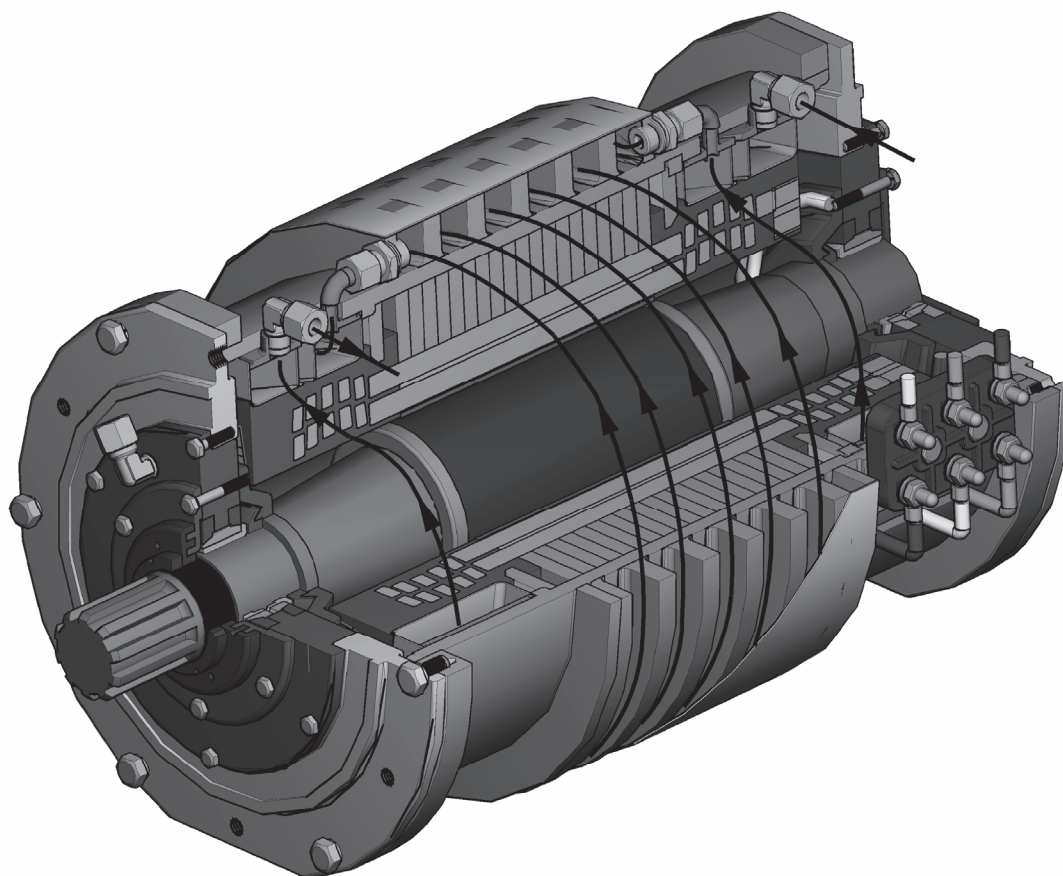


Рис. 5.4. Система рідинного охолодження зі спіральним каналом ICW37 (97)

Такі системи охолодження, в залежності від типу використаного холодоагенту, позначаються як ICW37, ICW97 (вода) або ICU37, ICU97 (олива).

5.2. Теплові опори. Аналітичний розрахунок середніх температур

Традиційно, теплопередачу розглядають як складний фізичний процес, розрізняючи три елементарні способи переносу тепла: теплопровідність, конвекція та теплове випромінювання [59,67,95]. Теплові процеси в електричних машинах описують з урахуванням усіх трьох способів передачі тепла [23,132] або лише перших двох [151]. В подальшому дослідженні теплопередачу за рахунок випромінювання не враховано.

Теплопровідність як перенос тепла за безпосереднього контакту тіл або частин одного тіла з різною температурою розглядається в сукупності та у взаємозв'язку з конвекційним теплообміном — передачею тепла, яка відбувається між поверхнею об'єкта й оточуючим рідким або газоподібним середовищем.

У подальшому викладі розглядається стаціонарна теплопередача, тобто така, за якої тепловий стан об'єкту залишається незмінним у часі.

Розглянемо аналітичні розв'язки рівняння теплопровідності в одновимірному випадку для теплопровідних тіл простої форми. На їх підставі формуватимемо методику теплового розрахунку ВБПМ з різними способами охолодження та оцінюватимемо достовірність результатів, отриманих за розрахунку тривимірного поля температур МСЕ.

Рівняння теплопровідності для стаціонарного поля (2.131) запишемо у вигляді

$$\nabla(\lambda\nabla T) + \frac{P_T}{V_T} = 0, \quad (5.1)$$

де P_T – внутрішнє тепловиділення (втрати) в тілі, Вт;

V_T – об'єм тіла, м³.

Для пласкої стінки з рівномірно розподіленим джерелом тепла всередині, в декартовій СК та за умови одновимірного розповсюдження тепла це рівняння перетворюється на

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{p_v}{\lambda}, \quad (5.2)$$

де $p_v = \frac{P_T}{V_T}$ – питоме тепловиділення, $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$.

Розв'язок рівняння (5.2) можна записати як

$$T = -\frac{p_v x^2}{2\lambda} + C_1 x + C_2, \quad (5.3)$$

де C_1, C_2 – сталі інтегрування;

x – поточне значення координати вздовж осі x (рис. 5.5).

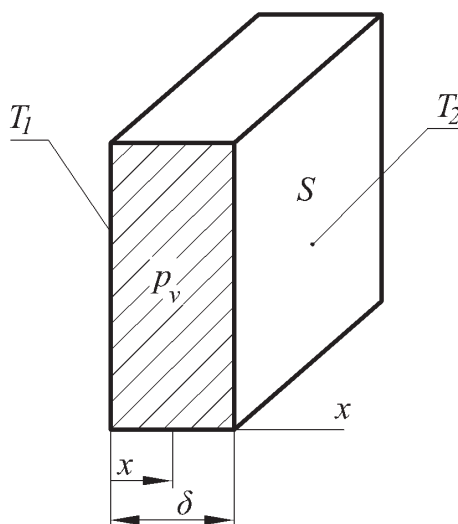


Рис. 5.5. Теплопровідна пласка стінка

Нехай заданою є крайова умова — температури на бокових поверхнях стінки $T = T_1$ за $x = 0$ та $T = T_2$ за $x = \delta$.

Сталі інтегрування, в цьому випадку, визначатимуться як

$$C_2 = T_1; \quad C_1 = \frac{p_v \delta}{2\lambda} + \frac{T_2 - T_1}{\delta}. \quad (5.4)$$

Отже, розподіл температури в пласкій стінці за одновимірною характеру розповсюдження тепла описується виразом

$$T = -\frac{p_v x^2}{2\lambda} + \left(\frac{p_v \delta}{2\lambda} + \frac{T_2 - T_1}{\delta} \right) x + T_1. \quad (5.5)$$

Для проведення оцінки теплового стану різних елементів конструкції ЕМ на

підставі ТЗС, оперуватимемо середніми значеннями температури, а саме

$$T_m = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} T dx = \frac{1}{\delta} \left[-\frac{p_v}{2\lambda} \int_0^{\delta} x^2 dx + \left(\frac{p_v \delta}{2\lambda} + \frac{T_2 - T_1}{\delta} \right) \int_0^{\delta} x dx \right] + T_1 =$$

$$= \frac{p_v \delta^2}{12\lambda} + T_1 + \frac{T_2 - T_1}{2},$$
(5.6)

або, враховуючи, що $p_v = \frac{P_T}{\delta \cdot S}$, де S – площа бокової поверхні стінки,

$$T_m = \frac{P_T \delta^2}{12S\delta\lambda} + T_1 + \frac{T_2 - T_1}{2} = P_T \frac{R_T}{12} + T_1 + \frac{T_2 - T_1}{2},$$
(5.7)

де $R_T = \frac{\delta}{\lambda S}$ – тепловий опір (ТО) тепловому потоку через пласку стінку за рахунок її власної теплопровідності.

За законом Фур'є та враховуючи (5.5), тепловий потік через стінку становить

$$Q = -\lambda S \frac{dT}{dx} = p_v S x - \frac{p_v \delta S}{2} - \frac{\lambda S (T_2 - T_1)}{\delta}.$$
(5.8)

Використання параметра R_T дає змогу розрахувати перепад температури в стінці за відсутності тепловиділення

$$T_2 - T_1 = R_T Q$$
(5.9)

та надає можливість розгляду певних елементів конструкції ЕМ як теплопровідних стінок без тепловиділення на підставі заступної схеми (рис. 5.6, а). Для аналогічних елементів з внутрішнім теплоутворенням використовуємо заступну схему на рис. 5.6, б, для якої $R_1 = R_2 = R_T/2$.

Для циліндричної стінки, за одновимірною наближення температурного поля, рівняння теплопровідності зручно записати у циліндричній СК

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{p_v r}{\lambda},$$
(5.10)

де r – радіальний напрям (рис. 5.7).

Після двократного інтегрування загальний розв'язок (5.10) виглядає як

$$T = -\frac{p_v r^2}{4\lambda} + C_1 \ln r + C_2.$$
(5.11)

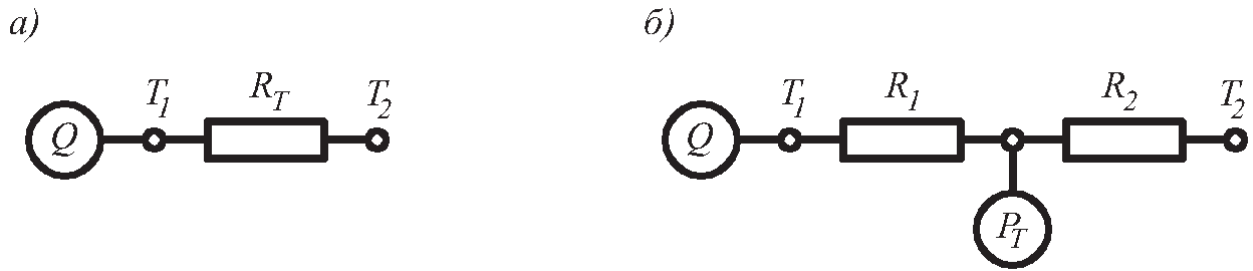


Рис. 5.6. Варіанти теплових заступних схем

а) без тепловиділення; б) з внутрішнім тепловиділенням

Беручи до уваги крайову умову — температури на внутрішній та зовнішній поверхнях стінки $T = T_1$ за $r = 0$ та $T = T_2$ за $r = r_2$ (рис. 5.7), повний розв'язок рівний [132]

$$T = -\frac{p_v r^2}{4\lambda} + \frac{1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \left[\frac{p_v}{4\lambda} \left(r_2^2 \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) + r_1^2 \ln\left(\frac{r_2}{r}\right) \right) + T_2 \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) + T_1 \ln\left(\frac{r_2}{r}\right) \right]. \quad (5.12)$$

Тепловий потік через циліндричну стінку

$$Q = -\lambda S \frac{dT}{dr} = -2\pi r l \lambda \frac{dT}{dr} = P_T \left[\frac{r^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{1}{2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \right] + (T_1 - T_2) \frac{2\pi l \lambda}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}. \quad (5.13)$$

У випадку відсутності тепловиділення ($P_T = 0$), вираз (5.13) можна переписати з використанням поняття теплового опору

$$Q = (T_1 - T_2) \frac{2\pi l \lambda}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{T_1 - T_2}{R_T}, \quad (5.14)$$

де $R_T = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi l \lambda}$ — ТО циліндричної стінки для використання його у елементах ТЗС,

що відповідають рис. 5.6, а. Якщо стінка має внутрішнє тепловиділення (рис. 5.6, б), параметри ТЗС обчислюємо за формулами

$$R_1 = R_T \left[\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{1}{2 \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} \right]; \quad R_2 = R_T \left[\frac{1}{2 \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} - \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \quad (5.15)$$

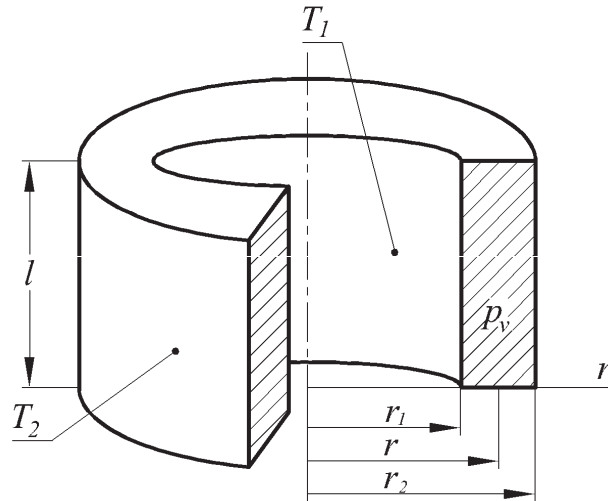


Рис. 5.7. Теплопровідна циліндрична стінка

Середнє значення температури, відповідно

$$T_m = \frac{1}{V} \int_0^\delta T dV = \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} T r dr =$$

$$= \frac{p_v}{8\lambda} \left[\left(r_2^2 + r_1^2 \right) - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} \right] + T_1 \left[\frac{1}{2 \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} - \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right] + T_2 \left[\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{1}{2 \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} \right], \quad (5.16)$$

де

$$p_v = \frac{P_T}{\pi(r_2^2 - r_1^2)l}. \quad (5.17)$$

З метою перевірки алгоритму математичної моделі розрахунку тривимірного температурного поля та для обґрунтування правомірності використання ТЗС для оцінювання теплового стану високошвидкісних машин, здійснено розрахунок середніх значень температур у теплопровідному стрижні та порожнистому циліндрі

двома способами. Перший — за формулами (5.7), (5.16), другий — на підставі розрахунку поля температур МСЕ у тривимірному формулюванні.

Так, для стрижня розмірами $20 \times 40 \times 100$ мм з коефіцієнтом теплопровідності $\lambda = 5$ Вт/м·К його тепловий опір становить $R_T = 25,00$ К/Вт.

Задаючи температури на його торцях $T_1 = 20$ °С, $T_2 = 200$ °С, відповідно, середня температура без внутрішнього тепловиділення, очевидно, становить $T_m = 110$ °С, а за наявності внутрішнього джерела $P_T = 60$ Вт за (5.7) — $T_m = 235$ °С.

Аналогічний розрахунок середньої температури МСЕ, за формулою

$$T_m = \frac{1}{V_T} \sum_{e=1}^E \left(\frac{V^{[e]}}{K} \sum_{k=1}^K T_k^{[e]} \right), \quad (5.18)$$

де V_T — об'єм тіла (стрижня);

$V^{[e]}$ — об'єм СЕ з поточним номером $[e]$ ($e = \overline{1, E}$);

$T_k^{[e]}$ — поточне вузлове значення температури СЕ з номером $[e]$ ($k = \overline{1, K}$ для

використаних СЕ $K = 8$). Отримані значення практично збігаються з аналітичними. Кількість СЕ у моделі становила 40000, а загальна кількість вузлів — 23331. Результати цього розрахунку показані на рис. 5.8 та зведені у табл. 5.1

Для порожнистого циліндра розмірами $r_1 = 20$ мм, $r_2 = 80$ мм, $l = 25$ мм та з коефіцієнтом теплопровідності $\lambda = 5$ Вт/м·К тепловий опір становить $R_T = 1,765$ К/Вт. Теплові опори для заступної схеми рис. 5.6, б, за (5.15) $R_1 = 1,246$ К/Вт; $R_2 = 0,5191$ К/Вт. Нагадаємо, що $R_1 + R_2 = R_T$.

За відомих температур внутрішньої $T_1 = 20$ °С та зовнішньої $T_2 = 200$ °С циліндричних поверхонь середня температура без внутрішнього тепловиділення, становить $T_m = 147,1$ °С, а за наявності тепловиділення $P_T = 100$ Вт — $T_m = 160,2$ °С (5.16).

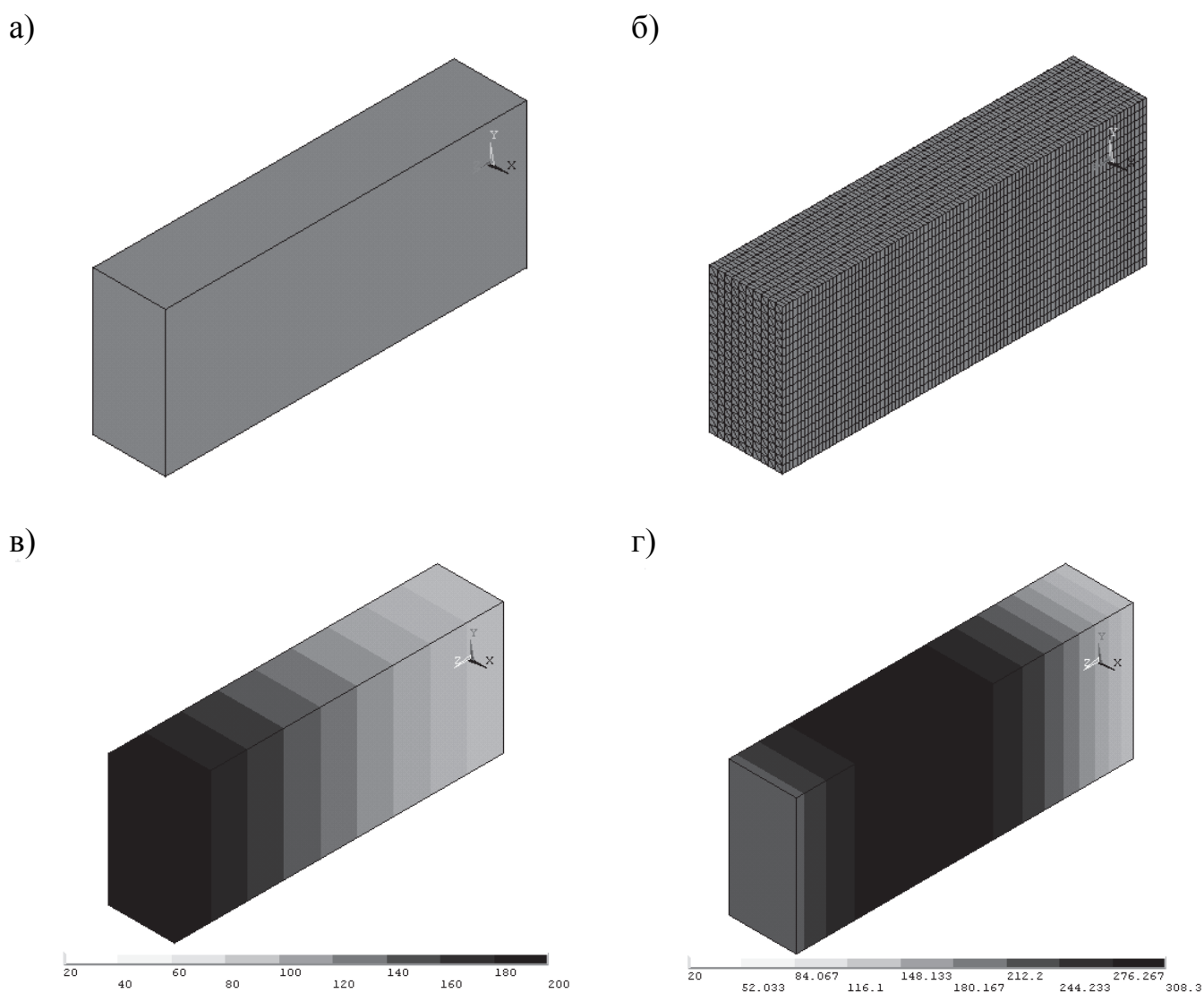


Рис. 5.8. Результати моделювання температурного поля у теплопровідному стрижні: а) геометрична модель стрижня; б) скінченно-елементна модель; в) поле температури, $^{\circ}\text{C}$, за відсутності внутрішніх джерел тепла; г) поле температури, $^{\circ}\text{C}$, за $P_T = 60$ Вт

Таблиця 5.1

Порівняльна характеристика аналітичного та чисельного розв'язків

Середнє значення температури, $^{\circ}\text{C}$	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок	Розбіжність, %
у стрижні, за $P_T = 0$ Вт	110,0	110,0	0,0
у стрижні, за $P_T = 60$ Вт	235,0	234,(9)	0,0
у циліндрі, за $P_T = 0$ Вт	147,1	147,5	0,27
у циліндрі, за $P_T = 100$ Вт	160,2	160,5	0,19

Середні температури циліндричної стінки, визначені МСЕ та за формулою (5.16), практично збігаються. Невелике відхилення пояснюється обчислювальною похибкою МСЕ. Зауважимо, що кількість СЕ в даному випадку становила 96000, а загальна кількість вузлів — 53248. Результати цього розрахунку показані на рис. 5.9 та зведені у табл. 5.1

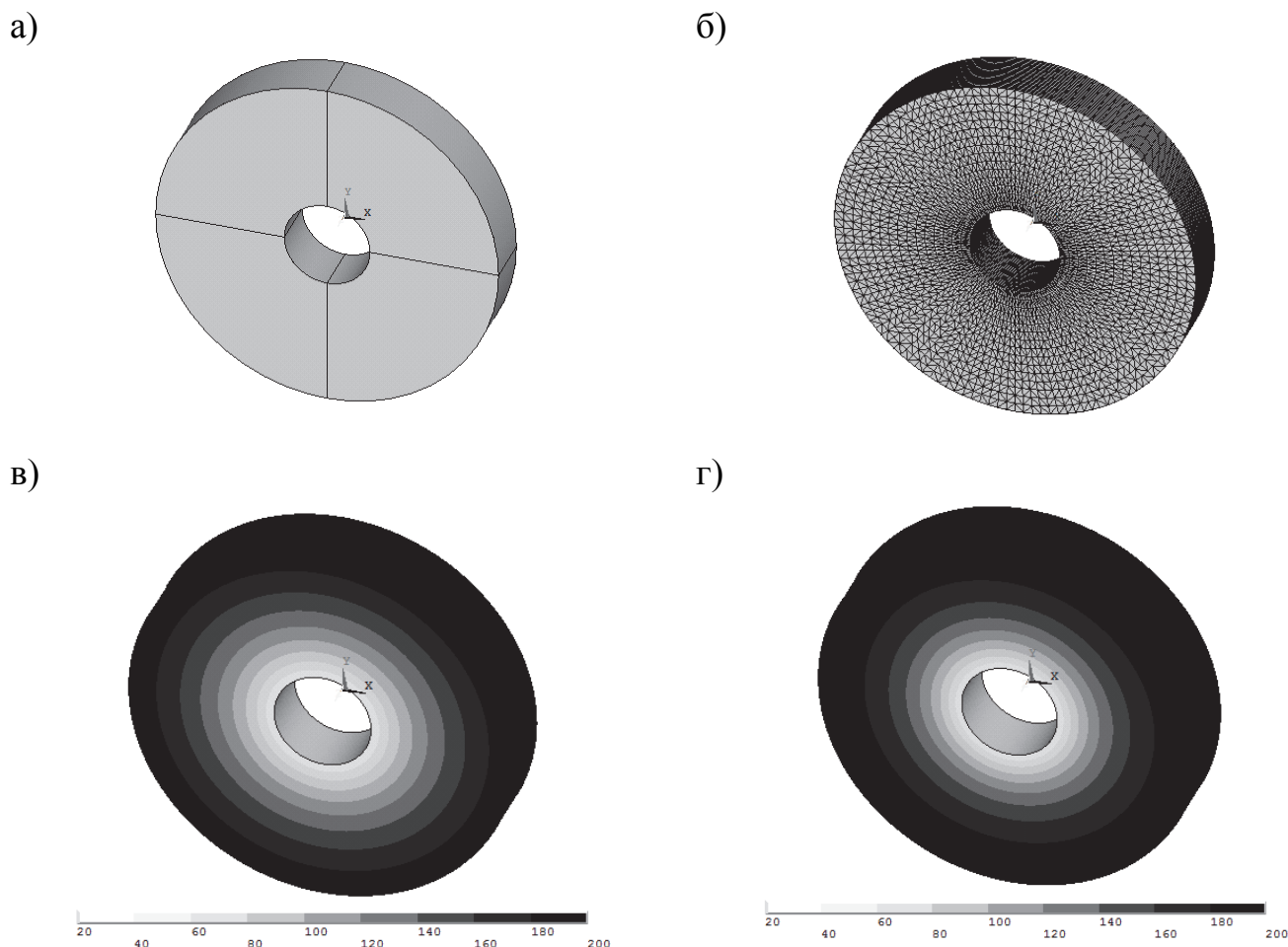


Рис. 5.9. Результати моделювання температурного поля у теплопровідному порожнистому циліндрі: а) геометрична модель; б) скінченно-елементна модель; в) поле температури, °С, за відсутності внутрішніх джерел тепла; г) поле температури, °С, за $P_T = 100$ Вт

5.3. Еквіваленті теплопровідності

Деякі з конструктивних елементів ЕМ, для яких характерним є внутрішнє тепловиділення, а саме обмотка та осердя якоря, є певною комбінацією матеріалів та

речовин з різною здатністю проводити тепло. Більше того, ця здатність неоднакова для різних напрямів його розповсюдження.

За розгляду теплових процесів на підставі обчислення поля температури вдається коректно враховувати всі ці особливості, але внаслідок значної різниці розмірів згаданих матеріалів у напрямках розповсюдження теплового потоку, рівень дискретизації області розрахунку доводиться підвищувати, що тягне за собою підвищення вимог до обчислювальних ресурсів. Тому для пропонованих математичних моделей розрахунку температурного поля у ВБПМ приймаємо наступні допущення:

- обмотка якоря розглядається як гомогенне тіло, що за формою повторює реальну обмотку, з еквівалентними коефіцієнтами теплопровідності, різними в ортогональних напрямках розповсюдження тепла та такими, що дорівнюють коефіцієнтам теплопровідності реальної обмотки в цих напрямках;
- шихтоване осердя якоря розглядається як гомогенне тіло, що за формою повторює реальне осердя, з еквівалентними коефіцієнтами теплопровідності, різними в ортогональних напрямках розповсюдження тепла та такими, що дорівнюють коефіцієнтам теплопровідності реального осердя в цих напрямках.

З'ясуємо чинники, що впливають на еквівалентні коефіцієнти теплопровідності. Звичайно, насамперед це коефіцієнти теплопровідності матеріалів. Стосовно пазових частин якірних обмоток — це розмір провідників, щільність їх вкладання та об'ємне співвідношення речовини для просочування (лак, компаунд тощо) з повітряними бульбашками поміж шарами провідників.

Пропонуємо наступний спосіб розрахунку еквівалентних теплопровідностей пазової частини обмотки якоря ВБПМ в тангенціальному $\lambda_{ew\tau}$, радіальному λ_{ewr} та осьовому λ_{ewa} напрямках. Цей спосіб однаково придатний для обмоток, виготовлених з провідників круглого (всіпних обмоток) та прямокутного перерізів, та ґрунтується на способах розрахунку еквівалентних теплопровідностей багат шарових стінок різної форми [95].

У відповідності із законом Фур'є, кількість тепла, що проходить через

циліндричну стінку, записується у вигляді (5.14). Для багат шарової стінки справедливими будуть співвідношення

$$Q = (T_1 - T_2) \frac{2\pi l \lambda_1}{\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}; \dots Q = (T_n - T_{n+1}) \frac{2\pi l \lambda_n}{\ln\left(\frac{d_{n+1}}{d_n}\right)}, \quad (5.19)$$

де $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – коефіцієнти теплопровідності окремих шарів;

T_1, \dots, T_{n+1} – температури на границях кожного шару;

n – кількість шарів.

Виконавши низку перетворень, можна показати, що повний температурний перепад становить

$$T_1 - T_{n+1} = \frac{Q}{2\pi l} \left(\frac{1}{\lambda_1} \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) + \dots + \frac{1}{\lambda_n} \ln\left(\frac{d_{n+1}}{d_n}\right) \right), \quad (5.20)$$

а тепловий потік можна визначити як

$$Q = \frac{2\pi l (T_1 - T_{n+1})}{\frac{1}{\lambda_1} \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) + \dots + \frac{1}{\lambda_n} \ln\left(\frac{d_{n+1}}{d_n}\right)} = \lambda_e 2\pi l (T_1 - T_{n+1}), \quad (5.21)$$

де λ_e – еквівалентний коефіцієнт теплопровідності багат шарової циліндричної стінки.

Беручи до уваги те, що для круглого мідного провідника діаметром d , вкритого шаром ізоляційної емалі, у (5.21) $d_1 \rightarrow 0$, а λ_1 , як правило, на 3 порядки більша за λ_2 , його еквівалентний коефіцієнт теплопровідності в поперечному напрямі визначаємо як

$$\lambda_{e1} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_{Cu}} + \frac{1}{\lambda_{iz}} \ln\left(\frac{d_{iz}}{d_p}\right)}, \quad (5.22)$$

де d_p, d_{iz} – діаметри голого та ізольованого провідника;

$\lambda_{Cu}, \lambda_{iz}$ – коефіцієнти теплопровідності матеріалу провідників обмотки та їх ізоляційного покриття, відповідно.

Величини останніх коефіцієнтів для найбільш поширених марок провідників

наведено в табл. 5.2 (для міді $\lambda_{Cu} = 385 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$ за температури 100°C).

Для провідників прямокутного перерізу з розмірами $b_p \times h_p$, співвідношення сторін якого не перевищує три, еквівалентний коефіцієнт теплопровідності визначаємо безвідносно до напрямку орієнтації його сторін як для багатошарової пласкої стінки:

$$\lambda_{e1} = \frac{c_{iz} \lambda_{Cu} \lambda_{iz}}{c \lambda_{iz} + \Delta_{iz} \lambda_{Cu}}, \quad (5.23)$$

де $c = \frac{h_p + b_p}{4}$, $c_{iz} = c + 2\Delta_{iz}$ – розрахункові розміри провідника;

Δ_{iz} – одностороння товщина ізоляційного покриття провідника.

Таблиця 5.2

Призначення та коефіцієнти теплопровідності
ізоляції обмотувальних провідників [23,31,187]

Марка провідника	Призначення	Коефіцієнт λ_{iz} , Вт/м·К	Температурний індекс (нагрівостійкість), $^\circ \text{C}$
ПЄВ-1 ПЄВ-2	загальнопромислового призначення	0,12	105
ПЄТ-155 ПЄТ-200	загальнопромислового призначення	0,20	155 200
ПЄТВ-1 ПЄТВ-2	для механізованого вкладання	0,26	130
ПЄТД-1-200 ПЄТД-2-200	обмотки, що працюють в середовищі трансформаторної оливи з високими термічними та механічними навантаженнями	0,22	200
ПЛИ-У ПЄИ-200М	з фторопластовою ізоляцією для оливоповнених погрузних машин	0,29	200
ДАСТHERM	для підвищених термічних навантажень	0,27	220

Еквівалентні коефіцієнти теплопровідності ізолюваних провідників обмотки разом з речовиною, якою здійснено просочування обмотки, в тангенціальному та радіальному напрямках визначаємо за формулами

$$\lambda_{e2\tau} = \frac{k_{im} \lambda_{im} \lambda_{e1}}{k_{z\tau} k_{im} \lambda_{im} + (1 - k_{z\tau}) \lambda_{e1}}; \quad \lambda_{e2r} = \frac{k_{im} \lambda_{im} \lambda_{e1}}{k_{zr} k_{im} \lambda_{im} + (1 - k_{zr}) \lambda_{e1}}, \quad (5.24)$$

де λ_{im} – коефіцієнт теплопровідності просочувальної речовини (табл. 5.3);

k_{im} – коефіцієнт, що залежить від якості просочування обмотки.

Величина k_{im} тим більша чим менше повітря залишається між провідниками після просочування. Також він залежить від розмірів провідника, кількості просочувань та властивостей просочувальних речовин. За даними, наведеними у [23], для триразового крапельного просочування лаком МГМ-8 коефіцієнт $k_{im} = 0,2 \div 0,3$. За вакуумного просочування k_{im} можна підняти до $(0,7 \div 0,8)$.

Таблиця 5.3

Коефіцієнти теплопровідності просочувальних лаків
та компаундів [23,31,187]

Марка речовини	Коефіцієнт λ_{im} , Вт/м·К	Температурний індекс (нагрівостійкість), °С
Лак МЛ-92	0,19÷0,20	130
Лак ПС-9153	0,15	155
Лак УР-9144	–	155
Лак ИД-9152	–	180
DAMISOL, Samicabond	0,27÷0,32	180
Компаунд КП-34	0,28	155
Компаунд КП-103	0,40	155
Суміш БИД-9001	0,15	200
Суміш БИД-9003	0,15	180

Коефіцієнти заповнення паза в тангенціальному та радіальному напрямках визначаємо як

$$k_{z\tau} = \frac{m_c d_{iz}}{b_s - \Delta_{si\tau}}; \quad k_{zr} = \frac{m_r d_{iz}}{h_s - \Delta_{sir}}, \quad (5.25)$$

де b_s, h_s – ширина та висота пазової частини обмотки статора, відповідно;

$\Delta_{si\tau}, \Delta_{sir}$ – сумарні товщини корпусної та пазової ізоляції за шириною та висотою паза, відповідно;

m_c, m_r – розрахункові значення кількостей елементарних провідників, розташованих за шириною та висотою паза, відповідно.

Оцінити m_c можна за формулою

$$m_c = \sqrt{\frac{u_{se} b_s}{h_s}}, \quad (5.26)$$

де u_{se} – кількість елементарних провідників в пазу.

Округливши m_c до найближчого цілого значення, m_r визначаємо як $m_r = u_{se}/m_c$.

Для провідників прямокутного перерізу значення d_{iz} у (5.25) необхідно замінити на c_{iz} .

Останній теплоперепад на шляху теплового потоку відбувається на шарах пазової ізоляції. Отже, еквівалентні коефіцієнти теплопровідності пазової частини обмотки якоря в тангенціальному та радіальному напрямках визначаємо формулами

$$\lambda_{ew\tau} = \frac{0,5b_s}{\frac{b_s}{\lambda_{e2\tau}} + \frac{\Delta_{si\tau}}{\lambda_{si}}}; \quad \lambda_{ewr} = \frac{0,5h_s}{\frac{h_s}{\lambda_{e2r}} + \frac{\Delta_{sir}}{\lambda_{si}}}, \quad (5.27)$$

де λ_{si} – коефіцієнт теплопровідності пазової ізоляції (див.табл. 5.4).

Таблиця 5.4

Призначення та коефіцієнти теплопровідності
ізоляційних матеріалів [23,132,31,187]

Марка ізоляції	Призначення	Коефіцієнт λ_{si} , Вт/м·К	Температурний індекс (нагрівостійкість), °С
Ізофлекс ГТП-2ПЛ	пазова ізоляція	0,24÷0,31	155
Імідофлекс 292		0,27	180
Номех 410, 418, 419		0,12÷0,16	155÷200
Плівкосинтокартон 51П	ізоляція лобових частин, міжкотушкових	0,15÷0,17	155
Синтофлекс		–	180
Поліамідна стрічка ЛПНК-Т	сполучень, виводів	0,25	220
Склотекстоліт СТ-ЭТФ	пазові клини	1,6÷1,9	180
Лавсановий гетинакс ЛГ		1,3÷1,5	155

Еквівалентний коефіцієнт теплопровідності пазової частини обмотки в осьовому напрямі λ_{ewa} розраховуємо, спираючись на допущення про одновимірність розповсюдження теплового потоку в цьому напрямі. Тоді весь тепловий потік Q вважаємо таким, що складається з сукупності окремих паралельних теплових потоків, які розповсюджуються вздовж гомогенних тіл,

розташованих всередині паза — провідників, ізоляції різного призначення, просочувальної речовини тощо. Тоді $Q = Q_1 + \dots + Q_n$, або $qS = q_1S_1 + \dots + q_nS_n$, де

$S = \sum_{i=1}^n S_i$ — сумарна площа перерізу обмотки; q, q_1, \dots, q_n — відповідні густини

теплових потоків. Якщо еквівалентний коефіцієнт теплопровідності означити як

$$\lambda_{ewa} = \frac{\lambda_1 S_1 + \dots + \lambda_n S_n}{S}, \quad (5.28)$$

то сумарна густина теплового потоку може визначатися так:

$$q = \frac{\lambda_{ewa}}{l} (T_1 - T_2). \quad (5.29)$$

Для пазової частини обмотки остаточно отримуємо

$$\lambda_{ewa} = \frac{\lambda_{si} S_{si} + \lambda_{iz} S_{iz} + \lambda_{im} S_{im} + \lambda_{Cu} S_{Cu}}{b_s h_s}, \quad (5.30)$$

де $S_{si}, S_{iz}, S_{im}, S_{Cu}$ — сумарні площі поперечних перерізів пазової ізоляції, власної ізоляції провідників, просочувальної речовини та матеріалі провідників, відповідно.

Для всипних обмоток віддалі між провідниками неоднакові як за довжиною паза, так і у його перерізі. Відбувається багаторазове перехресування провідників. Тому очевидно, що в цих випадках можна говорити лише про деякі усереднені значення еквівалентних коефіцієнтів теплопровідності.

Шихтоване осердя магнітопроводу електричної машини, утворене з окремих листів електротехнічної сталі, представляє собою об'єкт, що в тепловому відношенні є анізотропним. Для формалізації опису теплових властивостей пропонуємо замінити осердя гомогенним тілом, з двома різними еквівалентними коефіцієнтами теплопровідності вздовж $\lambda_{er\tau}$ та поперек λ_{ea} шихтування.

Реальний коефіцієнт теплопровідності шихтованого осердя вздовж листів, або в радіальному напрямі визначається, в першу чергу, хімічним складом електротехнічної сталі, її механічною та термічною обробками. Так, для електротехнічних сталей з високим вмістом кремнію він коливається в межах $18 \div 40$ Вт/м·К. Найкращими, в цьому відношенні, є холоднокатані ізотропні сталі.

З урахуванням коефіцієнта заповнення осердя сталлю k_{zc}

$$\lambda_{er\tau} = k_{zc}\lambda_{Fe} + (1 - k_{zc})\lambda_{iz}, \quad (5.31)$$

де λ_{Fe} , λ_{iz} – коефіцієнти теплопровідності матеріалу осердя та ізоляційного прошарку, відповідно.

Коефіцієнт теплопровідності шихтованого осердя поперек листів залежить від типу ізоляції пластин, її товщини, товщини листів, тиску в спресованому осерді, шорсткості поверхні листів та інших чинників, що важко обліковуються.

Наближено, без урахування контактного теплообміну вважатимемо, що

$$\lambda_{eaa} = \frac{\lambda_{Fe}\lambda_{iz}}{k_{zc}\lambda_{iz} + (1 - k_{zc})\lambda_{Fe}}. \quad (5.32)$$

Значення λ_{eaa} , отримані за допомогою (5.32), корелюють з експериментальними, наведеними у [23].

Правомірність застосування еквівалентних теплових провідностей підтвердимо розрахунком тривимірного поля температур у пазовій частині багатовиткової обмотки, використовуючи FEM-аналіз. Порівняємо результати двох варіантів:

- пазова частина обмотки розглядається як багатокомпонентна структура, що за формою та теплофізичними властивостями максимально наближена до реальної обмотки;
- пазова частина наближається гомогенним тілом з еквівалентними коефіцієнтами теплопровідності в напрямках координатних осей.

У першому варіанті модель враховує наявність у пазу 21-го круглого мідного провідника діаметром $d_p = 0,5$ мм ($\lambda_{Cu} = 385$ Вт/м·К), покритих ізоляцією товщиною $\Delta_{iz} = 0,022$ мм ($\lambda_{iz} = 0,12$ Вт/м·К) та просочених лаком ($\lambda_{im} = 0,20$ Вт/м·К; $k_{im} = 1,0$). Прямокутний паз розмірами $b_s \times h_s = 2,5 \times 5,0$ мм зроблено у матеріалі з високою теплопровідністю ($\lambda_m = 500$ Вт/м·К). З середини він огорнутий ізоляцією товщиною $\Delta_{si\tau} = \Delta_{sir} = 2 \times 0,2$ мм ($\lambda_{si} = 0,18$ Вт/м·К). Довжина паза становить $l = 25$ мм. Внутрішнє тепловиділення відбувається лише в матеріалі провідників обмотки й становить 2 Вт. Симетрія розподілу температури в поперечному перерізі паза робить можливим побудову лише на 1/4 розрахункової

області. Її торцеві поверхні ($z=0, z=l$) та поверхні, що належать площинам симетрії ($x=0, y=0$), вважаємо адіабатичними, а та з них, що належить площині $z=0$, має сталу температуру $T|_{z=0} = 40^\circ\text{C}$. Тепловідвід відбувається лише з твірних поверхонь (коефіцієнт тепловіддачі $\alpha = 9,0 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}$).

На рис. 5.10 показано сітку СЕ (загальні кількість вузлів – 539457, кількість елементів – 1032857), та растрове зображення поля температури в поперечному і поздовжньому перерізах паза. Зонам з темнішим забарвленням відповідає вище значення температури.

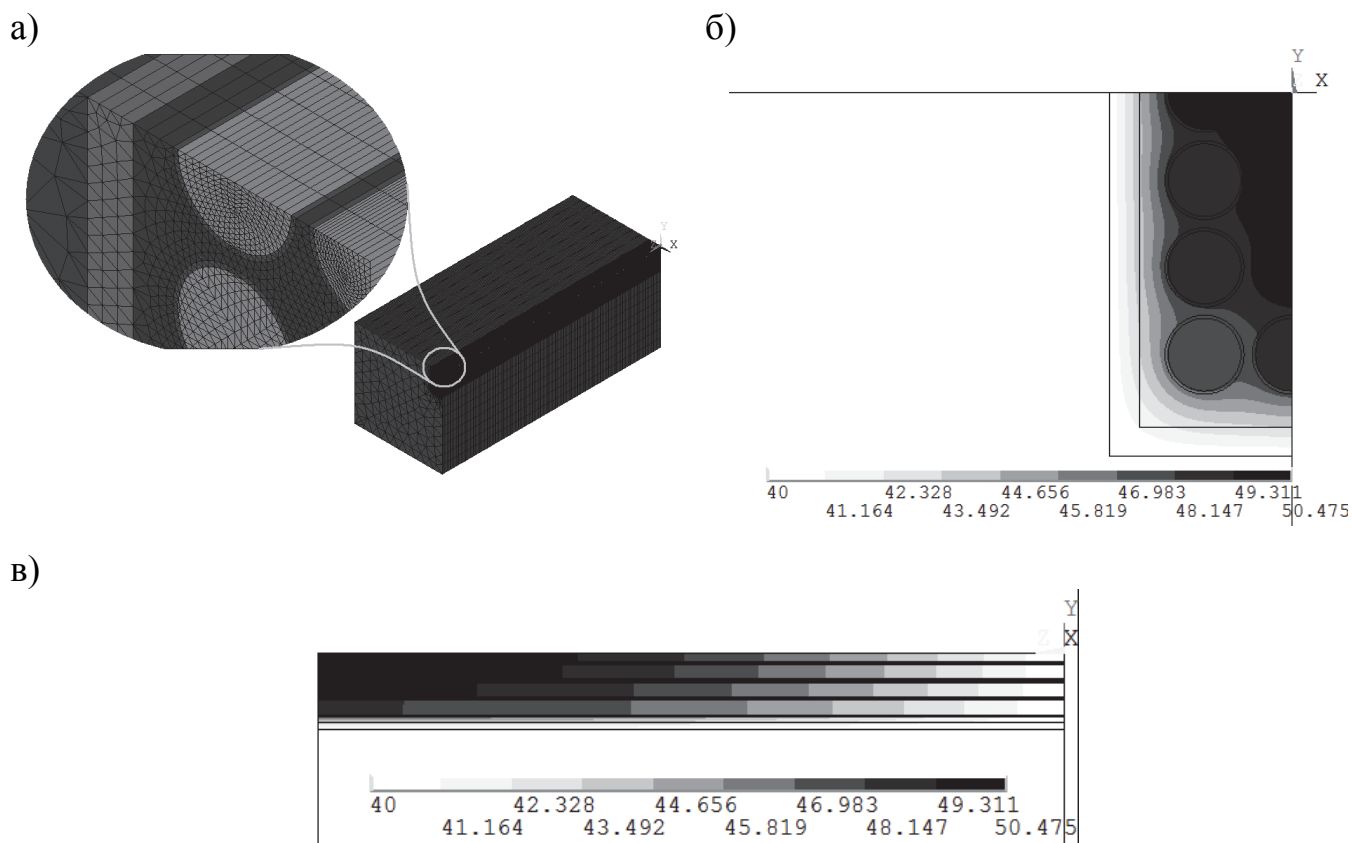


Рис. 5.10. Результати розрахунку температурного поля у пазовій частині обмотки: а) скінченно-елементна модель;

б) поле температури в перерізі $z=l$, $^\circ\text{C}$; в) поле температури в перерізі $x=0$, $^\circ\text{C}$

Другий варіант моделі містить паз таких самих розмірів, але заповнений однорідним анізотропним в тепловому відношенні, матеріалом з еквівалентними

коефіцієнтами теплопровідності, розрахованими за (5.27), (5.30). А саме для окремого провідника за (5.22)

$$\lambda_{e1} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_{Cu}} + \frac{1}{\lambda_{iz}} \ln\left(\frac{d_{iz}}{d_p}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{385} + \frac{1}{0,12} \ln\left(\frac{0,5 + 2 \cdot 0,022}{0,5}\right)} = 1,418 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

Розрахункові коефіцієнти заповнення паза за шириною та висотою паза (5.25), відповідно, рівні

$$k_{z\tau} = \frac{m_c d_{iz}}{b_s - \Delta_{si\tau}} = \frac{3 \cdot 0,544}{2,5 - 2 \cdot 0,2} = 0,7771; \quad k_{zr} = \frac{m_r d_{iz}}{h_s - \Delta_{sir}} = \frac{7 \cdot 0,544}{5,0 - 2 \cdot 0,2} = 0,8278.$$

Коефіцієнти теплопровідності провідників та просочувальної речовини вздовж координатних осей x та y (5.24), відповідно

$$\lambda_{e2\tau} = \frac{k_{im} \lambda_{im} \lambda_{e1}}{k_{z\tau} k_{im} \lambda_{im} + (1 - k_{z\tau}) \lambda_{e1}} = \frac{1 \cdot 0,2 \cdot 1,418}{0,7771 \cdot 1 \cdot 0,2 + (1 - 0,7771) 1,418} = 0,6015 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}};$$

$$\lambda_{e2r} = \frac{k_{im} \lambda_{im} \lambda_{e1}}{k_{zr} k_{im} \lambda_{im} + (1 - k_{zr}) \lambda_{e1}} = \frac{1 \cdot 0,2 \cdot 1,418}{0,8278 \cdot 1 \cdot 0,2 + (1 - 0,8278) 1,418} = 0,6921 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

Еквівалентні коефіцієнти теплопровідності пазової частини обмотки вздовж координатних осей x та y (5.27), відповідно

$$\lambda_{ew\tau} = \frac{0,5 b_s}{\frac{b_s}{\lambda_{e2\tau}} + \frac{\Delta_{si\tau}}{\lambda_{si}}} = \frac{0,5 \cdot 2,5}{\frac{2,5}{0,6015} + \frac{0,2}{0,18}} = 0,2373 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}};$$

$$\lambda_{ewr} = \frac{0,5 h_s}{\frac{h_s}{\lambda_{e2r}} + \frac{\Delta_{sir}}{\lambda_{si}}} = \frac{0,5 \cdot 5,0}{\frac{5,0}{0,6921} + \frac{0,2}{0,18}} = 0,2999 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

Сумарні площі перетинів:

– матеріалу провідників

$$S_{Cu} = m_c m_r \frac{\pi}{4} d_p^2 = 3 \cdot 7 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(0,5 \cdot 10^{-3}\right)^2 = 4,125 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2;$$

– ізоляції провідників

$$S_{iz} = m_c m_r \frac{\pi}{4} \left(d_{iz}^2 - d_p^2\right) = 3 \cdot 7 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(0,544^2 - 0,5^2\right) \cdot 10^{-6} = 0,7579 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2;$$

– пазової ізоляції

$$S_{si} = 2\Delta_{si}(b_s + h_s - 2\Delta_{si}) = 2 \cdot 0,2 \cdot (2,5 + 5,0 - 2 \cdot 0,2) \cdot 10^{-6} = 2,840 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2;$$

– проміжків між провідниками

$$S_{im} = (b_s - 2\Delta_{si}) \cdot (h_s - 2\Delta_{si}) - m_c m_r \frac{\pi}{4} d_i^2 =$$

$$= \left[(2,5 - 2 \cdot 0,2) \cdot (5 - 2 \cdot 0,2) - 3 \cdot 7 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0,544^2 \right] \cdot 10^{-6} = 4,777 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Еквівалентний коефіцієнт теплопровідності пазової частини обмотки вздовж осі z

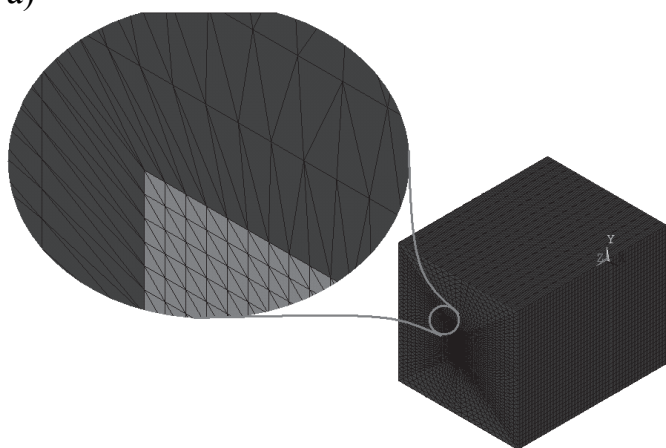
$$\lambda_{ewa} = \frac{\lambda_{si} S_{si} + \lambda_{iz} S_{iz} + \lambda_{im} S_{im} + \lambda_{Cu} S_{Cu}}{b_s h_s} =$$

$$= \frac{0,18 \cdot 2,840 + 0,12 \cdot 0,7579 + 0,2 \cdot 4,777 + 385,0 \cdot 4,125}{2,5 \cdot 5,0} = 127,2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

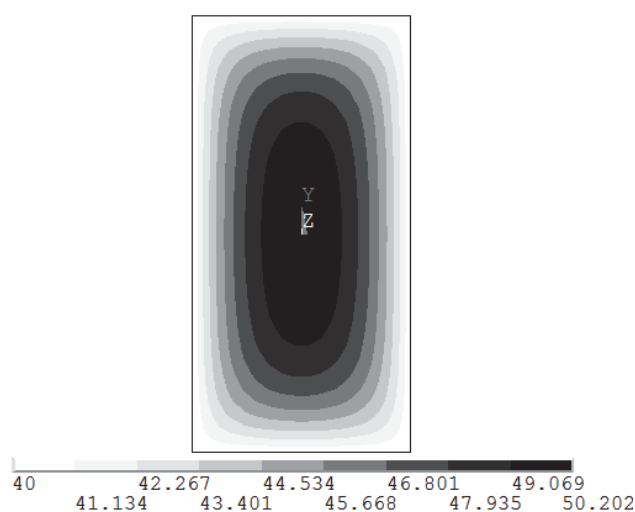
Отже, отримано наступні значення еквівалентних коефіцієнтів теплопровідності пазової частини обмотки, [Вт/м·К]: в напрямі осі x – $\lambda_{ew\tau} = 0,2373$; y – $\lambda_{ewr} = 0,2999$, z – $\lambda_{ewa} = 127,2$ (напрями осей показано на рис. 5.11).

Розміри паза, крайові умови та решта вхідних даних приймалися тими самими, що й у першому варіанті задачі.

а)



б)



в)

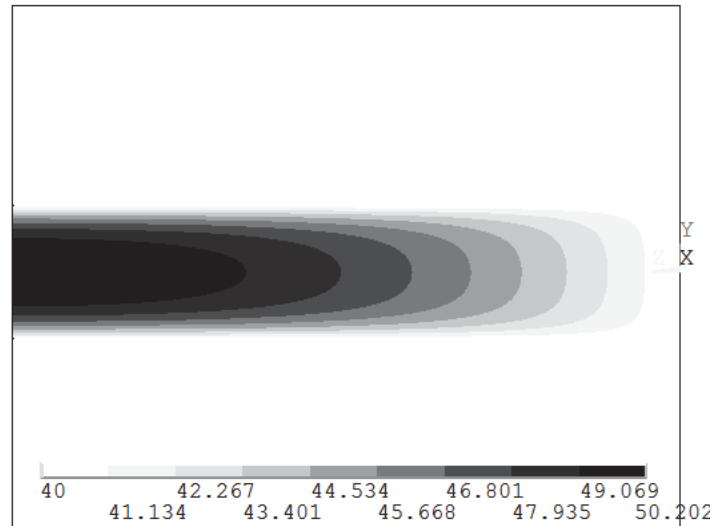


Рис. 5.11. Результати розрахунку температурного поля у пазовій частині обмотки: а) скінченно-елементна модель;

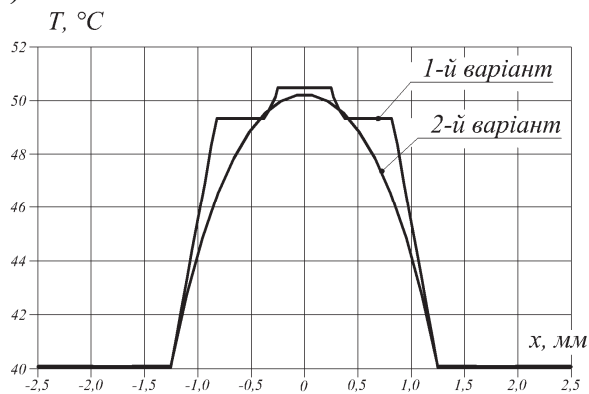
б) поле температури в перерізі $z = l$, $^{\circ}\text{C}$; в) поле температури в перерізі $x = 0$, $^{\circ}\text{C}$

Таблиця 5.5

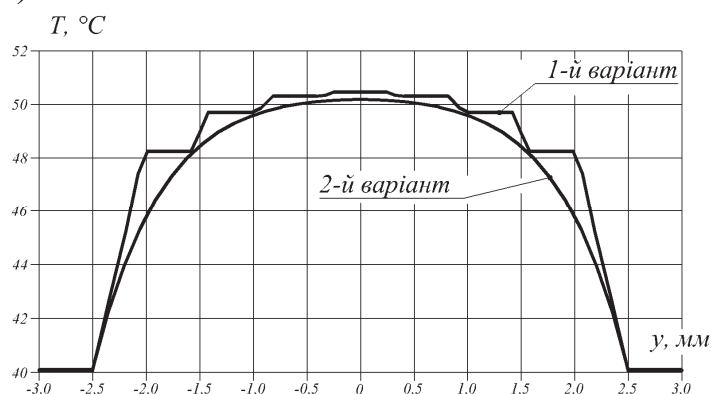
Порівняльна характеристика варіантів розрахунку поля температури

Середнє значення температури, $^{\circ}\text{C}$	1-й варіант	2-й варіант	Розбіжність, %
за шириною паза	48,25	47,86	0,81
за висотою паза	48,76	48,23	1,08
за довжиною паза	47,08	46,87	0,45

а)



б)



в)

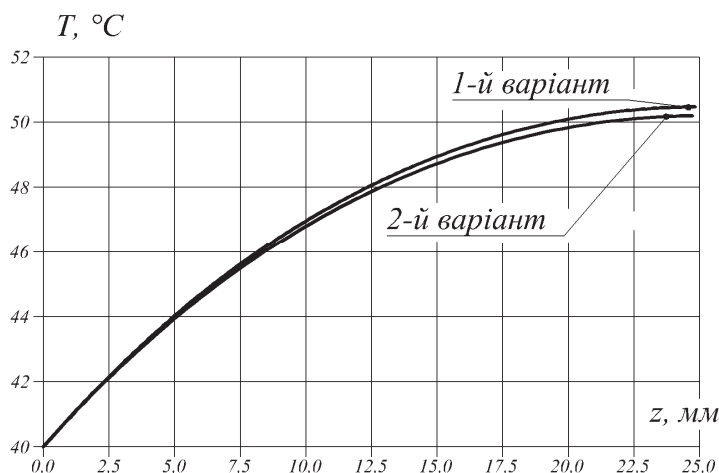


Рис. 5.12. Порівняння просторового розподілу температури у пазовій частині обмотки: а) за шириною паза; б) за висотою паза; в) за довжиною паза

Структура об'єкту та результати розрахунку поля температур показані на рис. 5.11. Для порівняння числових значень побудовані графіки розподілу температури в осьових напрямках (рис. 5.12). Найбільша розбіжність середніх температур не перевищує 1,5 °С (табл. 5.5), що може вважатися підтвердженням як правомірності самої концепції еквівалентних теплопровідностей, так і способу їх отримання.

5.4. Коефіцієнти тепловіддачі з різних типів поверхонь

Розглянемо типові поверхні охолодження ВБІМ та, використовуючи числа подібності, запропонуємо для них способи обчислення коефіцієнтів тепловіддачі.

Зовнішня ребрена поверхня станини, яка частково або повністю закрита раструбом конфузора, розглядається як сукупність каналів неправильної форми. Визначальними розмірами цих каналів є їх довжина L_k , яка приблизно дорівнює аксіальній довжині станини, та гідравлічний діаметр

$$D_k = 4 \frac{S_k}{P_k}, \quad (5.33)$$

де

$$S_k = \frac{h_k \varepsilon_k \pi (D_{bm} + h_k)}{n_k} \quad (5.34)$$

– площа перерізу каналу;

ε_k – відносна ширина каналу в тангенціальному напрямі

$$\varepsilon_k = \frac{b_k n_k}{\pi(D_{bm} + h_k)}; \quad (5.35)$$

b_k, h_k, n_k – ширина та висота каналу, відповідно;

n_k – їх кількість;

D_{bm} – зовнішній діаметр станини;

$$P_k = 2 \left(\frac{\varepsilon_k \pi (D_{bm} + h_k)}{n_k} + h_k \right) \quad (5.36)$$

– «змочений» периметр каналу.

Коефіцієнт тепловіддачі з поверхні цих каналів α залежить від характеру руху холодоагенту в них. Відомо, що за турбулентного руху середнє значення α в кілька разів вище ніж за ламінарного, тому за проектування такої системи охолодження необхідно слідкувати, щоби $Re > 6000$ [67]. Отже, за повністю розвинутої турбулентної течії у довгих каналах безрозмірний коефіцієнт тепловіддачі визначаємо як

$$Nu = 0,023 \cdot Re^{0,8} Pr^{0,33}. \quad (5.37)$$

У випадках відносно коротких каналів ($L_k/D_k < 400$) турбулентна течія не встигає розвинутися повністю й рекомендують формулу [67]

$$Nu = 0,036 \cdot Re^{0,8} Pr^{0,33} \left(\frac{D_k}{L_k} \right)^{0,055}. \quad (5.38)$$

Оцінити тепловіддачу за ламінарної течії можна за виразом

$$Nu = 1,86 \cdot (Re \cdot Pr)^{0,33} \left(\frac{D_k}{L_k} \right)^{0,33}. \quad (5.39)$$

Співвідношення (5.39) справедливе за умови, що $Re \cdot Pr \left(\frac{D_k}{L_k} \right) > 10$.

Розрахувавши в такий спосіб число Nu , тут і надалі, коефіцієнт тепловіддачі α визначаємо з (1.7).

Тепловіддача в нерухомих *аксіальних каналах* між зовнішньою поверхнею осердя статора та станиною практично визначатиме тепловий стан машини з аксіальною системою охолодження.

Гідравлічний діаметр такого каналу розраховується за (5.33), а його площа перерізу та «змочений» периметр як

$$S_k = \frac{\varepsilon_k \pi}{4n_k} \left((D_a + 2h_k)^2 - D_a^2 \right); \quad P_k = \frac{2\varepsilon_k \pi}{n_k} (D_a + h_k) + 2h_k. \quad (5.40)$$

За турбулентної течії число Нуссельта визначається за (5.38), де $L_k = l_1$.

Торцева поверхня заднього підшипникового щита, що розташована перпендикулярно до повітряної течії, охолоджується найбільш інтенсивно. Вона розглядається як *вертикальна стінка, тепло від якої відводиться за рахунок вимушеної конвекції*. Визначальним розміром такої стінки є зовнішній діаметр щита D_{bm} . Число Рейнольдса в цьому випадку становитиме $Re = \frac{v_a D_{bm}}{v_{air}}$, де v_a – лінійна швидкість течії.

Число Нуссельта для такого випадку розраховуємо за [71]

$$Nu = 0,228 \cdot Re^{0,731} Pr^{0,33}. \quad (5.41)$$

Торець переднього підшипникового щита, зі сторони вихідного кінця вала, розглядається як *вертикальна стінка, що охолоджується за рахунок вільної конвекції* повітрям довкілля.

Як і в попередньому випадку, визначальним розміром вважаємо зовнішній діаметр щита D_{bm} . Число Грасгофа розраховуємо за (1.8). В діапазоні $10^4 < Gr \cdot Pr < 10^9$ число Нуссельта для такої стінки визначаємо як [67]

$$Nu = 0,555 \cdot (Gr \cdot Pr)^{0,25}, \quad (5.42)$$

а для $10^9 < Gr \cdot Pr < 10^{13}$ —

$$Nu = 0,021 \cdot (Gr \cdot Pr)^{0,4}. \quad (5.43)$$

У ВБПМ з аксіальною системою охолодження інтенсивна тепловіддача відбувається через *повітряний проміжок* між статором та ротором. За наявності осьової течії повітря в такому циліндричному каналі з однією обертовою стінкою

рухається за доволі складними спіралеподібними траєкторіями із завихреннями. У [55,295] такий рух характеризується двома числами Рейнольдса, осьовим

$$\text{Re} = \frac{v_a \cdot 2\delta_f}{v_{air}}, \quad (5.44)$$

у якому характерними параметрами виступають подвоєне значення конструкційного повітряного проміжку δ_f і швидкість течії v_a , та коловим

$$\text{Re}_\omega = \frac{\pi \cdot n_n \cdot D_r \cdot \delta_f}{60v_{air}}, \quad (5.45)$$

для якого такими параметрами служать $2\delta_f$ та половина колової частоти ротора

$\frac{\omega \cdot r_r}{2}$, D_r – діаметр ротора.

Число Нуссельта визначаємо як [67]

$$\text{Nu} = \text{Nu}_s \cdot \left[\frac{1}{\left(1 + a_1^2 \left(\frac{\text{Re}_\omega}{\text{Re}}\right)^2\right)^{0,4}} + \frac{1,1 \cdot \left(\frac{2\delta_f}{D_r}\right)}{\left(a_1^2 + \left(\frac{\text{Re}}{\text{Re}_\omega}\right)^2\right)^{0,4}} \right], \quad (5.46)$$

де

$$\text{Nu}_s = 0,015 \cdot \text{Re}^{0,8} \cdot \left(\frac{D_r + 2\delta_f}{D_r}\right)^{0,18} \quad (5.47)$$

– число Нуссельта для стабілізованої течії без урахування обертання стінки;

$$a_1 = 0,65 \cdot \left(\frac{\delta_f}{D_r}\right) \quad (5.48)$$

– розрахунковий коефіцієнт.

Формула (5.46) справедлива для $\frac{\text{Re}_\omega}{\text{Re}} = 0,01 \div 10^4$ та $\frac{2\delta_f}{D_r} = 0,04 \div 0,44$.

Порожнини, утворені зовнішньою поверхнею лобових частин та внутрішньою станини можна вважати циліндричними нерухомими каналами. Розрахунок числа Нуссельта проводимо за (5.38).

Порожнини між вільними поверхнями вала, від торця ротора до внутрішнього торця підшипникового щита, та, умовно, внутрішньою поверхнею лобових частин вважаємо циліндричними каналами з обертовими стінками. Підхід до розрахунку коефіцієнта тепловіддачі аналогічний до (5.46) – (5.48).

Якщо замкнений простір між внутрішніми торцевими поверхнями підшипникових щитів, торцевими поверхнями осердя статора та поверхнями лобових частин обмотки заповнений повітрям, то визначення коефіцієнтів тепловіддачі супроводжується значними труднощами. Повітря в цьому замкненому просторі рухається за рахунок вентиляючої дії ротора або встановлених на ньому вентиляційних лопаток. Рух відбувається за доволі складними траєкторіями. У замкненому просторі неможливо розділити процеси нагріву та охолодження тому їх треба розглядати в комплексі.

Для полегшення розрахунку такого складного процесу конвекційного теплообміну розглядаємо його як елементарний процес теплопровідності, вводячи поняття еквівалентного коефіцієнта теплопровідності

$$\lambda_{ea} = \kappa_e \lambda_{air}, \quad (5.49)$$

де κ_e – безрозмірний поправочний коефіцієнт, який вказує на вплив конвекції;

λ_{air} – коефіцієнт теплопровідності за середньої температури холодоагенту.

Для вузьких, розташованих вертикально шпарин [71]

$$\kappa_e = 0,18 \cdot (\text{Gr} \cdot \text{Pr})^{0,25}. \quad (5.50)$$

Число Pr — за (1.6). Якщо величина κ_e , обчислена за (5.50), менша за 1, це означатиме, що вплив конвекції відсутній. Приймаємо $\kappa_e = 1$.

5.5. Теплова заступна схема ВБПМ з двоконтурною радіально-аксіальною системою повітряного охолодження

Для розрахунку стаціонарного поля температури закритої ВБПМ, яка відповідає способу охолодження IC0145 (0146, 0147) (див. рис. 5.1) створено математичну модель, що ґрунтується на МСЕ у тривимірній постановці. Аналіз отриманих з її допомогою результатів дає змогу виявити найбільш вірогідні шляхи

розповсюдження теплового потоку від усіх теплогенеруючих ділянок машини та розробити таку структуру ТЗС, яка, за умови допущення про одновимірний характер теплового потоку, надасть можливість визначати середні значення температур в цих ділянках з мінімальною похибкою по відношенню до їх дійсних фізичних значень.

Математичне формулювання та алгоритм даної моделі розглянуто у п. 2.4. Вихідні допущення, що стосуються способів наближення анізотропних, у тепловому відношенні, структур машини наведено у п. 5.3.

Вхідними даними такої моделі виступають втрати потужності, коефіцієнти теплопровідності матеріалів та конструкційних елементів, розміри та крайова умова у вигляді коефіцієнтів тепловіддачі з поверхонь охолодження. Всі вони занесені у табл. 5.6.

На рис. 5.13, *а,б* показано загальний вигляд геометричної та скінченно-елементної моделі високошвидкісного генератора, розрахованого на номінальну потужність 100 кВА та частоту обертання 30000 об/хв (загальна кількість вузлів — 105630; кількість елементів — 549480). На рис. 5.13, *в–е* показані його окремі частини — активна зона (статор та ротор), обмотка, осердя статора, індуктор разом з валом та підшипниками. Побудова здійснювалася за розмірами, вказаними у відповідній колонці табл. 5.6.

На рис. 5.14, *а-г*, у вигляді растрових зображень показано розподіл поля температур в активних елементах, а на рис. 5.14, *д-з* — температурного градієнту.

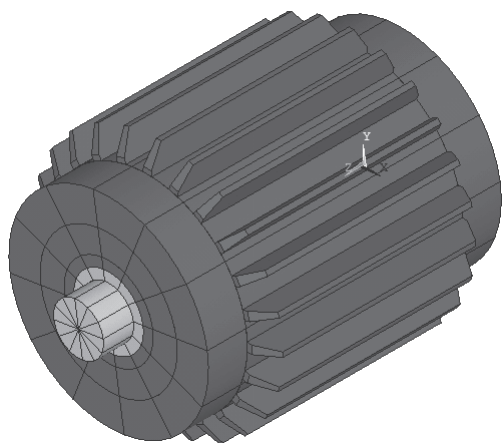
Як бачимо з рисунків, максимум температури дещо зміщений у осьовому напрямі в бік вихідного кінця вала, що пояснюється гіршими умовами охолодження цієї сторони машини. Однак, зважаючи на порівняно невеликий градієнт температури в напрямі осі Z , за розробки структури ТЗС нехтуватимемо цією особливістю. Припустимо, що поле температури симетрично відносно площини поперечного перерізу магнітопроводу машини. Також розподіл температури та вектора теплового градієнта свідчить про відносно слабкий вплив джерел тепловиділення статора на температуру елементів ротора та навпаки.

Вхідна інформація для теплового аналізу

Назва	Позначення	Величина (п. 5.5)	Величина (п. 5.6)	Величина (п. 5.7)
1	2	3	4	5
Втрати потужності, Вт				
пазова частина обмотки статора	P_s		200	
лобові частини обмотки статора	P_w		100	
зубці осердя статора	P_z		700	
яро осердя статора	P_a		1000	
поверхня ротора (втрати зумовлені газодинамічним тертям)	P_r		30	
полюси індуктора	P_j		80	
підшипникові опори	P_b		100	
Коефіцієнти теплопровідності, Вт/м·К				
матеріал вала	λ_{sh}		45,4	
матеріал полюсів індуктора	λ_j		11,0	
матеріал підшипникових щитів та станини	λ_{frm}	—	181,0	—
матеріал теплопровідного компаунду для лобових частин еквівалентний для осердя статора в радіальному та тангенціальному напрямках	λ_{cm}	—	—	0,8
еквівалентний для осердя статора в аксіальному напрямі	λ_{ert}		18,3	
еквівалентний для пазової частини обмотки статора в тангенціальному напрямі	λ_{eaa}		2,6	
еквівалентний для — // — в радіальному напрямі	$\lambda_{ew\tau}$		0,155	
еквівалентний для — // — в аксіальному напрямі	λ_{ewr}		0,198	
еквівалентний для повітря у внутрішньому замкненому просторі машини з урахуванням конвекційного теплообміну	λ_{ewa}		129,7	
еквівалентний для бандажа індуктора	λ_{ea}	0,0485	—	0,0485
	λ_{eb}		0,16	
Коефіцієнти тепловіддачі, Вт/м²·К				
вимушена конвекція в каналах між осердям статора та станиною; з нерухомих поверхонь розташованих вздовж до напрямку повітряної течії;	α_{w1}	156,9	110,4	836,3
вимушена конвекція з нерухомих поверхонь розташованих перпендикулярно до напрямку повітряної течії	α_{w2}	303,2	123,6	—
вимушена конвекція з зовнішніх поверхонь лобових частин обмотки та внутрішніх станини	α_{w3}	—	18,6	—
вимушена конвекція з внутрішніх поверхонь лобових частин обмотки та вільних поверхонь вала	α_{w4}	—	79,68	—
вимушена конвекція з поверхонь, що обмежують повітряний проміжок між статором та ротором	α_{w5}	—	154,5	—
вимушена конвекція в каналах підшипникових щитів	α_{w6}	—	45,44	—
вільна конвекція з вертикальних нерухомих поверхонь	α_{fr}	6,8	4,5	6,8

1	2	3	4	5
Розміри, [м] та конструкційні параметри				
зовнішній діаметр осердя статора	D_a	0,19		
внутрішній діаметр осердя статора	D	0,091		
осьова довжина осердя статора	l_1	0,220		
кількість зубців на статорі (розрахункова)	Z	12		
повна висота зубця	h_{sz}	0,0245		
висота пазової частини обмотки	h_s	0,021		
середня ширина зубця	b_{sz}	0,018		
середня ширина паза	b_s	0,012		
кількість площин розташування лобових частин	n_w	1	3	1
довжина вильоту лобових частин	l_{wo}	0,022	0,093	0,031
кількість каналів на станині; між осердям статора та станиною	n_k	24	6	10
кількість каналів у підшипникових щитах	n_{kb}	–	4	–
відносна ширина каналу на станині; між осердям статора та станиною	ε_k	0,8	0,8	0,9
відносна ширина каналу в підшипникових щитах	ε_{kb}	–	0,8	–
висота каналу на станині; між осердям статора та станиною	h_k	0,025	0,010	0,015
середня товщина станини	t_{frm}	0,010	0,012	0,008
довжина орєбреної частини станини	l_{frm}	0,270	–	–
величина фактичного повітряного проміжку	δ_f	0,004		
одностороння товщина бандажу	t_b	0,002		
середня товщина магніта	h_{pm}	0,014		
середня товщина підш. щитів	t_{brs}	0,010	0,014	0,014
осьова віддаль між підшипниковими опорами	l_{bm}	0,284	0,440	0,350

а)



б)



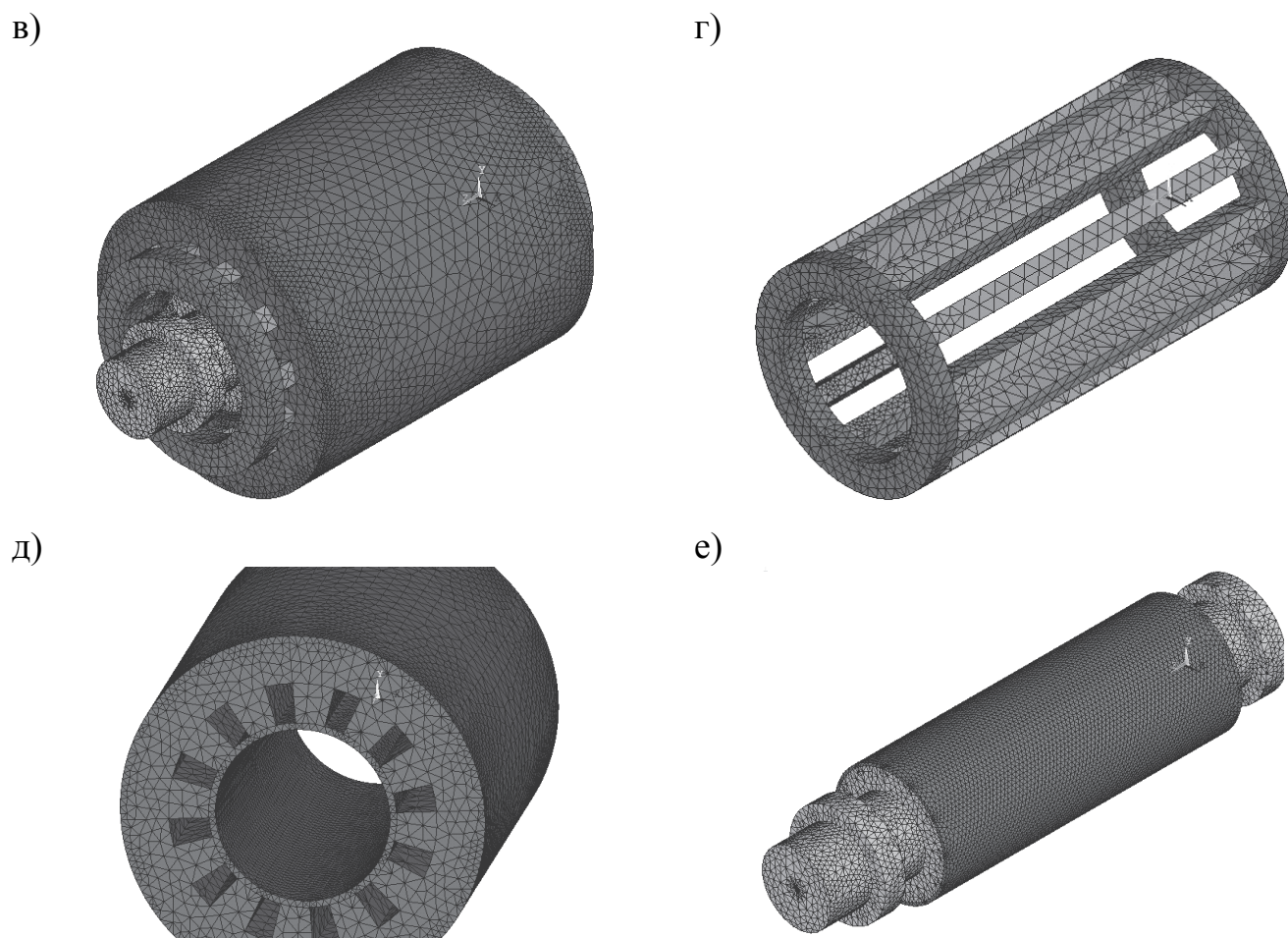
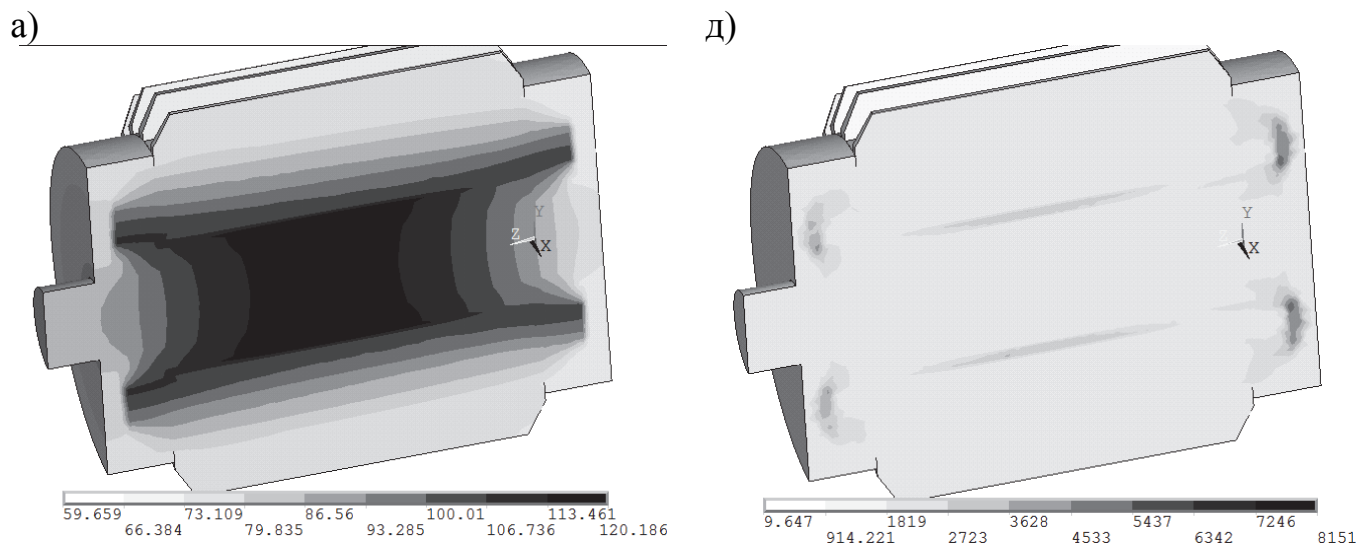


Рис. 5.13. Складові скінченно-елементної моделі ВБІМ

зі способом охолодження IC0145 (0146, 0147): а) геометрична модель машини; б) скінченно-елементна модель машини. Скінченно-елементні моделі: в) статора та ротора; г) обмотки статора; д) осердя статора; е) ротора (індуктора)



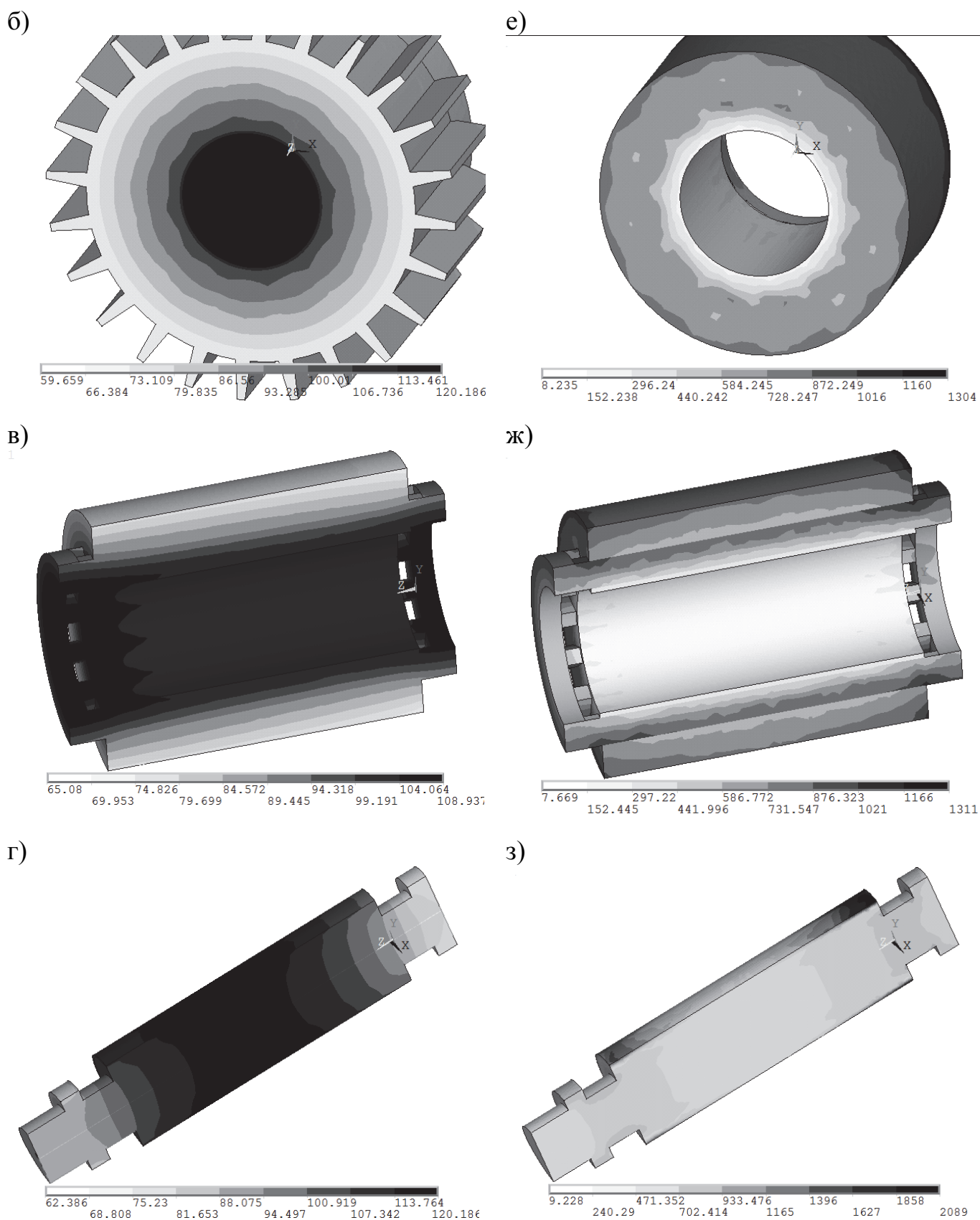


Рис. 5.14. Результати розрахунку поля температури у $^{\circ}\text{C}$ (а–в), та поля модуля вектора градієнта температури у K/m (д–ж), у конструкційних елементах машини

Всебічний аналіз температурного поля та ознайомлення зі структурами ТЗС існуючих загальнопромислових машин [23,132,151], опосередковано, дозволяє запропонувати структуру схеми, показану на рис. 5.15.

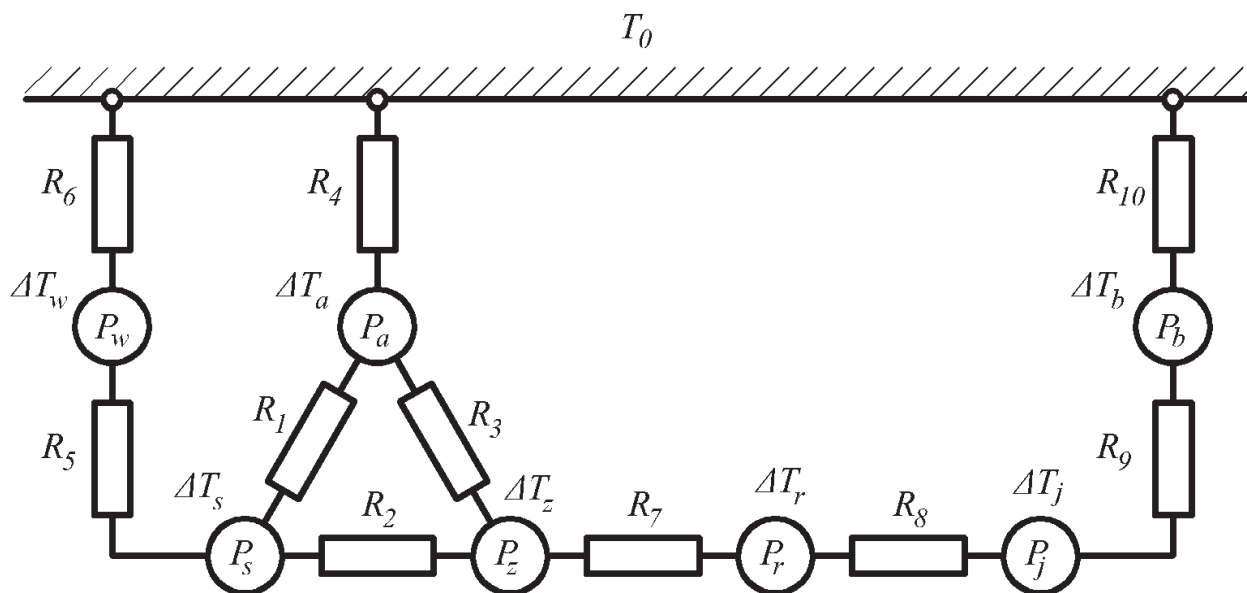


Рис. 5.15. Теплова заступна схема ВБІМ

з незалежним повітряним охолодженням ІС0145 (0146,0147)

Машина розглядається як сукупність семи тіл, у яких відбувається виділення тепла. Ці тіла пов'язанні між собою відповідними тепловими опорами.

Втрати потужності на схемі відображено з використанням вже введених позначень (див. табл. 5.6), перевищення температур відповідних частин машини у K позначено так: ΔT_s – пазової частині обмотки статора; ΔT_w – лобових частин обмотки статора; ΔT_z – зубців осердя статора; ΔT_a – ярма осердя статора; ΔT_r – поверхні ротора (бандажа); ΔT_j – полюсів індуктора; ΔT_b – підшипникових опор; T_0 – абсолютна температура довкілля.

Опори проходженню теплового потоку, К/Вт: R_1 – між пазовою частиною обмотки та ярмом статора; R_2 – між пазовою частиною обмотки та зубцями статора; R_3 – між зубцями та ярмом статора; R_4 – між ярмом статора, станиною та довкіллям; R_5 – між пазовою частиною обмотки статора та лобовими; R_6 – між лобовими частинами обмотки статора, внутрішнім повітрям, корпусом та довкіллям; R_7 – між

статором та ротором; R_8 – між полюсами індуктора та бандажем; R_9 – між полюсами індуктора, валом та підшипниками; R_{10} – між підшипниками, щитами та довкіллям.

Розглянемо спосіб розрахунку теплових опорів для цієї ТЗС, у відповідності до співвідношень, отриманих у п. 5.2.

Для скорочення запису розрахункових формул введемо в обіг такі геометричні характеристики:

$$\begin{aligned}
 D_{bm} &= D_a + 2t_{frm} && \text{– середній зовнішній діаметр станини;} \\
 D_{ai} &= D + 2h_{sz} && \text{– внутрішній діаметр ярма статора;} \\
 D_r &= D - 2\delta_f && \text{– зовнішній конструкційний діаметр ротора;} \\
 D_j &= D - 2(\delta_f + t_b) && \text{– зовнішній діаметр поверхні полюсів;} \\
 D_{sh} &= D - 2(\delta_f + t_b + h_{pm}) && \text{– розрахунковий діаметр вала;} \\
 l_{\Sigma wo} &= 2\pi(D + h_{sz}) && \text{– сумарна довжина лобових частини обмотки статора;} \\
 l_{bpm} &= l_{bm} - l_1 - 2t_{brs} && \text{– сумарна розрахункова довжина бокової поверхні} \\
 &&& \text{охолодження підшипникових щитів;} \\
 S_c &= l_{frm}[\varepsilon_k \pi D_{bm} + 2h_k n_k] && \text{– розрахункова площа поверхні охолодження станини.}
 \end{aligned}
 \tag{5.51}$$

Опір R_1 тепловому потоку між пазовою частиною обмотки та ярмом статора складається з двох послідовно під'єднаних опорів — ТО пазової частини обмотки в радіальному напрямі R_{11} та ТО частини ярма статора в цьому ж напрямі R_{12} :

$$R_1 = R_{11} + R_{12}, \tag{5.52}$$

де, у відповідності до (5.7), (5.14), (5.15),

$$R_{11} = \frac{0,5h_{sz}}{12\lambda_{ewr}b_s l_1 Z}; \quad R_{12} = R_{Tas} \left[\frac{D_a^2}{D_a^2 - D_{ai}^2} - \frac{0,5}{\ln\left(\frac{D_a}{D_{ai}}\right)} \right]; \quad R_{Tas} = \frac{\ln\left(\frac{D_a}{D_{ai}}\right)}{2\pi l_1 \lambda_{ear}} \cdot \frac{b_s + b_{sz}}{b_s}.
 \tag{5.53}$$

Опір R_2 тепловому потоку між пазовою частиною обмотки та зубцями статора складається з двох послідовно під'єднаних опорів — ТО пазової частини обмотки в

тангенціальному напрямі R_{21} та ТО зубців осердя статора в цьому ж напрямі R_{22} :

$$R_2 = R_{21} + R_{22}, \quad (5.54)$$

де

$$R_{21} = \frac{0,5b_s}{12\lambda_{ew\tau}(h_s + b_s)l_1Z}; \quad R_{22} = \frac{0,5b_{sz}}{12\lambda_{ear}(h_s + b_s)l_1Z}. \quad (5.55)$$

Опір R_3 тепловому потоку між зубцями та ярмом статора складається з двох послідовно під'єднаних опорів — ТО зубців осердя статора в радіальному напрямі R_{31} та ТО частини ярма статора в цьому ж напрямі R_{32} :

$$R_3 = R_{31} + R_{32}, \quad (5.56)$$

де

$$R_{31} = \frac{h_{sz}}{12\lambda_{ear}b_{sz}l_1Z}; \quad R_{32} = R_{Taz} \left[\frac{D_a^2}{D_a^2 - D_{ai}^2} - \frac{0,5}{\ln\left(\frac{D_a}{D_{ai}}\right)} \right]; \quad R_{Taz} = \frac{\ln\left(\frac{D_a}{D_{ai}}\right)}{2\pi l_1\lambda_{ear}} \cdot \frac{b_s + b_{sz}}{b_{sz}}. \quad (5.57)$$

Опір R_4 тепловому потоку між ярмом статора, станиною та доквіллям складається з двох послідовно під'єднаних опорів — ТО ярма осердя статора в радіальному напрямі R_{41} та ТО відбору тепла з поверхні станини R_{42} :

$$R_4 = R_{41} + R_{42}, \quad (5.58)$$

де

$$R_{41} = R_{Ta} \left[\frac{0,5}{\ln\left(\frac{D_a}{D_{ai}}\right)} - \frac{D_{ai}^2}{D_a^2 - D_{ai}^2} \right]; \quad R_{Ta} = \frac{\ln\left(\frac{D_a}{D_{ai}}\right)}{2\pi l_1\lambda_{ear}}; \quad R_{42} = \frac{l_{frm}}{\alpha_{w1}S_c l_1}. \quad (5.59)$$

Опір R_5 тепловому потоку між пазовою частиною обмотки статора та лобовими

$$R_5 = \frac{0,3 \cdot l_{\Sigma wo} + 0,5 \cdot l_1}{12\lambda_{ewa}b_s h_s Z}. \quad (5.60)$$

Опір R_6 тепловому потоку між лобовими частинами обмотки статора, внутрішнім повітрям, корпусом та доквіллям складається з чотирьох опорів,

під'єднаних у відповідності зі схемою на рис. 5.16

$$R_6 = \frac{R_{61} \cdot R_{62}}{R_{61} + R_{62}} + \frac{R_{63} \cdot R_{64}}{R_{63} + R_{64}}. \quad (5.61)$$

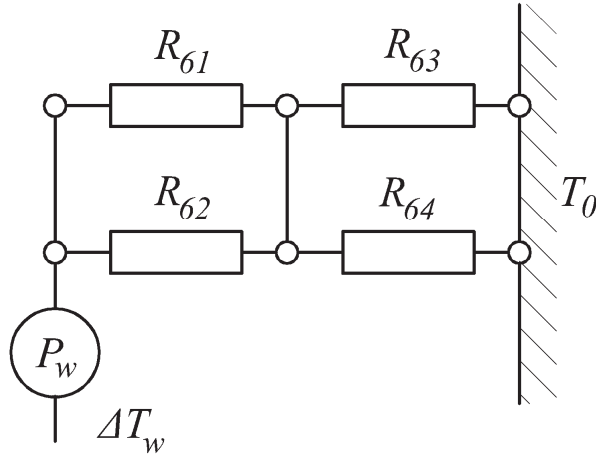


Рис. 5.16. Фрагмент ТЗС для розрахунку T_0 R_6

На схемі (рис. 5.16) позначено:

– опір R_{61} — ТО лобової частини обмотки разом з внутрішнім повітрям в радіальному напрямі

$$R_{61} = R_{61w} + R_{61a}, \quad (5.62)$$

де

$$R_{61w} = \frac{h_s}{12\lambda_{ewr}b_s l_{\Sigma wo}}; \quad R_{61a} = \frac{0,25 \cdot (D_a - D - 2h_{sz})}{2\lambda_{ea}l_{wo}\pi \cdot D_{ai}}; \quad (5.63)$$

– опір R_{62} — ТО лобової частини обмотки разом з внутрішнім повітрям в аксіальному напрямі

$$R_{62} = R_{62w} + R_{62a}, \quad (5.64)$$

де

$$R_{62w} = \frac{b_s}{12\lambda_{ew\tau}h_s l_{\Sigma wo}}; \quad R_{62a} = \frac{0,5 \cdot (l_{bm} - l_1 - t_{brs}) - l_{wo}}{2\lambda_{ea}h_s\pi \cdot D_{ai}}; \quad (5.65)$$

– опір R_{63} відповідає за відбір тепла з поверхні станини, навпроти лобових частин

$$R_{63} = \frac{l_{frm}}{\alpha_{w1}S_c(l_{frm} - l_1)}; \quad (5.66)$$

– опір R_{64} — ТО відбору тепла з поверхні підшипникових щитів, навпроти лобових частин

$$R_{64} = \frac{1}{0,25\pi D_a^2 (\alpha_{w2} + \alpha_{fr})}. \quad (5.67)$$

Опір R_7 тепловому потоку між статором та ротором складається з трьох послідовно під'єднаних опорів — ТО зубців осердя статора в радіальному напрямі $R_{71} = R_{31}$, ТО повітряного проміжку R_{72} та бандажного кільця R_{73} в цьому ж напрямі:

$$R_7 = R_{71} + R_{72} + R_{73}, \quad (5.68)$$

де

$$R_{71} = \frac{h_{sz}}{12\lambda_{ear} b_{sz} l_1 Z}; \quad R_{72} = \frac{\ln\left(\frac{D}{D_r}\right)}{2\pi l_1 \lambda_{ea}}; \quad R_{73} = R_{Tb} \left[\frac{D_r^2}{D_r^2 - D_j^2} - \frac{0,5}{\ln\left(\frac{D_r}{D_j}\right)} \right]; \quad R_{Tb} = \frac{\ln\left(\frac{D_r}{D_j}\right)}{2\pi l_1 \lambda_{eb}}. \quad (5.69)$$

Опір R_8 тепловому потоку між полюсами індуктора та бандажем складається з двох послідовно під'єднаних опорів — ТО бандажного кільця в радіальному напрямі R_{81} та полюсів індуктора в цьому ж напрямі R_{82} :

$$R_8 = R_{81} + R_{82}, \quad (5.70)$$

де

$$R_{81} = R_{Tb} \left[\frac{0,5}{\ln\left(\frac{D_r}{D_j}\right)} - \frac{D_j^2}{D_r^2 - D_j^2} \right]; \quad R_{82} = R_{Tj} \left[\frac{D_j^2}{D_j^2 - D_{sh}^2} - \frac{0,5}{\ln\left(\frac{D_j}{D_{sh}}\right)} \right]; \quad R_{Tj} = \frac{\ln\left(\frac{D_j}{D_{sh}}\right)}{2\pi l_1 \lambda_j}. \quad (5.71)$$

Опір R_9 тепловому потоку між полюсами індуктора та підшипниками складається з трьох послідовно під'єднаних опорів — ТО полюсів індуктора в радіальному напрямі R_{91} , ТО вала в осьовому напрямі R_{92} та ТО підшипників R_{93} :

$$R_9 = R_{91} + R_{92} + R_{93}, \quad (5.72)$$

де

$$R_{91} = R_{Tj} \left[\frac{0,5}{\ln\left(\frac{D_j}{D_{sh}}\right)} - \frac{D_{sh}^2}{D_j^2 - D_{sh}^2} \right]; \quad R_{92} = \frac{l_{bm} - l_1}{0,5\lambda_{sh}\pi D_{sh}^2};$$

$$R_{93} = R_{Tbr} \left[\frac{0,5}{\ln\left(\frac{D_j}{D_{sh}}\right)} - \frac{D_{sh}^2}{D_j^2 - D_{sh}^2} \right]; \quad R_{Tbr} = \frac{\ln\left(\frac{D_j}{D_{sh}}\right)}{4\pi t_{brs}\lambda_{sh}}. \quad (5.73)$$

Тут зауважимо, що у формулу для розрахунку опору R_{93} входять розрахункові (наближені) розміри підшипників D_j, D_{sh}, t_{brs} . Якщо відомі реальні розміри підшипників D, d, B , то саме їх треба підставляти у (5.73).

Опір R_{10} тепловому потоку між підшипниками, корпусними деталями та довкіллям складається з трьох опорів — ТО підшипників R_{101} , ТО відбору тепла з поверхні підшипникових щитів R_{102} та ТО відбору тепла зовнішньою системою охолодження підшипників R_{103} . Опори R_{101}, R_{102} під'єднані послідовно, а R_{103} — паралельно до них:

$$R_{10} = \frac{(R_{101} + R_{102}) \cdot R_{103}}{R_{101} + R_{102} + R_{103}}, \quad (5.74)$$

де

$$R_{101} = R_{Tbr} \left[\frac{D_j^2}{D_j^2 - D_{sh}^2} - \frac{0,5}{\ln\left(\frac{D_j}{D_{sh}}\right)} \right]. \quad (5.75)$$

Опір R_{102} , в свою чергу, складається з опору відбору тепла з торцевої R_{10t} та бокової R_{10b} поверхонь щитів, підключених паралельно:

$$R_{102} = \frac{R_{10t} \cdot R_{10b}}{R_{10t} + R_{10b}}, \quad (5.76)$$

де

$$R_{10t} = \frac{1}{0,25\pi(D_a^2 - D^2)(\alpha_{w2} + \alpha_{fr})}; R_{10b} = \frac{1}{\pi D_{bm} l_{bpm} \alpha_{w1}}. \quad (5.77)$$

Опір R_{103} у випадку наявності незалежної системи охолодження визначається з умови забезпечення допустимого перевищення температури ΔT за відомого тепловиділення P_b

$$R_{103} = \Delta T / P_b. \quad (5.78)$$

За відсутності такої системи величина опору $R_{103} \rightarrow \infty$, тобто йому присвоюємо значення, наприклад, 10^5 К/м.

Система рівнянь, розв'язок якої — шукані перевищення температури ΔT_s , ΔT_w , ΔT_z , ΔT_a , ΔT_r , ΔT_j , ΔT_b , виглядає так:

$$\begin{cases} (A_1 + A_2 + A_5)\Delta T_s - A_5\Delta T_w - A_2\Delta T_z - A_1\Delta T_a = P_s \\ -A_5\Delta T_s + (A_5 + A_6)\Delta T_w = P_w \\ -A_2\Delta T_s + (A_2 + A_3 + A_7)\Delta T_z - A_3\Delta T_a - A_7\Delta T_r = P_z \\ -A_1\Delta T_s - A_3\Delta T_z + (A_1 + A_3 + A_4)\Delta T_a = P_a \\ -A_7\Delta T_z + (A_7 + A_8)\Delta T_r - A_8\Delta T_j = P_r \\ -A_8\Delta T_r + (A_8 + A_9)\Delta T_j - A_9\Delta T_b = P_j \\ -A_9\Delta T_j + (A_9 + A_{10})\Delta T_b = P_j \end{cases}, \quad (5.79)$$

де $A_i = R_i^{-1}$ ($i = \overline{1,10}$) — відповідні теплові провідності ТЗС.

Абсолютні середні значення температур семи тіл, на які умовно розділена машина визначаються як

$$\vec{T} = T_0 + \Delta\vec{T}, \quad (5.80)$$

де $\Delta\vec{T} = \|\Delta T_s \quad \Delta T_w \quad \Delta T_z \quad \Delta T_a \quad \Delta T_r \quad \Delta T_j \quad \Delta T_b\|_*$ — вектор перевищень температур;

$\vec{T} = \|T_s \quad T_w \quad T_z \quad T_a \quad T_r \quad T_j \quad T_b\|_*$ — вектор абсолютних температур.

Тестова задача, що розв'язувалася з використанням тривимірної польової моделі й описана на початку цього підрозділу, вдруге розв'язувалася на підставі опису з використанням отриманої ТЗС.

Теплові опори, розраховані за методикою (5.52) – (5.78), та на підставі даних з табл. 5.6 становлять, К/Вт:

$$R_1 = 0,1793; R_2 = 0,01898; R_3 = 0,01343; R_4 = 0,02254; R_5 = 0,06963; R_6 = 4,270; \\ R_7 = 0,7807; R_8 = 0,1259; R_9 = 0,4438; R_{10} = 0,1208.$$

Результати порівняння зведені в табл. 5.7.

Таблиця 5.7

Порівняльна характеристика результатів розрахунку

Середні значення абсолютної температури, °С:	Польовий підхід	Підхід на підставі ТЗС	Розбіжність, %
пазової частині обмотки статора, T_s	95,98	100.9	5.20
лобових частин обмотки статора, T_w	99,45	106.8	7.43
зубців осердя статора, T_z	96,92	97.26	0.35
ярма осердя статора, T_a	80,78	85.04	5.27
поверхні ротора, T_r	112,6	108.2	3.87
полюсів індуктора, T_j	111,2	106.2	4.46
підшипникових опор, T_b	73,97	63.67	13.9

Розбіжність результатів не перевищує 14%, що свідчить про задовільну точність розрахунку абсолютних температур закритої машини з незалежним повітряним охолодженням ІС0145 (0146, 0147).

5.6. Теплова заступна схема ВБІМ з аксіальною системою повітряного охолодження

Для оцінювання теплового стану ВБІМ, яка відповідає способу охолодження ІС15 (16,17) (див. рис. 5.2), застосуємо підхід, вже використаний у п. 5.5.

Вхідні дані вказані у відповідному стовпці табл. 5.6.

Загальний вигляд геометричної та скінченно-елементної моделі високошвидкісного генератора та його складових, розрахованого на ті самі номінальні потужність та частоту обертання (100 кВА, 30000 об/хв), що й попередньому підрозділі, але з іншим виконанням обмотки статора показано на рис. 5.17 (загальна кількість вузлів — 66524; кількість елементів — 298609).

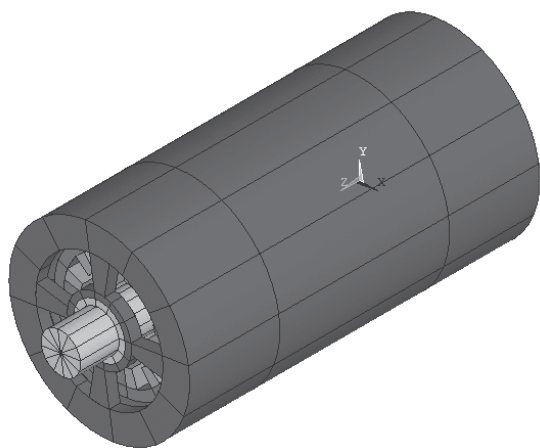
Результати розрахунків полів температури та градієнта температури у вигляді растрових зображень показано на рис. 5.18.

Даному варіанту системи охолодження теж притаманна осьова симетрія, а теплообмін між статором і ротором ще менший у порівнянні з варіантом зовнішнього обдуву. Можна стверджувати, що така система охолодження є більш ефективною, ніж попередня.

Аналіз отриманих результатів дав змогу синтезувати ТЗС, показану на рис. 5.19. Всі позначення відображені на схемі, за виключенням теплових опорів, відповідають дефініціям прийнятим у п. 5.5.

Теплові опори, К/Вт: R_1 – між пазовою частиною обмотки та ярмом статора; R_2 – між пазовою частиною обмотки та зубцями осердя статора; R_3 – між зубцями та ярмом статора; R_4 – між ярмом статора, станиною та довкіллям; R_5 – між пазовою частиною обмотки статора та лобовими; R_6 – між лобовими частинами обмотки статора та довкіллям; R_8 – між полюсами індуктора та бандажем; R_9 – між полюсами індуктора, валом та підшипниками; R_{10} – між підшипниками, підшипниковими щитами та довкіллям; R_{11} – між зубцями осердя статора та довкіллям; R_{12} – між бандажем ротора та довкіллям; R_{13} – між ярмом осердя статора, станиною, підшипниковими щитами та підшипниками.

а)



б)



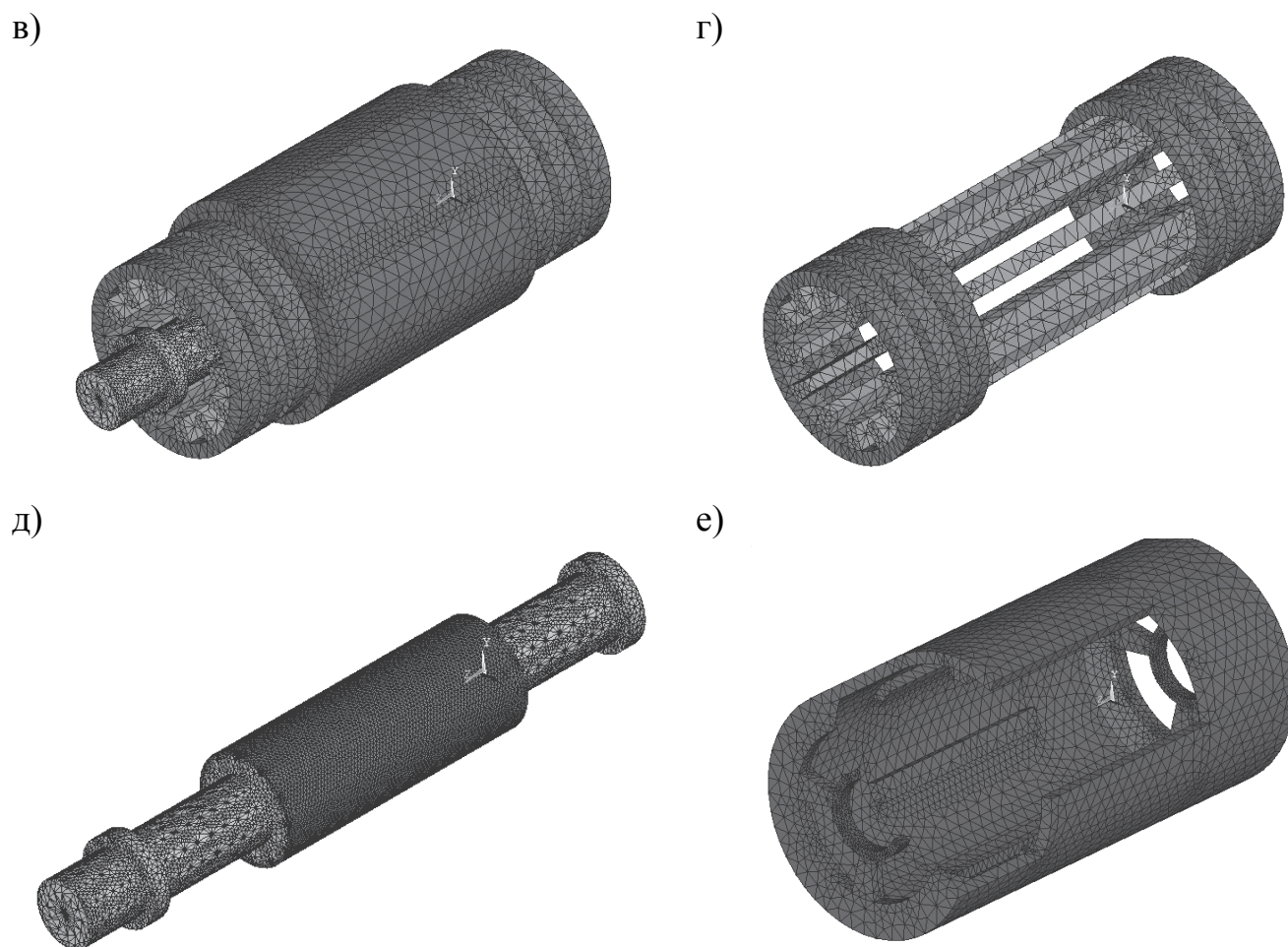
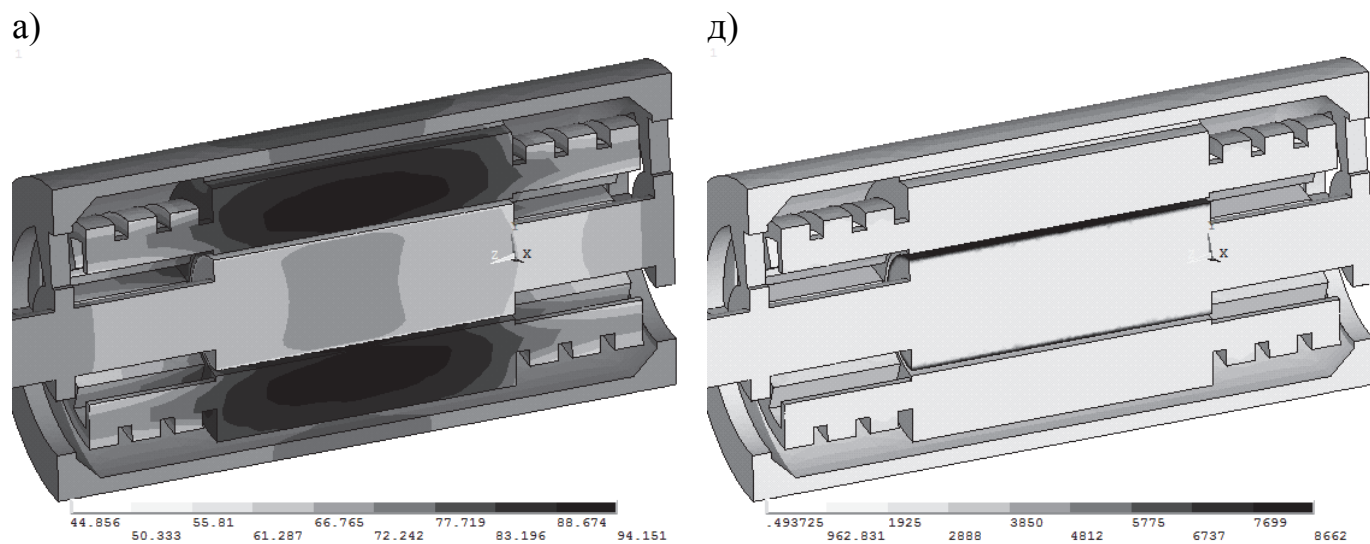


Рис. 5.17. Складові скінченно-елементної моделі ВПМ зі способом охолодження IC15 (16,17): а) геометрична модель машини; б) скінченно-елементна модель машини. Скінченно-елементні моделі: в) статора та ротора; г) обмотки статора; д) ротора (індуктора); е) станини (корпуса)



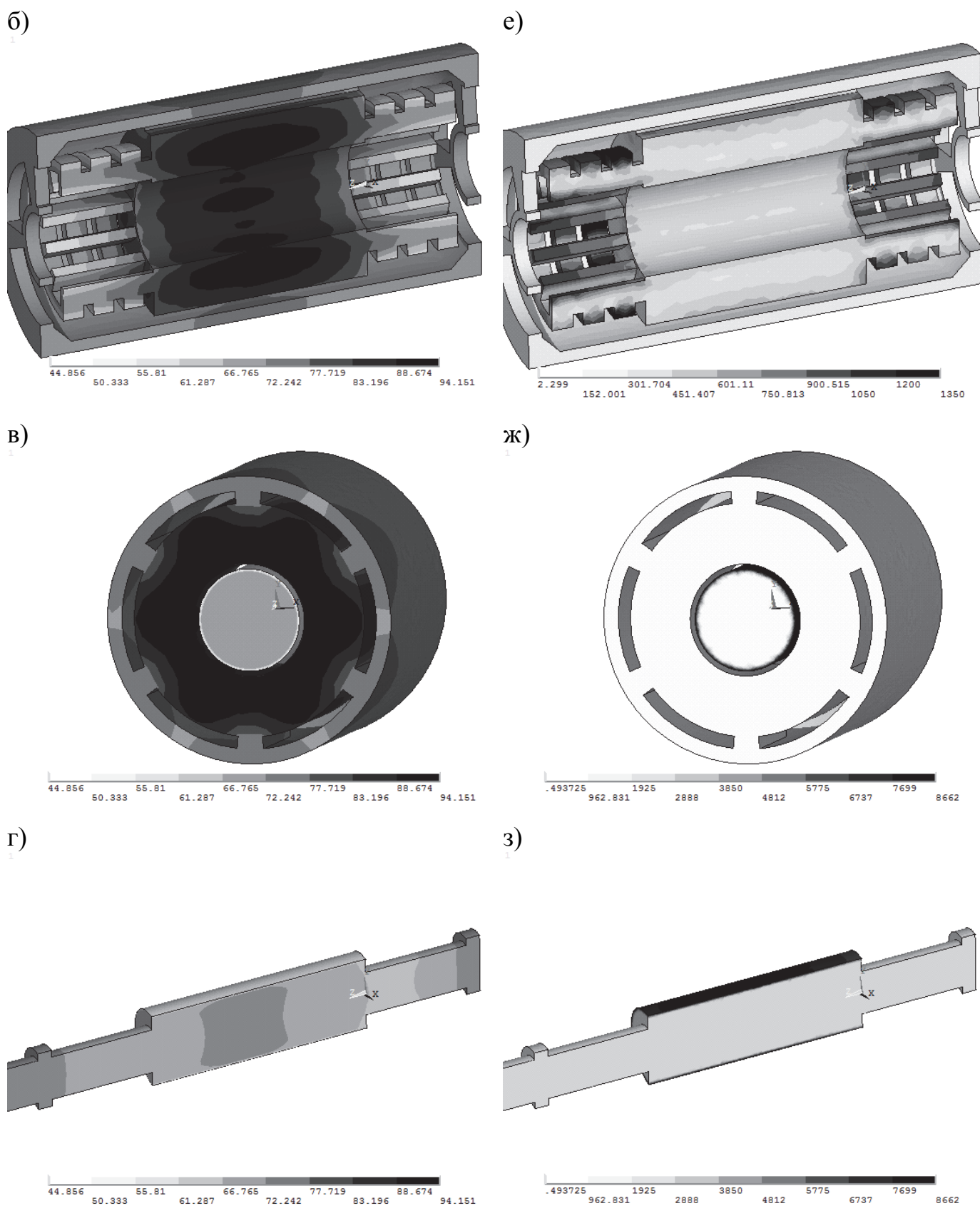


Рис. 5.18. Результати розрахунку поля температури, °C (а-г), та поля модуля вектора градієнта температури, К/м (д-з), у конструкційних елементах машини

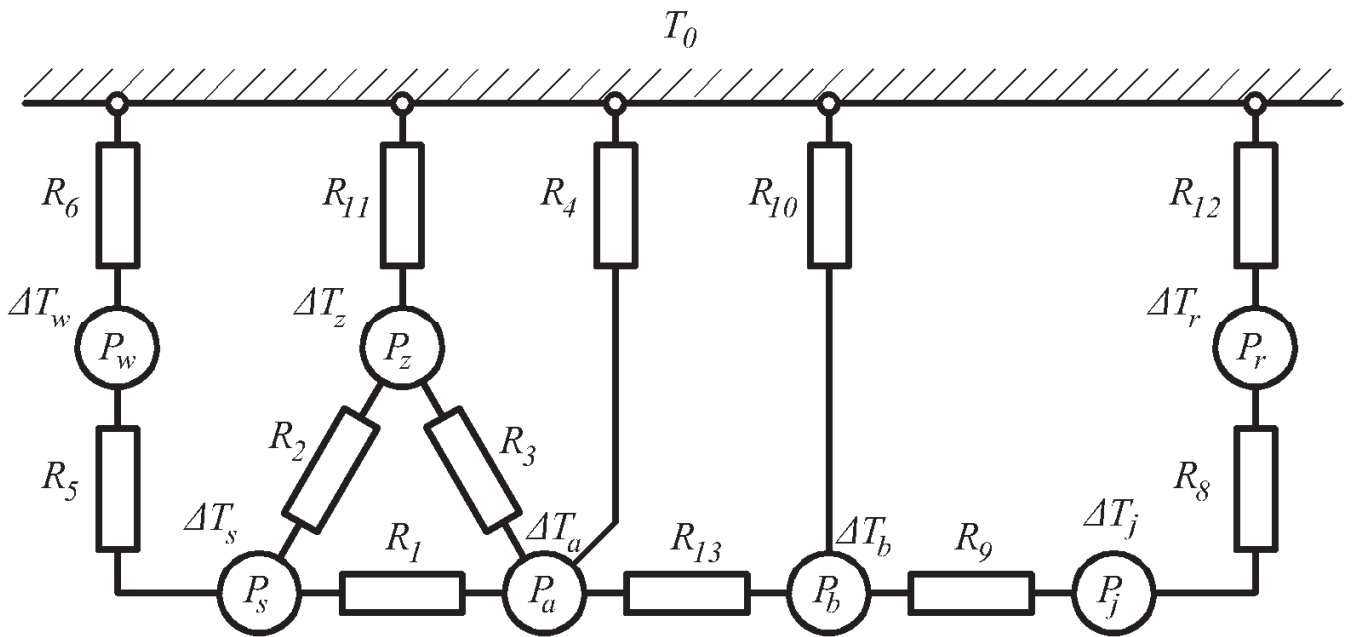


Рис. 5.19. Теплова заступна схема ВБІМ

з незалежним повітряним охолодженням ІС15 (16,17)

Додатково до (5.51) введемо наступні позначення:

$$D_{fri} = D_a + 2h_k \quad - \text{внутрішній діаметр станини};$$

$$D_{bm} = D_{fri} + 2t_{frm} \quad - \text{зовнішній діаметр станини};$$

$$S_{wo} = S_{w1} + S_{w2} + S_{w3} \quad - \text{поверхня охолодження лобової частини};$$

$$S_{w1} = l_{wo}Z(b_s + 2h_s) \quad - \text{площа плоских поверхонь лобової частини};$$

$$S_{w2} = n_w h_s \pi (D + 2h_{sz} + 2b_s) \quad - \text{площа її циліндричних поверхонь};$$

$$S_{w3} = 0,25n_w \pi \left[(D + 2h_{sz} + 2b_s)^2 - (D + 2h_{sz})^2 \right] - \text{площа її кільцевих поверхонь}.$$

(5.81)

Опори R_1 тепловому потоку між пазовою частиною обмотки та ярмом статора, R_2 тепловому потоку між пазовою частиною обмотки та зубцями статора та R_3 тепловому потоку між зубцями та ярмом статора розраховуються за формулами (5.52), (5.54), (5.56), відповідно.

Опір R_4 тепловому потоку між ярмом статора, станиною та довкіллям складається з чотирьох опорів з'єднаних у відповідності до схеми на рис. 5.20:

$$R_4 = R_{41} + \frac{R_{43}(R_{42} + R_{44})}{R_{42} + R_{43} + R_{44}}, \quad (5.82)$$

де опір R_{41} трактується як ТО ярма осердя статора в радіальному напрямі та розраховується за (5.59).

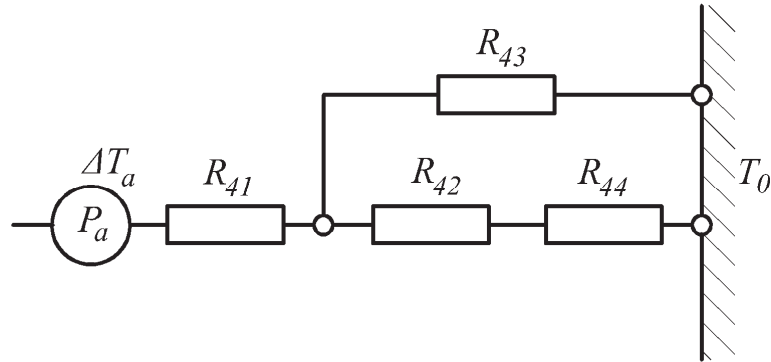


Рис. 5.20. Фрагмент ТЗС для розрахунку ТО R_4

ТО між зовнішньою поверхнею ярма статора та ребрами станини

$$R_{42} = \frac{h_k + t_{frm}}{\lambda_{frm} \pi D_a (1 - \varepsilon_k) l_1}. \quad (5.83)$$

ТО відбору тепла з поверхні ярма статора, що дотична до повітряної течії довкілля

$$R_{43} = \frac{1}{\alpha_{w1} \pi D_a \varepsilon_k l_1}. \quad (5.84)$$

ТО відбору тепла з поверхні станини, що дотична до повітряної течії довкілля

$$R_{44} = \frac{1}{\alpha_{w1} (\pi D_{fri} \varepsilon_k + 2h_k n_k) \cdot l_1}. \quad (5.85)$$

Опір R_5 тепловому потоку між пазовою частиною обмотки статора та лобовими розраховується за (5.60).

Опір R_6 — ТО між лобовою частиною обмотки статора й повітрям довкілля

$$R_6 = R_{64} + \frac{R_{61} R_{62} R_{63}}{R_{61} R_{62} + R_{62} R_{63} + R_{61} R_{63}}, \quad (5.86)$$

де

$$R_{61} = \frac{0,5 \cdot b_s}{12 \lambda_{ewr} h_s n_w \pi (D + 2h_{sz} + 2b_s)} \quad (5.87)$$

– ТО дугоподібних фрагментів лобових у радіальному напрямі;

$$R_{62} = \frac{0,25 \cdot h_s}{12 \lambda_{ew\tau} b_s n_w \pi (D + 2h_{sz} + b_s)} \quad (5.88)$$

– ТО дугоподібних фрагментів лобових в осьовому напрямі;

$$R_{63} = \frac{0,25 \cdot l_{wo}}{12 \lambda_{ewa} b_s h_s Z} \quad (5.89)$$

– ТО плоских фрагментів лобових в осьовому напрямі;

$$R_{64} = \frac{1}{2 \alpha_{w34} S_{wo}} \quad (5.90)$$

– ТО відбору тепла з поверхні лобових частин статора.

Коефіцієнт тепловіддачі α_{w34} визначається як середнє значення $\alpha_{w34} = (\alpha_{w3} + \alpha_{w4})/2$ (див. табл. 5.6).

ТО R_8 тепловому потоку між полюсами індуктора та бандажем складається з двох послідовно під'єднаних опорів — ТО R_{81} бандажного кільця в радіальному напрямі та R_{82} полюсів індуктора в радіальному напрямі. Розраховується цей опір за (5.70).

Опір R_9 тепловому потоку між полюсами індуктора та підшипниками складається з трьох послідовно під'єднаних опорів й визначається за (5.72).

ТО R_{10} між підшипниками, підшипниковими щитами та доквіллям складається з трьох паралельно підключених опорів:

– ТО відбору тепла з торцевих поверхонь підшипникових щитів, що дотична до повітряної течії доквілля

$$R_{101} = \frac{1}{\alpha_{w2} \cdot \pi (D_a^2 - D_{sh}^2) \cdot (1 - \varepsilon_{kb})}; \quad (5.91)$$

– ТО відбору тепла з бокових міжреберних поверхонь підшипникових щитів

$$R_{102} = \frac{1}{2 \cdot \alpha_{w1} \cdot \pi \cdot D_j \cdot t_{brs}}; \quad (5.92)$$

– ТО R_{103} за відбору тепла незалежною системою охолодження підшипників та за відомого перевищення температури, визначаємо за (5.78) (якщо таке охолодження не передбачене то $R_{103} \rightarrow \infty$).

ТО R_{11} між зубцями осердя статора та довкіллям складається з двох ТО, включених послідовно:

$$R_{11} = R_{111} + R_{112}, \quad (5.93)$$

де

$$R_{111} = \frac{h_{sz}}{12\lambda_{ear}b_{sz}l_1Z} \quad (5.94)$$

– ТО зубця осердя статора в радіальному напрямі;

$$R_{112} = (\alpha_{w5} \cdot \pi D l_1)^{-1} \quad (5.95)$$

– ТО відбору тепла з поверхні розточки статора.

ТО R_{12} між бандажем ротора та довкіллям складається з двох послідовно з'єднаних опорів — ТО R_{121} бандажного кільця в радіальному напрямі та R_{122} відбору тепла з поверхні ротора:

$$R_{12} = R_{121} + R_{122}, \quad (5.96)$$

де

$$R_{121} = R_{Tb} \left[\frac{D_r^2}{D_r^2 - D_j^2} - \frac{0,5}{\ln\left(\frac{D_r}{D_j}\right)} \right]; \quad R_{Tbn} = \frac{\ln\left(\frac{D_r}{D_j}\right)}{2\pi l_1 \lambda_{eb}}; \quad (5.97)$$

$$R_{122} = \frac{1}{\alpha_{w3} \cdot [\pi \cdot D_r l_1 + \pi \cdot D_{sh} (l_{bm} - l_1)]}. \quad (5.98)$$

ТО R_{13} між ярмом осердя статора, станиною, підшипниковими щитами та підшипниками складається з чотирьох послідовно під'єднаних опорів:

$$R_{13} = R_{131} + R_{132} + R_{133} + R_{134}, \quad (5.99)$$

де

$$R_{131} = \frac{l_{bm} + t_{brs}}{\lambda_{frm} \pi (D_{bm}^2 - D_{fri}^2)} \quad (5.100)$$

– ТО станини в осьовому напрямі;

$$R_{132} = \frac{\ln\left(\frac{D_{fro}}{D_a}\right)}{4\pi \lambda_{frm} \cdot t_{brs}}. \quad (5.101)$$

– ТО зовнішньої частини підшипникового щита в радіальному напрямі;

$$R_{133} = \frac{0,5n_{kb}(D_a - D)}{\lambda_{frm} \cdot \pi(D_a - D)(1 - \varepsilon_{kb}) \cdot t_{brs}} \quad (5.102)$$

– ТО ребер у підшипникових щитах у радіальному напрямі;

$$R_{134} = R_{Tb} \left[\frac{D_j^2}{D_j^2 - D_{sh}^2} - \frac{0,5}{\ln\left(\frac{D_j}{D_{sh}}\right)} \right]; \quad R_{Tb} = \frac{\ln\left(\frac{D_j}{D_{sh}}\right)}{4\pi \lambda_{sh} \cdot t_{brs}} \quad (5.103)$$

– ТО внутрішньої частини підшипникового щита разом з підшипником у радіальному напрямі.

Система алгебричних рівнянь, корінь якої — шукані перевищення температур $\Delta T_s, \Delta T_w, \Delta T_z, \Delta T_a, \Delta T_r, \Delta T_j, \Delta T_b$, виглядає так

$$\begin{cases} (A_1 + A_2 + A_5)\Delta T_s - A_5\Delta T_w - A_2\Delta T_z - A_1\Delta T_a = P_s \\ -A_5\Delta T_s + (A_5 + A_6)\Delta T_w = P_w \\ -A_2\Delta T_s + (A_2 + A_3 + A_{11})\Delta T_z - A_3\Delta T_a = P_z \\ -A_1\Delta T_s - A_3\Delta T_z + (A_1 + A_3 + A_4 + A_{13})\Delta T_a - A_{13}\Delta T_b = P_a, \\ (A_8 + A_{12})\Delta T_r - A_8\Delta T_j = P_r \\ -A_8\Delta T_r + (A_8 + A_9)\Delta T_j - A_9\Delta T_b = P_j \\ -A_{13}\Delta T_a - A_9\Delta T_j + (A_9 + A_{10} + A_{13})\Delta T_b = P_j \end{cases} \quad (5.104)$$

де $A_i = R_i^{-1}$ ($i = \overline{1,13} \neq 7$) – відповідні теплові провідності ТЗС.

Абсолютні середні значення температури визначаємо за (5.80).

Тестова задача розв'язувалася двічі — з використанням тривимірної польової моделі та на підставі розробленої ТЗС.

Теплові опори, розраховані за методикою (5.82) – (5.103), становлять, К/Вт:

$$R_1 = 0,1793; R_2 = 0,01898; R_3 = 0,01343; R_4 = 0,04349; R_5 = 0,06963; R_6 = 0,09710; \\ R_8 = 0,1263; R_9 = 1,222; R_{10} = 0,2969; R_{11} = 0,1052; R_{12} = 0,1834; R_{13} = 0,5552.$$

Результати порівняння наведені в табл. 5.8.

Таблиця 5.8

Порівняльна характеристика результатів розрахунку

Середні значення абсолютної температури, °С:	Польовий підхід	Підхід на підставі ТЗС	Розбіжність, %
пазової частині обмотки статора, T_s	87,31	90,66	3,83
лобових частин обмотки статора, T_w	67,80	73,56	8,5
зубців осердя статора, T_z	87,55	91,64	4,67
ярма осердя статора, T_a	85,28	89,53	4,98
поверхні ротора, T_r	57,46	60,84	5,88
полюсів індуктора, T_j	65,78	71,41	8,55
підшипникових опор, T_b	70,87	75,89	7,08

Розбіжність результатів не перевищує 9%, що свідчить про задовільну точність розрахунку абсолютних температур машини з охолодженням ІС15 (16, 17).

5.7. Теплова заступна схема ВБПМ з системою каналного рідинного охолодження

Для розробки структури ТЗС ВБПМ, що відповідає способу охолодження ІСW37 (97) для каналної системи рідинного охолодження (рис. 5.3), створено математичну модель, за призначенням аналогічну до вже розглянутих у пп. 5.5, 5.6.

Вхідні дані для моделювання відображено в табл. 5.6.

На рис. 5.21 показано загальний вигляд і вигляд складових частин геометричної та скінченно-елементної моделі високошвидкісного генератора, номінальні дані якого вже фігурували у п. 5.5 (100 кВА, 30000 об/хв), але з рідинною системою охолодження. Загальна кількість вузлів СЕ моделі — 101077; кількість елементів — 501114.

На рис. 5.22 показано результати розрахунку температурних полів за такої

системи охолодження.

Якщо порівняти конструкції даної системи охолодження (рис. 5.3) з системою охолодження типу IC0145 (рис. 5.1), стає очевидною їх подібність. Детальне порівняння температурних полів цих систем, розгляд вірогідних шляхів розповсюдження теплових потоків та градієнта температури лише це підтверджує. Тому для аналізу теплового стану машини з системою рідинного каналного охолодження типу ICW37 (97) пропонуємо використовувати ТЗС, вже опрацьовану у п. 5.5 (рис. 5.15).

Отже, машина розглядається як сукупність семи тіл із внутрішнім тепловиділенням, що пов'язанні між собою відповідними тепловими опорами. У розрахунок значень цих опорів внесено певні корективи, що враховують особливості даної конструкції.

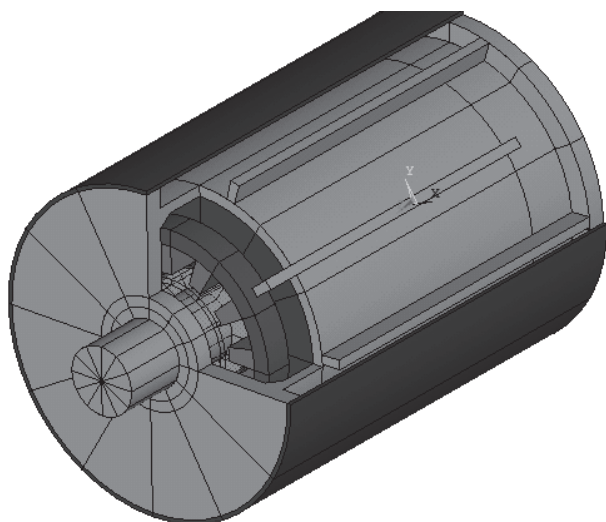
Зберігаючи вже запроваджену у п. 5.5 систему позначень для втрат та перевищень температури, розглянемо способи розрахунку теплових опорів цієї ТЗС.

Зауважимо лише, що розрахункова площа поверхні охолодження Z-подібного каналу в станині визначається за виразом

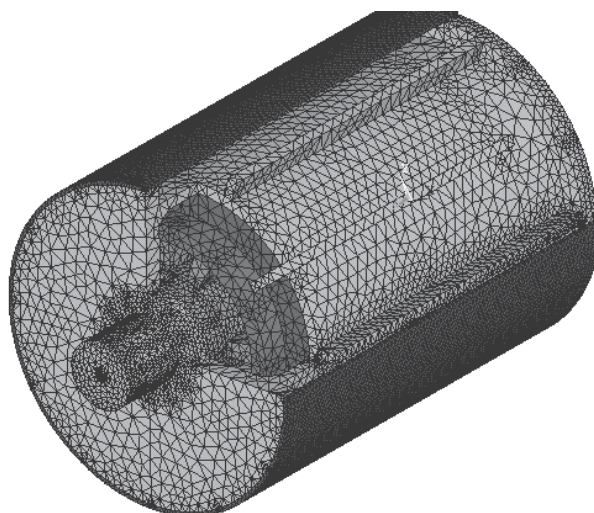
$$S_c = l_{bm}(\pi\varepsilon_k D_{bm} + 2h_k n_k). \quad (5.105)$$

Решта додаткових розмірів — за (5.51), (5.81).

а)



б)



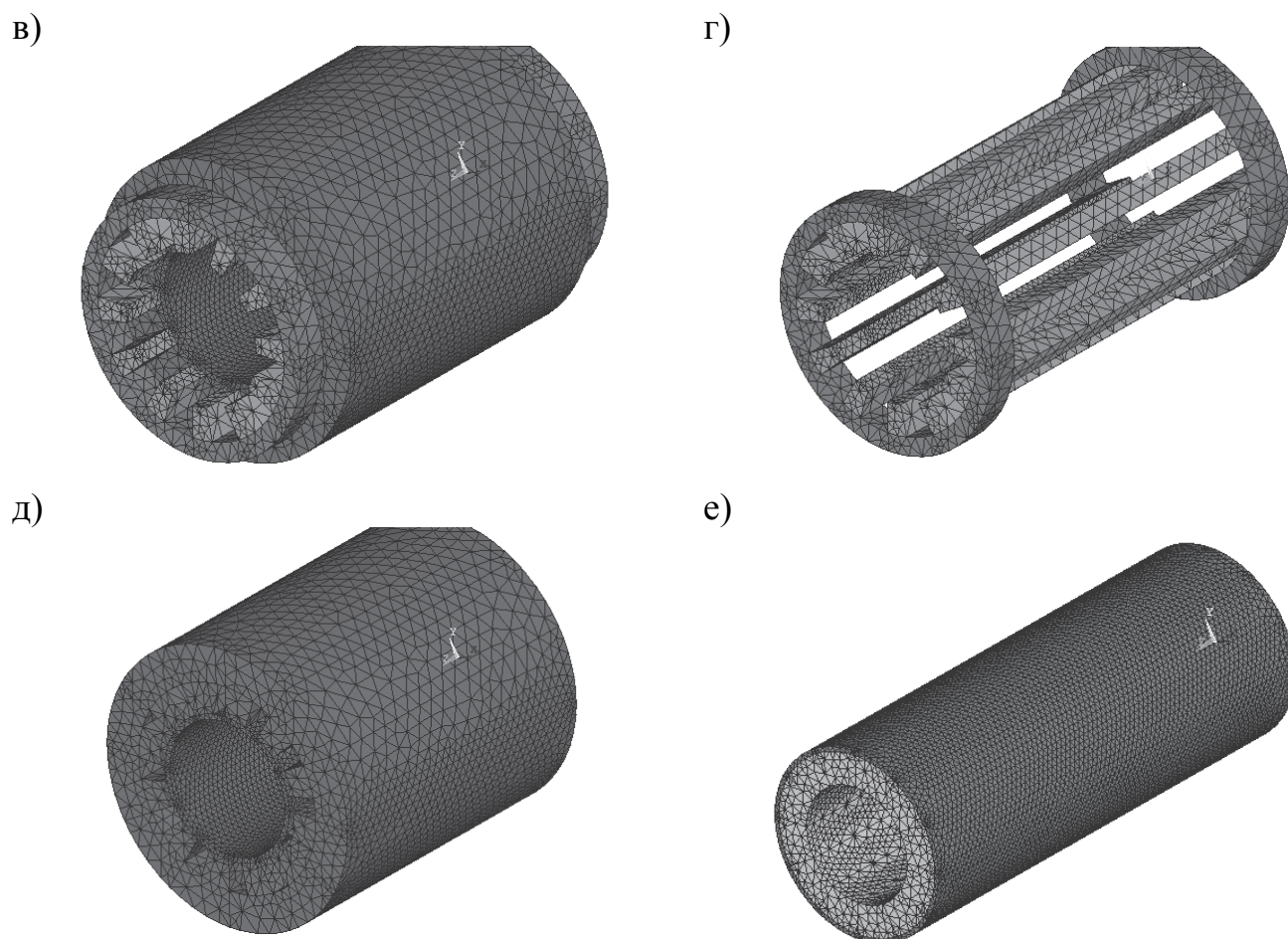
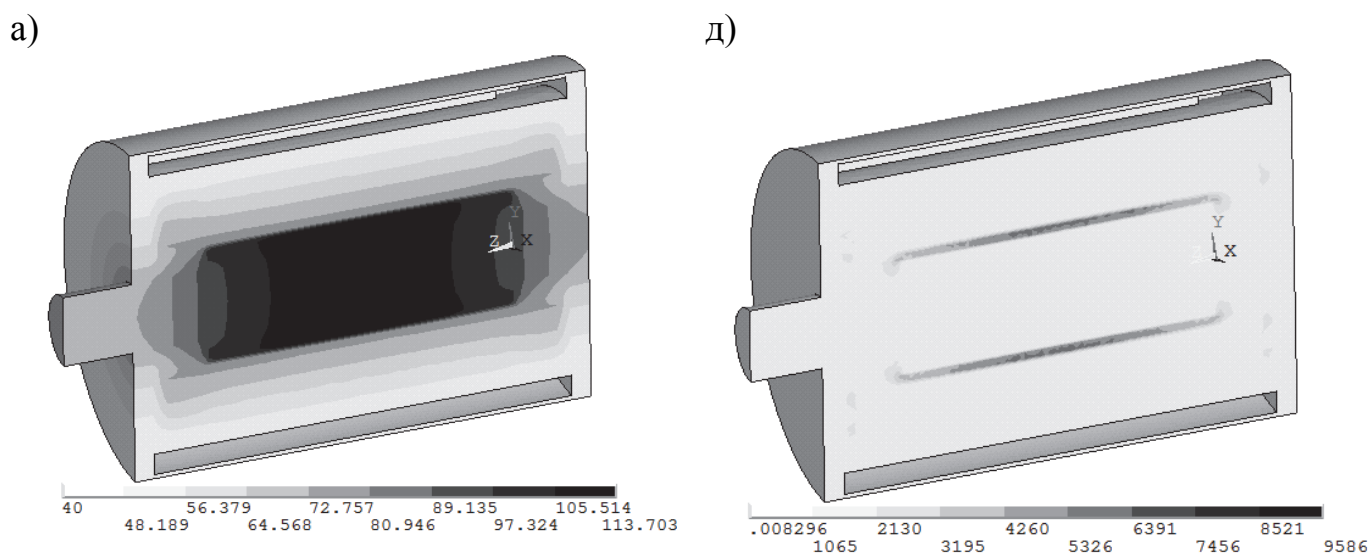


Рис. 5.21. Складові скінченно-елементної моделі ВБІМ

зі способом охолодження ICW47, ICW97 та Z-подібним каналом:

а) геометрична модель машини; б) скінченно-елементна модель машини.

Скінченно-елементні моделі: в) статора; г) обмотки статора; д) осердя статора; е) полюсної системи ротора (індуктора)



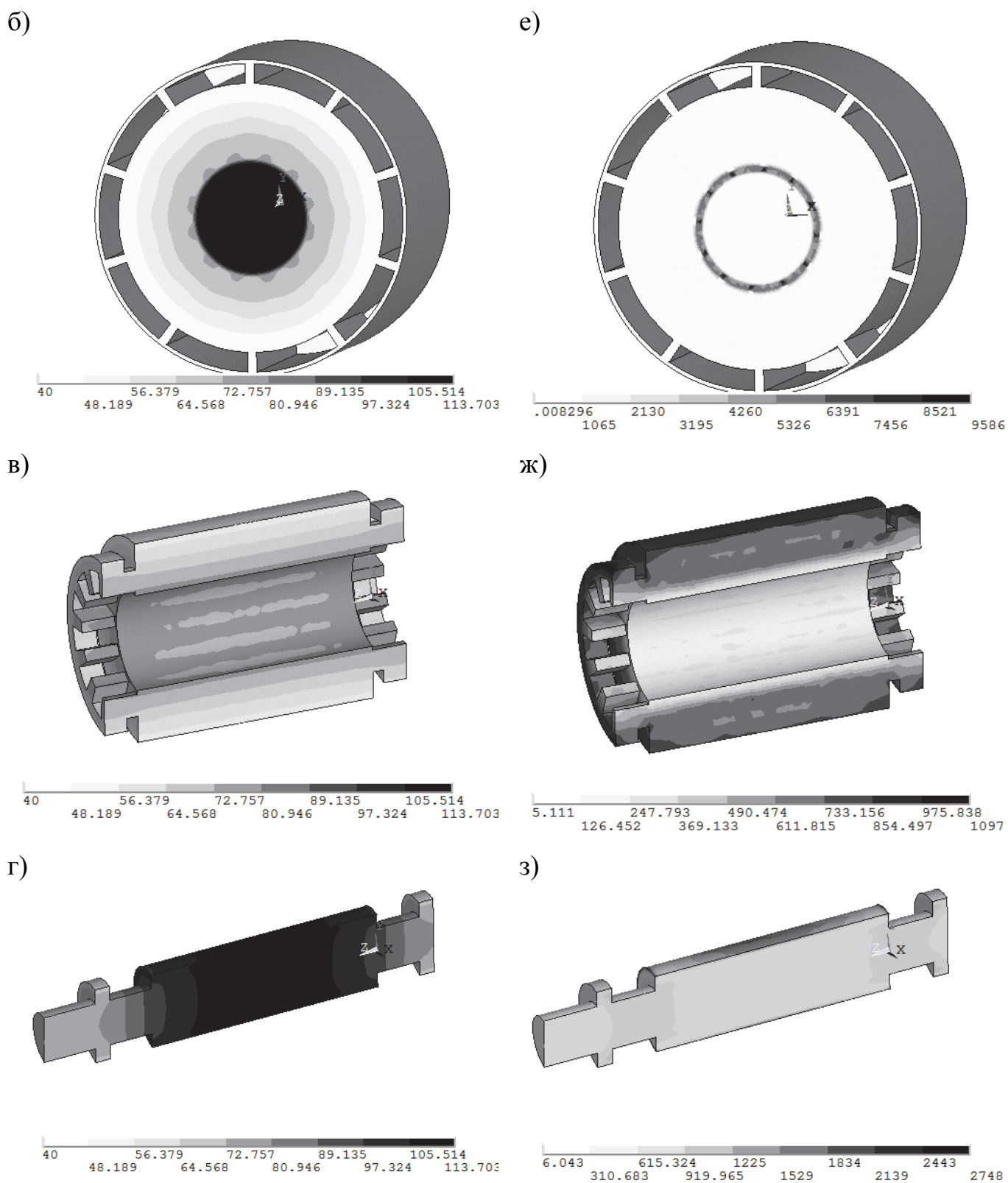


Рис. 5.22. Результати розрахунку поля температури, $^{\circ}\text{C}$ (а–г), та поля модуля вектора градієнта температури, K/m (д–з), у конструкційних елементах машини

Опори тепловим потокам між пазовою частиною обмотки та ярмом статора R_1 , пазовою частиною обмотки та зубцями статора R_2 , зубцями та ярмом статора R_3 , пазовою частиною обмотки статора та лобовими R_5 , статором та ротором R_7 та полюсами індуктора та бандажем R_8 , розраховуємо за формулами (5.52), (5.54), (5.56), (5.60), (5.68), (5.70), відповідно.

Опір R_4 в цьому випадку знаходиться на шляху теплового потоку між ярмом статора та рідким холодоагентом і визначається за (5.58), а його складову R_{42} – ТО відбору тепла з поверхні каналів станини — перепозначено як

$$R_{42} = \frac{l_{bm}}{\alpha_{w1} S_c l_1}. \quad (5.106)$$

Опір R_6 тепловому потоку між лобовими частинами обмотки статора, теплопровідним компаундом, станиною та рідким холодоагентом визначається за (5.61). Його складова $R_{61} = R_{61w} + R_{61a}$ — ТО лобової частини обмотки разом з компаундом в радіальному напрямі — тепер виглядає так:

$$R_{61w} = \frac{h_s}{12n_w \lambda_{ewr} b_s l_{\Sigma wo}}; \quad R_{61a} = \frac{0,25 \cdot (D_a - D - 2h_{sz})}{2\lambda_{cm} l_{wo} \pi \cdot D_{ai}}, \quad (5.107)$$

а R_{62} — ТО лобової частини обмотки разом з компаундом в аксіальному напрямі —

$$R_{62} = \frac{b_s}{12n_w \lambda_{ew\tau} h_s l_{\Sigma wo}}. \quad (5.108)$$

Опір R_{63} відповідає за відбір тепла з поверхні станини, навпроти лобових частин:

$$R_{63} = \frac{l_{bm}}{\alpha_{w1} S_c (l_{bm} - l_1)}. \quad (5.109)$$

Опір R_{64} — ТО відбору тепла з поверхні підшипникових щитів, навпроти лобових частин:

$$R_{64} = \frac{1}{0,5 \cdot \alpha_{fr} \pi D_a^2}. \quad (5.110)$$

Опір R_9 тепловому потоку між полюсами індуктора валом та підшипниками

визначаємо за (5.72). Його складова R_{92} — ТО вала в осьовому напрямі — за формулою

$$R_{92} = \frac{l_{bm} - l_1 - 2t_{brs}}{0,5\lambda_{sh}\pi D_{sh}^2}. \quad (5.111)$$

Решта складових R_9 не змінюються.

Опір R_{10} тепловому потоку між підшипниками, корпусними деталями та довкіллям розраховуємо за (5.74). Складові R_{10t} та R_{10b} , враховуючи відсутність зовнішнього обдування та особливості конструкції підшипникових щитів, визначаємо як

$$R_{10t} = \frac{1}{0,25\pi D_a^2 \alpha_{fr}}; \quad R_{10b} = \frac{1}{0,04\alpha_{w1}\pi D_{bm} h_k}. \quad (5.112)$$

Теплові опори, розраховані за описаною методикою, становлять, К/Вт:

$$R_1 = 0,1793; \quad R_2 = 0,01898; \quad R_3 = 0,01343; \quad R_4 = 9,295 \cdot 10^{-3}; \quad R_5 = 0,06963; \\ R_6 = 0,3446; \quad R_7 = 0,7807; \quad R_8 = 0,1259; \quad R_9 = 0,8342; \quad R_{10} = 0,2604.$$

Формування матриці коефіцієнтів та стовпця правих частин здійснюємо за (5.79).

Результати розрахунку середніх значень температур з використанням польової моделі та на підставі ТЗС наведені в табл. 5.9.

Таблиця 5.9

Порівняльна характеристика результатів розрахунку

Середні значення абсолютної температури, °С:	Польовий підхід	Підхід на підставі ТЗС	Розбіжність, %
пазової частині обмотки статора, T_s	77.94	72.52	6.94
лобових частин обмотки статора, T_w	71.28	72.85	2.20
зубців осердя статора, T_z	78.83	70.15	11.0
ярма осердя статора, T_a	62.22	58.26	6.36
поверхні ротора, T_r	113.2	116.9	3.35
полюсів індуктора, T_j	113.6	120.8	6.31
підшипникових опор, T_b	73.57	79.06	7.46

Розбіжність результатів не перевищує 11%, що свідчить на користь обраної структури ТЗС та методики розрахунку її параметрів.

Висновки до розділу

1. Заміна обмотки якоря та осердя статора гомогенними анізотропними в тепловому відношенні тілами робить можливим істотне зменшення розмірності задачі розрахунку температурного поля практично без втрати точності.

2. Еквівалентні коефіцієнти теплопровідності, за умови допущення про одновимірний характер розповсюдження тепла в ВБПМ, що використовуються для розрахунку параметрів теплових заступних схем, забезпечують прийнятну точність розрахунку середніх значень температур її активних частин.

3. Правомірність способу обчислення еквівалентних коефіцієнтів теплопровідності пазової та лобової частин обмотки якоря ВБПМ підтверджується порівняльним аналізом результатів розрахунку теплового поля у тривимірній постановці.

4. На підставі порівняльного аналізу результатів розрахунку середніх значень температур складових частин машини з примусовим повітряним та рідинним охолодженням з використанням ТЗС та МСЕ виявлено, що розбіжність результатів для системи охолодження IC0145 (0146, 0147) не перевищує 14%; IC15 (16,17) — 9%; ICW37 (97) — 11%. Це свідчить на користь вірно обраних структур ТЗС, що адекватно відображають найбільш вірогідні шляхи розповсюдження теплових потоків. Методи розрахунку ТО, що ґрунтуються на аналітичних розв'язках рівняння теплопровідності забезпечують задовільну точність оцінки теплового стану ВБПМ.

5. Система охолодження типу IC0145 (0146, 0147) забезпечує середній коефіцієнт тепловіддачі на рівні $60 \div 80 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}$; система IC15 (16,17) — $110 \div 140 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}$; ICW47 (97) — $80 \div 110 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}$. Це підтверджує їх потенційну здатність забезпечувати ефективне тепловідведення та дає право рекомендувати їх для застосування у ВБПМ.

6. Зниження температури обмотки за рахунок розвинутої поверхні охолодження лобових частин вимагає видовження вала, що знижує його жорскість та негативно впливає на вібраційну надійність машини.

7. Системи рідинного охолодження порівняно ефективніше знижують температуру статора, що, в свою чергу, дає можливість підняти густину струму в обмотці й зменшити розміри машини. З іншого боку, температура ротора слабо залежить від обраного способу охолодження.

8. Застосування теплопровідного компаунду для заповнення порожнин у лобових частинах, дає змогу знизити температуру обмотки статора.

9. Система охолодження з Z-подібним каналом більш технологічна у виготовленні порівняно з системою зі спіральним каналом. Проте вона спричиняє нерівномірний нагрів станини у тангенціальному напрямі, і, як наслідок, її теплову деформацію та можливе порушення співвісності підшипникових опор. За використання прецизійних підшипників кочення це, ймовірно, викликатиме їх надлишковий нагрів та зменшення ресурсу. Дана обставина свідчить про певну перевагу конструкції зі спіральним каналом.

РОЗДІЛ 6.

ВЕРИФІКАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

Оцінка адекватності математичних моделей розроблених на основі МСЕ та методики первинного проектування ВБПМ здійснена порівнянням результатів, отриманих розрахунковими та експериментальними методами.

Результати фізичних експериментів відібрані під час проведення лабораторних випробувань двох дослідних зрізів ВБПМ, що розроблялися автором у СКБ «Електромеханічні системи» Національного університету «Львівська політехніка» на замовлення одного підприємства. Також експериментальний матеріал запозичувався з низки публікацій у періодичних наукових виданнях.

На підставі вхідної інформації про конкретні ВБПМ, отриманої з конструкторської документації або наведеної у відкритих публікаціях, здійснювалися розрахунки режимних величин досліджуваних машин та їх порівняння з відповідними експериментальними значеннями.

Результати, отримані розрахунковим шляхом, за необхідності, піддавалися математичній обробці, а порівнянню підлягали вже детерміновані значення інтегральних показників режиму роботи машин, наприклад, такі: напруги, струми, потужності (втрати), температури тощо. Розподілені в просторі або, іншими словами, польові характеристики — вектор напруженості магнітного поля, вектор магнітної індукції, вектор густини струму, градієнт температури та ін., за нагоди публікування їх графічних інтерпретацій, порівнювалися більше на якісному, ніж на кількісному рівні.

6.1. Генератор (97 кВт, 24000 об/хв)

Першим розглянемо експериментальний зріз вискошвидкісного генератора номінальною потужністю 97 кВт, розрахованого на частоту обертання 24000 об/хв, який створювався за безпосередньої участі автора в рамках госпдоговору № 0280 від 02.03.2009 з НВО «Эрга» (Росія, м. Калуга). Ця машина

входить до складу турбодетандерного автономного енергоагрегату, що утилізує енергію стисненого газу або пари.

Загальний вигляд конструкції показаний на рис. 6.1, фотографії фрагментів обмотаного осердя статора — рис. 6.2. Інформація про розміри, обмоткові дані та використані активні матеріали міститься у табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Вхідна інформація про дослідний взірець

Назва показника	Його значення
Зовнішній діаметр осердя статора, мм	190
Довжина осердя, мм	220
Зовнішній діаметр ротора, мм	87
Фактичне значення повітряного проміжку, мм	0,8
Величина робочого повітряного проміжку, мм	2,0
Повна висота паза статота, мм	20
Відкриття паза статора, мм	14
Кількість пазів на статорі	6
Кількість витків у фазі	8
Матеріал осердя статора	Ст.2421
Товщина полюса ротора (тах), мм	14
Коефіцієнт полюсного перекриття	0,85
Кількість полюсів	4
Матеріал полюсів	SmCo
Залишкова індукція, Тл	1,07
Коерцитивна сила, кА/м	767
Способи охолодження: статора	рідинне
ротора	повітряне

Експериментальні дослідження проводилися на матеріально-технічній базі НВО «Эрга», з метою визначення фазної напруги даного генератора на неробочому ході та під навантаженням. Випробувальне обладнання складалося з привідного двигуна, з можливістю регулювання його частоти обертання до 14000 об/хв, трифазного випрямляча (за мостовою схемою), навантажувального реостата та контрольно-вимірювальних приладів.

Результати порівняння експериментально вимірних значень фазної напруги досліджуваного генератора та їх порівняння з розрахунковими, отриманими на підставі колового методу (п. 3.1) та FEM-аналізу (п. 2.2), представлені у табл. 6.2.

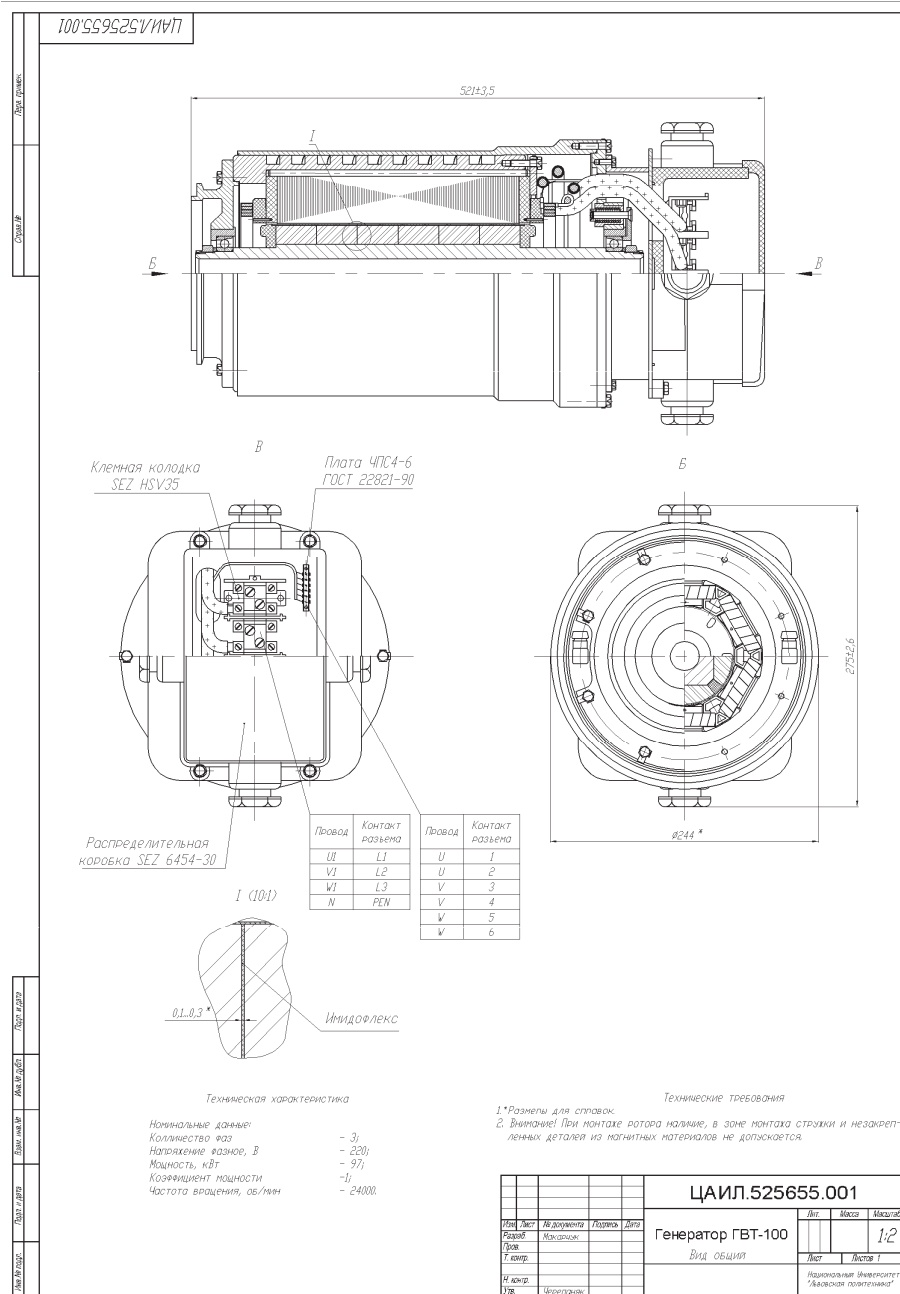


Рис. 6.1. Креслення загального виду генератора

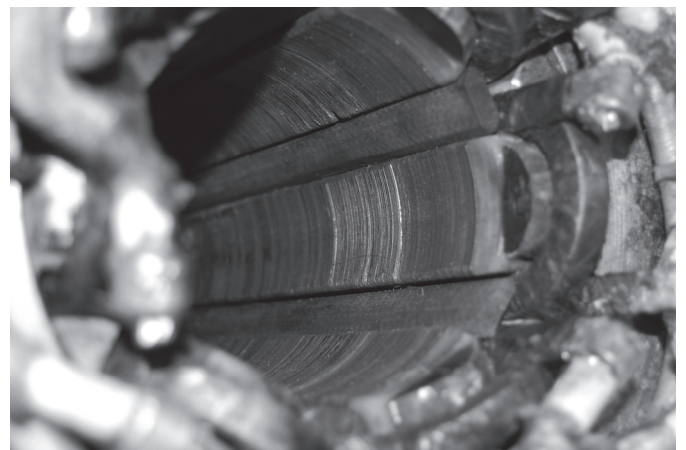


Рис. 6.2. Експериментальний взірець статора генератора

Порівняння показників електричного режиму генератора

Експеримент			Розрахунок фазної напруги			
Частота обертання, об/хв	Фазний струм, А	Фазна напруга, В	Метод п. 3.1	Розбіжність, %	ФЕМ-аналіз, п. 2.2	Розбіжність, %
2950	0	24,6	23,58	4,1	24,81	0,9
2850	96,2	23,9	22,10	7,5	22,55	5,6
6210	0	48,0	49,77	3,7	49,42	2,9
13800	0	108	110,5	2,3	109,7	1,6

Діючі значення фазних напруг та струмів вимірювалися в генераторному режимі за включення обмоток у “У”. Коефіцієнт потужності навантаження становив $\cos \varphi = 1$.

Отримані розбіжності у значеннях напруг, виміряних експериментально та розрахованих за вказаними методами, підтверджують правомірність останніх та можуть пояснюватися як недосконалістю розрахункових методів, так і похибками вимірювання.

6.2. Генератор-двигун (10 кВт, 70000 об/хв)

Дослідний взірець ВБПМ в генераторному режимі розрахований на корисну потужність 10 кВт за частоти обертання 70000 об/хв, використовується в складі гібридного турбокомпресора, що планується встановлювати на серійні дизельні двигуни марки ЯМЗ 7511 (госпдоговір №0280, доп. угода від 28.01.2010 з НВО «Эрга» (Росія, м. Калуга)).

Мета розробки сімейства гібридних турбоелектрокомпресорів для поршньових двигунів, що використовуються в транспортних і стаціонарних засобах, згідно ТЗ, полягає в наступному:

«...уменьшение эксплуатационных расходов и снижение экологической нагрузки на природу и утомляемость оператора при выполнении поставленной ему транспортно-технологической задачи в условиях использования электронных средств регулирования и навигации...»

Нами запропоновано машину, основні розміри якої, обмоткові дані та марки використаних активних матеріалів наведені у табл. 6.3. Загальний вигляд конструкції турбоелектрокомпресора показаний на рис. 6.3.

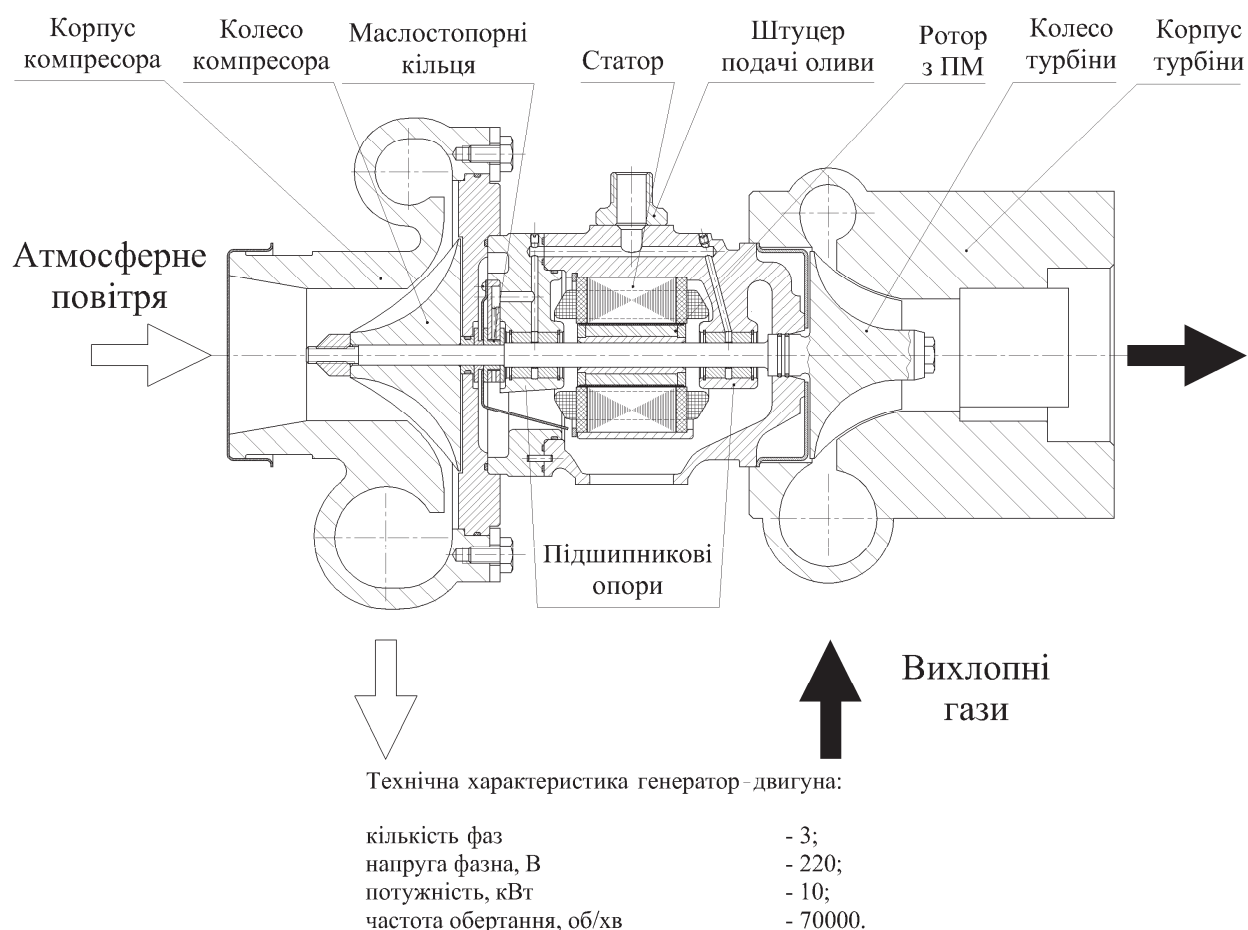


Рис. 6.3. Загальний вид гібридного турбоелектрокомпресора

Таблиця 6.3

Вхідна інформація про дослідний взірець

Назва показника	Його значення
Зовнішній діаметр осердя статора, мм	75
Довжина осердя, мм	44
Зовнішній діаметр ротора, мм	29,5
Фактичне значення повітряного проміжку, мм	0,5
Величина робочого повітряного проміжку, мм	1
Повна висота паза статора, мм	15,5
Відкриття паза статора, мм	2
Кількість пазів на статорі	6
Кількість витків у фазі	48
Матеріал осердя статора	Ст.2421
Товщина полюса ротора (max), мм	3,5
Коефіцієнт полюсного перекриття	0,8
Кількість полюсів	4
Матеріал полюсів	NdFeB
Залишкова індукція, Тл	1,1
Коерцитивна сила, кА/м	900
Спосіб охолодження	рідинний

Експериментальні дослідження проводилися на матеріально-технічній базі НПО «Турботехника» (Росія, м. Протвіно). Мета випробувань — визначення напруги дослідного взірця в генераторному режимі під навантаженням. Як і у випадку дослідів п. 6.1, обмотка якоря сполучалася у “Y”, коефіцієнт потужності навантаження становив $\cos \varphi = 1$.

Порівняння результатів фізичних та математичних експериментів наведено в табл. 6.4.

Таблиця 6.4

Порівняння показників електричного режиму генератора

Експеримент			Розрахунок фазної напруги			
Частота обертання, об/хв	Фазний струм, А	Фазна напруга, В	Метод п. 3.1	Розбіжність, %	ФЕМ-аналіз, п. 2.2	Розбіжність, %
12000	0	41,2	45,64	10,8	38,77	5,9
20000	0	67,0	76,05	13,5	64,62	3,6
45360	5,6	209	168,7	19,3	-	-
44700	8,5	162	161,6	0,2	132,47	18,2
49680	8,1	227	180,6	20,4	-	-
57270	6,9	262	210,9	19,5	-	-
55860	10,9	215	195,4	9,1	-	-
54330	15,1	170	173,9	2,3	160,84	5,4
62370	10,2	228	220,6	3,2	-	-
62070	14,0	180	204,3	13,5	182,8	1,6

Обидва розрахункових підходи показують задовільну точність в обчисленні напруги як під навантаженням, так і за неробочого ходу. Проведення вимірювань здійснювалося за різної температури нагріву машини. Саме цією обставиною пояснюються найбільші серед отриманих значення розбіжностей.

6.3. Генератор (110 кВт, 70000 об/хв)

Експериментальний взірець ВБПМ номінальною потужністю 110 кВт, розрахований на частоту обертання 70000 об/хв працює в складі мінікогенераційної установки. Його дослідженням присвячено три роботи [167-169].

На рис. 6.4 наведено фотокопії матеріалів з цих публікацій. Вони містять інформацію про розміри та властивості матеріалів дослідної машини та виміряні експериментально значення втрат і температур у її різних ділянках.

a)

Stator core outer diameter	135 mm
Stator core length	160 mm
Rotor outer diameter	66 mm
Rated voltage	500 V
Rated speed	70000 rpm
Rated power	110 kW

б)

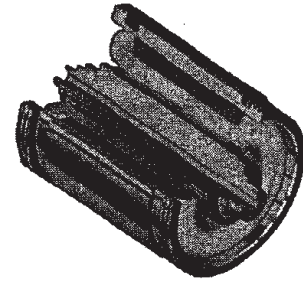


Fig. 2. Cut-away view of the generator

в)

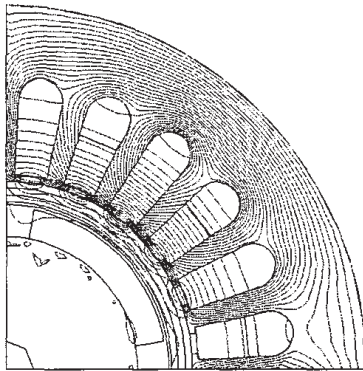


Fig. 5. Field lines for harmonic current of 28 kHz

г)

Losses (Watts)	No-load	Generator operation	Motor operation
	Test 1	Test 2	Test 3
Air friction	1060	1060	1060
Iron	1140	820	1370
I ² R	0	740	440
Rotor, stray	0	0	120
Total losses	2200	2620	2990
Measured	2200	2660	2970
Load	0	85300	79700
Efficiency	0	0.970	0.964

д)

Part/material	Heat conduction coefficient (W/mK)
End shields	57
Stator cooling jacket	150
Stator core – radial	28
Stator core – axial	0.37
Stator winding - Cu	395
Winding insulation	0.2
Stator slot wedge	1
Rotor shaft	51
Permanent magnets	8.5
Pole separator	51
Rotor bandage - CF	0.61
Bearings	50

е)

Location	No-load	Generator operation
		85.3 kW
Winding max	66 (64)	119 (119)
Winding min	51 (49)	64 (65)
PM max	98	108
PM mean	90	94
Air in	53 (53)	49 (49)
Air gap	119 (123)	130 (131)
Air out	89 (78)	100 (92)

Рис. 6.4. Копії фрагментів публікацій: а) головні розміри та номінальні дані [167];
 б) геометрична модель машини [167]; в) поперечний переріз активної частини
 разом з силовими лініями поля розсіювання (зубцева гармоніка) [168];
 г) розрахункові та експериментальні значення втрат у машині [168];
 д) коефіцієнти теплопровідності матеріалів та конструкційних елементів [169];
 е) розрахункові та експериментальні значення температур [169]

Для систематизації вхідних даних та з метою їх упорядкування, вони зведені у табл. 6.5.

Таблиця 6.5

Вхідна інформація про дослідний взірець

Назва показника	Його значення	Джерело інформації
Зовнішній діаметр осердя статора, мм	135	[167,168]
Довжина осердя, мм	160	[167,168]
Зовнішній діаметр ротора, мм	66	[167,168]
Фактичне значення повітряного проміжку, мм	0,5	[167,168]
Величина робочого повітряного проміжку, мм	4,0	[168]*
Повна висота паза статота, мм	20	[168]*
Ширина шліца паза статора, мм	3	[168]*
Висота шліца паза статора, мм	1	[168]*
Кількість пазів на статорі	24	[168]
Матеріал обмотки статора	ліцендрат	[167]
Товщина полюса ротора, мм	5	[168]*
Коефіцієнт полюсного перекриття	0,75	[168]*
Кількість полюсів	4	[168]
Матеріал полюсів	NdFeB	[168]
Способи охолодження: статора	водяне	[169]
ротора	повітряне	[169]
підшипників	масляне	[169]
Коефіцієнти теплопровідності, Вт/м·К:		
- підшипникових щитів	57	[169]
- «сорочки» охолодження статора	150	[169]
- осердя статора в радіальному напрямі	28	[169]
- осердя статора в аксіальному напрямі	0,37	[169]
- обмотки статора	395	[169]
- ізоляції обмотки статора	0,2	[169]
- пазового клина	1,0	[169]
- матеріалу вала ротора	51	[169]
- матеріалу полюсів з ПМ	8,5	[169]
- полюсного сепаратора	51	[169]
- бандажа ротора	0,61	[169]
- підшипників	50	[169]
Коефіцієнти тепловіддачі, Вт/м ² К:		
- з поверхні «сорочки» охолодження статора	3500	[169]
- з поверхні лобових частин обмотки статора	50	[169]
Температура повітря на вході у вентиляційну систему, °С	49	[169]

Примітка. *Визначено наближено, на підставі рис. 6.4, в

Незважаючи на доволі обмежений набір вхідних даних, вдалося поповнити нестачу інформації (магнітні властивості матеріалу полюсів, обмоткові дані, тощо),

спираючись на значення номінальної напруги живлення. Вона, як стверджується у [167], становить 500 В постійного струму. Отже, діюче значення фазної напруги в генераторному режимі за включення обмоток у “Y” вважалося відомим — $500/2,34 = 213,7$ В. Значення втрат у обмотці статора на постійному струмі [167, 168] дали змогу судити про її розміри та розміри її складових частин.

З використанням методики п. 3.1, 3.2 та моделі п. 2.2 розраховувався режим, що відповідає роботі машини як генератора за навантаження 85,3 кВт. Коефіцієнт потужності становив $\cos\varphi = 1$, а частота обертання — 70000 об/хв. Порівняння отриманих розрахункових результатів з опублікованими експериментальними та величини їх розбіжностей наведено в у табл. 6.6.

Таблиця 6.6

Порівняння показників електричного режиму генератора

Назва показника	За даними [167-169]	Методика п. 3.1, 3.2	Розбіжність, %	FEM-аналіз, п. 2.2	Розбіжність, %
Номінальна фазна напруга, В	213,7	210,0	1,7	217,6	1,8
Втрати на аеродинам. тертя, Вт	1060	638,5	40	—	—
Втрати в сталі, Вт	820	1049,8	28	—	—
Втрати в міді DC, Вт	740	679,8	8,1	679,8	8,1
Втрати в міді AC, Вт	—	1423	—	2155	—
Повні втрати, Вт	2660	3111	17	—	—
ККД	0,970	0,9571	1,3	—	—

На рис. 6.5, а показано залежності від часу фазних ЕРС генератора під навантаженням, розрахованих з використанням FEM-аналізу (п. 2.2), а на рис. 6.5, б — двовимірний розподіл вектора густини струму у пазовій частині 2-шарової обмотки, виготовленої з ліцендрату, що містить по 154 елементарних провідники в кожному шарі.

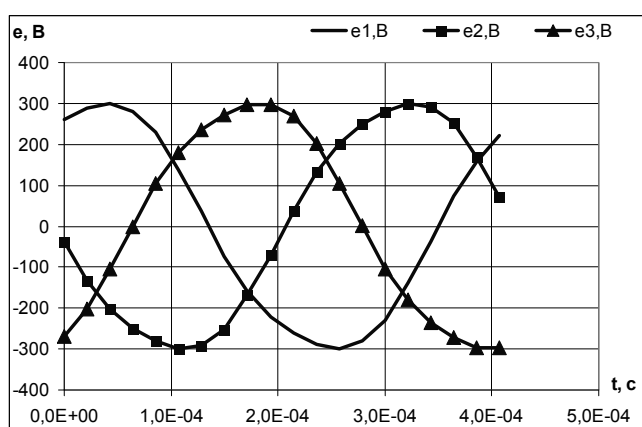
Цей розрахунок та розрахунок втрат в обмотці з урахуванням витіснення струму здійснено на моделі, що описана у п. 3.2.1.

Істотні розбіжності з експериментальними даними у величинах втрат, спричинених аеродинамічним тертям ротора (40%), та втратами в сталі (28%), на нашу думку, викликані відсутністю інформації про методику проведення фізичних

вимірювань. Тому дозволимо собі певні здогади, які можуть пояснювати такі розбіжності.

За проведення експерименту практично неможливо відокремити втрати на аеродинамічне тертя ротора від втрат на тертя у підшипникових опорах. Якщо припустити, що експериментальне значення аеродинамічних втрат (1060 Вт) [168] містить в собі частку втрат у підшипниках, тоді розходження значень пояснюватиметься тим, що ці втрати, обчислені за п. 3.2.3, такої частки не містять.

а)



б)

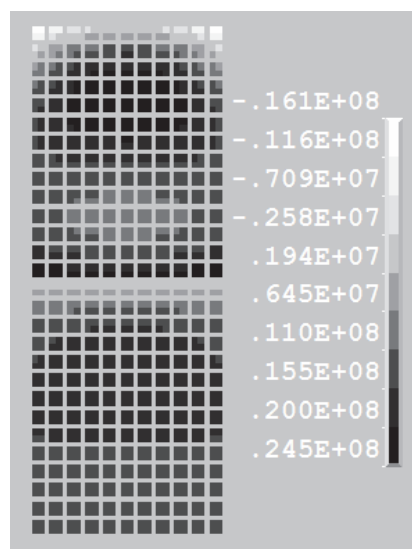


Рис. 6.5. Результати розрахунків а) форма фазних ЕРС під навантаженням, В;
б) розподіл вектора густини струму в пазовій частині обмотки, А/м²

Для довідки зазначимо, розрахункове значення втрат на тертя у підшипниках, на підставі методики п. 3.2.3 складає 598 Вт. Якщо наше припущення вірне, то розходження становитиме лише 17%, що цілком відповідає рівню, який, у принципі, здатна забезпечити теорія подібності [71,95].

Схожа ситуація й з розбіжністю значення втрат у сталі. Розрахункова методика для їх визначення потребує величини питомих втрат у матеріалі осердя статора за нормованих значень індукції, частоти перемагнічування та товщини листів. Відсутність такої інформації у матеріалах [167-169] вимусила нас скористатися даними, що відповідають електротехнічній сталі 2413 (ГОСТ 21427.2), а саме — питомі втрати приймалися рівними 8,5 Вт/кг за індукції 1,0 Тл, частоти

400 Гц та товщини листа 0,28 мм. Очевидно, що автори [167-169] використовували інший матеріал, чим і можна пояснити розбіжність у 28%.

Також, на підставі [168] можна припустити, що значення повних втрат отримано як сума складових, до яких входять втрати в обмотці статора, виміряні на постійному струмі. Іншими словами є підстави гадати, що втрати в обмотці статора визначені без урахування ефекту витіснення струму. Якщо штучно зробити те саме, використовуючи методику п. 3.2, величина повних втрат становитиме 2368 Вт, а розходження з експериментом зменшиться до 11%.

Кількісне порівняння показників теплового стану даної машини на підставі методики, що використовує ТЗС, та FEM-аналізу (п. 5.6) з експериментальними даними наведено у табл. 6.7.

Таблиця 6.7

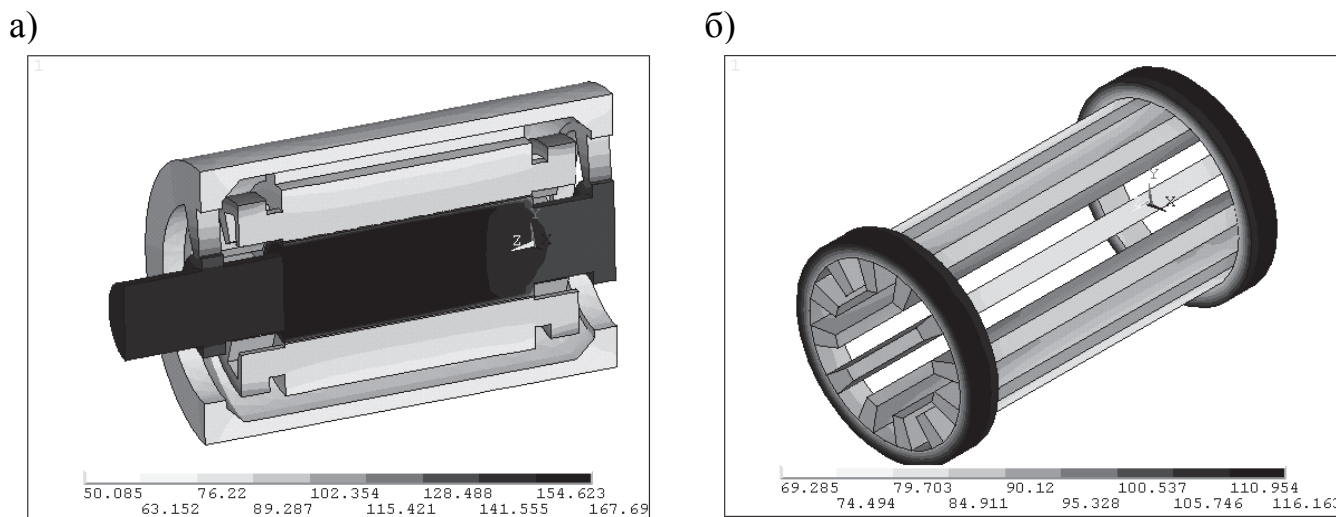
Порівняння показників теплового режиму генератора

Назва показника	За даними [167-169]	ТЗС п. 5.6	Розбіжність, %	FEM-аналіз, п. 5.6	Розбіжність, %
Температура обмотки статора max, °C	119	97,69	6,2*	116,2	2,4
Температура обмотки статора min, °C	65			69,2	6,5
Температура повітря у робочому проміжку середня, °C	131	149,3	14	142,4	8,7

Примітка. *Розбіжність визначалася по відношенню до середнього значення температури обмотки $(119+65)/2=92$ °C

На рис. 6.6 у вигляді растрових зображень показано розподіл температурного поля генератора за розрахункового навантаження. Ці результати отримані на моделі, про яку йдеться у п. 5.6.

Отримані розбіжності у значеннях температур пояснюються, з одного боку, допущеннями покладеними в основу розрахункових методик та неповною інформацією щодо об'єкту дослідження, а з іншого — похибкою застосованого калориметричного методу вимірювання втрат, про який згадують автори [167-169].



*Рис. 6.6. Результати розрахунків поля температури, °С:
а) в осьовому перерізі генератора; б) в обмотці статора*

6.4. Двигун (15 кВт, 120000 об/хв)

Наступним розглянемо високошвидкісний двигун приводу турбокомпресора потужністю 15 кВт частотою обертання 120000 об/хв. Робота [221], в якій розглядаються аспекти проектування цієї машини, зацікавила нас не лише експериментальними дослідженнями електромеханічних параметрів — напруги, струму, втрат потужності, частоти обертання, і т.п., а й наявністю даних про розрахункові дослідження критичних частот обертання ротора, що підтверджені експериментально.

Фрагменти з публікації [221] наведено на рис. 6.7. Дані, що мають відношення до проектних параметрів машини, занесено в табл. 6.8. На основі цих матеріалів й беручи до уваги напрацьовані рекомендації та власний досвід проектування, сформовано повний набір вхідної інформації для проведення порівняльного аналізу.

Особливістю проведення експерименту є те, що живлення двигуна здійснювалося від перетворювача частоти на виході якого утворювалася трифазна система синусоїдальних напруг. Позиційного зворотного зв'язку з системою керування дана машина не мала.

Для мінімізації потенційних розбіжностей, що проявлятимуться у результаті порівняння, цю особливість необхідно врахувати, адже розроблена методика

проектного розрахунку не передбачає такого режиму для двигунів.

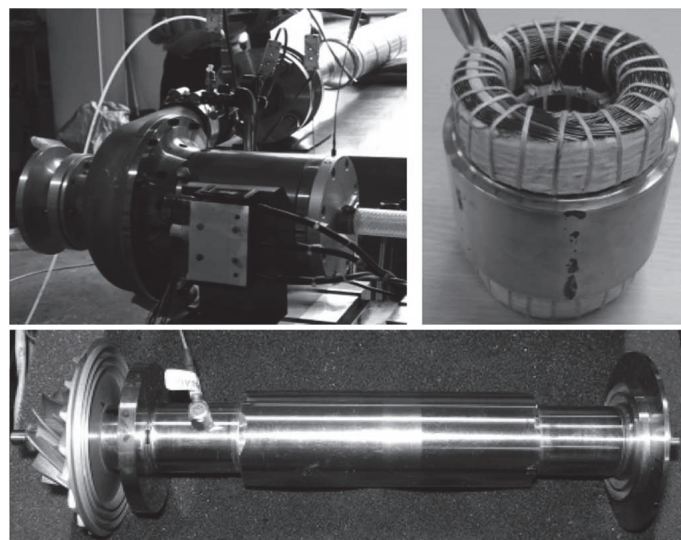
Вирішено розрахункове підтвердження проектних параметрів, наведених на рис. 6.7, в, здійснювати на підставі алгоритму, призначеного для розрахунку генераторів (п. 3.1, 3.2), який передбачає наявність синусного живлення.

а)

TABLE I
PROPOSED 3-PHASE PMSM DIMENSIONS

Item	Value	Unit
Pole / Slot	2/12	-
Stator outer diameter	120	mm
Stator inner diameter	35	mm
Yoke width, Teeth width	10	mm
Slot opening	3	mm
Stator core material	20PNF1500 (0.2t)	-
Airgap	1	mm
Current density	3.9	A/mm ²
Rotor outer diameter	34	mm
Magnet outer diameter	25	mm
PM material	Sm ₂ Co ₁₇	-
Rotor retainer material	Inconel 718	-
Winding type	Wye, distributed winding	-
Turn/phase, ϕ 3.0	18T/phase	Turn
Resistance	35	m Ω
Inductance	Ls : 0.06365/Lm : 0.00784	mH
Stack length	50	mm

б)



в)

TABLE IV
COMPARISON DESIGN AND TEST RESULT OF THE DEVELOPED PROTOTYPE

Item	Goal	Design (simulation)	Measure (experiment)	Unit
V _{phRMS}	230	242.5	263.5	V _{RMS}
I _{phRMS}	39	37.5	31.63	A _{RMS}
Input power	16.13	15.75	16.75	W
Rated torque(Nm)	1.19	1.1902	1.23	Nm
Rated speed(rpm)	120,000	120,000	120,000	Rpm
Rated output(kW)	15	14.96	15.46	kW
Efficiency	93	95	92.3	%
Core loss in stator	-	124	-	W
Eddy current loss in rotor	-	150	-	W
Copper loss	-	520	-	W
Total loss	1,130	794	1,290	W

г)

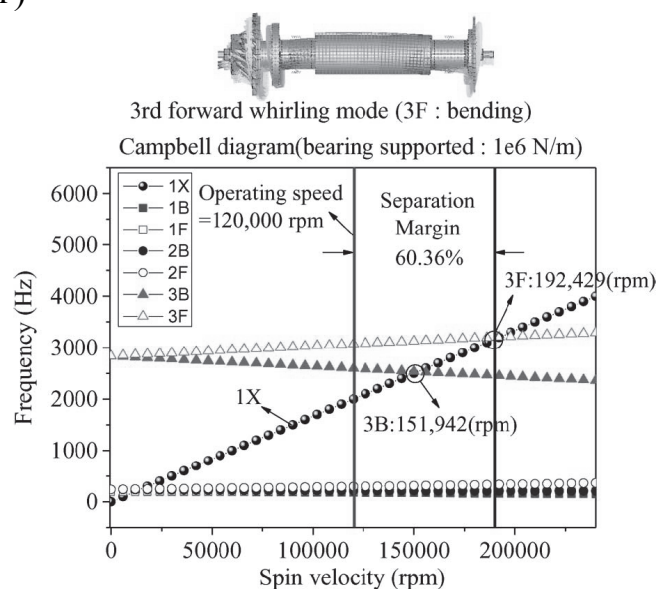


Fig. 7. Campbell diagram (sleeve thickness: 4.5 mm).

Рис. 6.7. Копії фрагментів публікації [221]: а) розміри, матеріали та обмоткові дані; б) експериментальний взірець двигуна та його складові; в) розрахункові та експериментальні параметри машини; г) діаграма Кемпбела для ротора двигуна разом з турбіною

Такий розрахунок проводився для сталої частоти обертання 120000 об/хв та корисній потужності 15,46 кВт, що відповідає експериментальному значенню (рис. 6.7, в). Отримані результати та розбіжності зведені у табл. 6.9.

Для можливості коректного порівняння значень критичних частот обертання створено математичну модель, що враховує додаткові конструкційні елементи, які розташовано на валу ротора. Її алгоритм аналогічний описаному в п. 4.3.

Безпосереднє порівняння розрахункових значень критичних частот (див. табл. 6.10), а точніше, величини їх відхилень, можуть пояснюватися тим, що автори [221] оперували скінченно-елементною моделлю ротора, деталізація якої враховує фізичні властивості матеріалів усіх його складових частин. З тексту статті зрозуміло, що полюсна система ротора охоплена металевим бандажем, на валу встановлені п'ята опорного підшипника, турбіна та інші конструкційні елементи.

Таблиця 6.8

Вхідна інформація про дослідний взірець

Назва показника	Його значення
Зовнішній діаметр осердя статора, мм	120
Внутрішній діаметр осердя статора	35
Довжина осердя, мм	50
Кількість зубців осердя	12
Відкриття паза, мм	3
Товщина зубців, мм	10
Товщина листів осердя статора, мм	0,2
Матеріал листів осердя статора	20PNF1500
Кількість витків у фазі	18
Діаметр ефективного провідника обмотки, мм	3
Схема сполучення фаз	Y
Тип обмотки ¹	двошарова
Фактичне значення повітряного проміжку, мм	0,5
Величина робочого повітряного проміжку, мм	5,0
Кількість полюсів	2
Матеріал полюсів	Sm ₂ Co ₁₇
Зовнішній діаметр ротора по бандажу, мм	34
Зовнішній діаметр ротора по полюсах, мм	25
Активний опір фази обмотки статора, Ом	0,035
Діаметр цапфи ² , мм	25
Довжина цапфи ² , мм	32
Довжина центральної частини вала, мм ²	108

Примітки. ¹ – вказано в тексті [221];

² – визначено наближено, на підставі фотографії ротора рис. 6.7, б

Порівняння показників електричного режиму двигуна

Назва показника	За даними [221]	Методика р. 3	Розбіжність, %
Номинальна фазна напруга, В	152,1	145,0	4,7
Номинальний фазний струм, А	31,63	35,54	12,4
Споживана потужність, кВт	16,75	16,72	0,2
ККД	0,923	0,924	0,1
Повні втрати потужності, кВт	1,290	1,265	1,9

Всі вони виготовлені з різних матеріалів, закріплені різними способами, що впливає не лише на показники конструкційного демпфування, а й на жорсткість ротора в цілому.

Таблиця 6.10

Порівняння значень критичних частот обертання

Критична частота обертання	За даними [221]	Методика п. 4.3	Розбіжність, %
За прямої прецесії, об/хв	192429	174140	9,5
За зворотної прецесії, об/хв	151942	161630	6,4

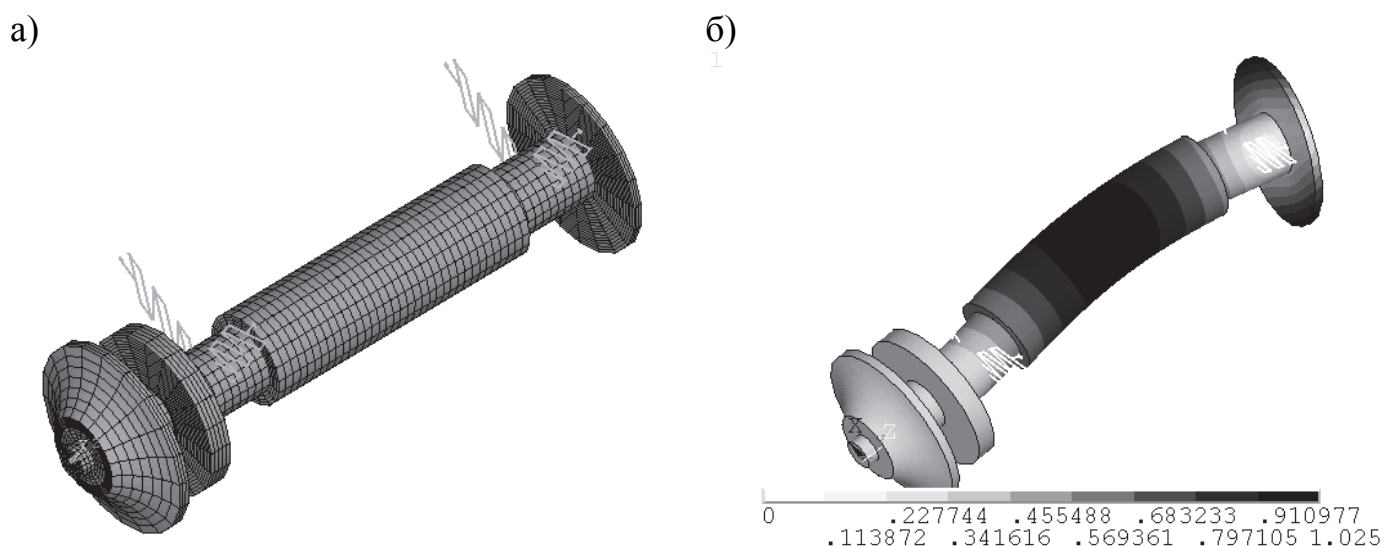


Рис. 6.8. Розрахунок критичних частот обертання на підставі моделі п. 4.3:

а) сітка СЕ; б) форма (мода) ротора, що відповідає критичній частоті

Факт експериментального підтвердження розрахункових результатів у тексті статті [221] супроводжується фразою: «...*The result of 3-D FEM is well accorded with the one of modal testing in maximum 5%*». Це дає право припустити, що розбіжність

між розрахунковими значеннями критичних частот, отриманими за методикою п. 4.3 й експериментом, в найгіршому випадку, не перевищуватиме 15%. Цей результат, на нашу думку, є цілком задовільним, особливо з огляду на те, що наша скінченно-елементна модель лише за формою наближено повторює модель [221].

6.5. Двигун (5 кВт, 150000 об/хв)

Розглянемо експериментальний взірець високошвидкісного двигуна номінальною потужністю 5 кВт, розрахованого на частоту обертання 150000 об/хв, що використовується у металообробному верстаті. Його дослідженням присвячено роботу [315].

Фрагменти цієї публікації, у яких йде мова про проектні параметри машини та результати експериментальних досліджень, показано на рис. 6.9.

Всі вхідні дані, які можна було отримати на підставі [315] безпосередньо, чи на підставі міркувань дедуктивного характеру, розташовано у табл. 6.11. Для визначення інших вхідних даних використовувалися показники номінального режиму (напруга, частота обертання, потужність) та розроблені рекомендації й методики прийняття проектних рішень.

Таблиця 6.11

Вхідна інформація про дослідний взірець

Назва показника	Його значення
Зовнішній діаметр осердя статора, мм	90
Зовнішній діаметр ротора, мм ¹	27
Довжина осердя, мм ²	85
Фактичне значення повітряного проміжку, мм	0,5
Величина робочого повітряного проміжку, мм	6,0
Товщина полюса ротора, мм ²	4
Кількість полюсів	2
Матеріал полюсів	NdFeB
Активний опір фази обмотки статора, Ом	0,047
Товщина листів осердя статора, мм	0,1
Матеріал листів осердя статора	кремнієва сталь
Комутаційний кут, ел.°	120

Примітки. ¹Визначено наближено на підставі даних про лінійну швидкість на поверхні ротора.

²Визначено наближено на підставі фотографії макету ротора (рис. 6.9, б)

a)

TABLE I
SPECIFICATIONS AND DIMENSIONS OF THE MOTOR

Rated output power	5kW
Rated speed	150,000 rpm
Rated voltage	200 V
Number of poles	2
Effective airgap length	6 mm
Outer stator diameter	90 mm
Stator dc resistance	0.093 Ω
Leakage inductance	0.09 mH

б)

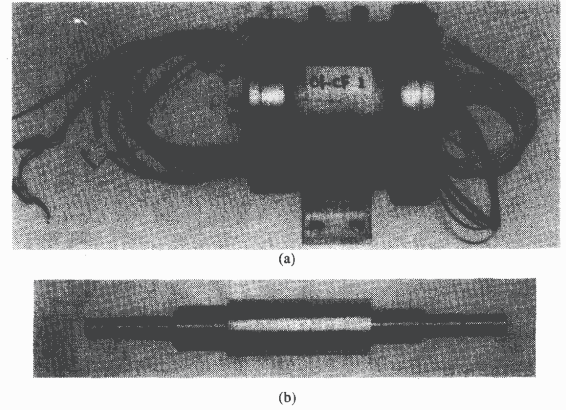


Fig. 2. Photographs of the super high speed PM motor.

в)

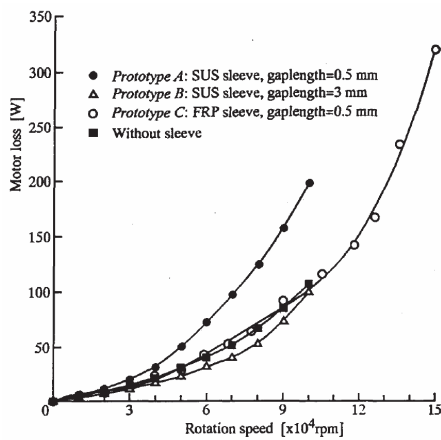


Fig. 9. No-load losses of the motors versus rotor speed.

г)

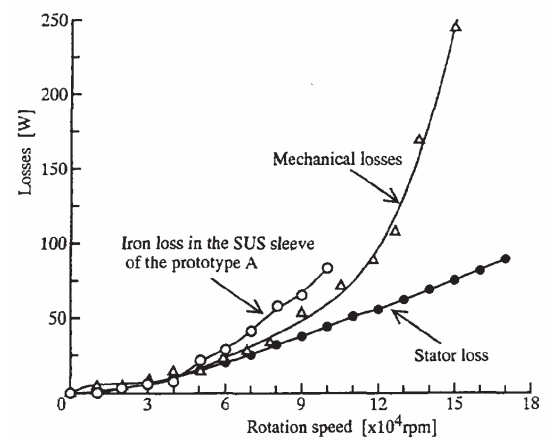


Fig. 10. Separated no-load losses versus rotor speed.

д)

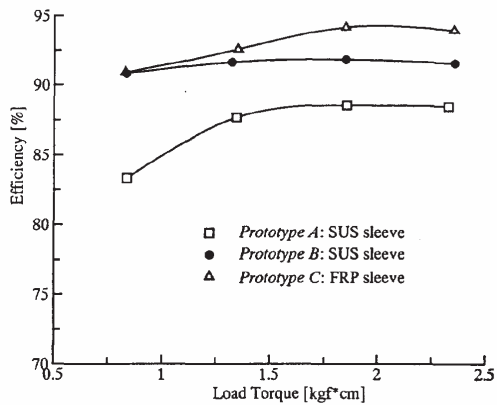


Fig. 11. Motor efficiency versus load torque at 60 000 rpm.

Рис. 6.9. Копії фрагментів публікації [315]: а) головні розміри та номінальні дані; б) експериментальний взірець двигуна; в) залежності втрат неробочого ходу від частоти обертання для різних виконань двигуна; г) залежності окремих складових втрат неробочого ходу від частоти обертання; д) залежності ККД від навантаження на валу за сталої частоти обертання та різних виконань двигуна

Опубліковані експериментальні дослідження спершу проводилися для визначення втрат неробочого ходу та розділення їх на складові (рис. 6.9, в, з).

Розрахунки даного виду втрат виконувалися за методикою п. 3.2. Порівнювалися повні втрати неробочого ходу P_0 , механічні втрати P_{mec} та втрати в сталі осердя статора P_{Fe} , причому $P_0 = P_{mec} + P_{Fe}$. До механічних втрат віднесено втрати на тертя у підшипникових опорах та втрати на аеродинамічне тертя ротора. Результати порівняння та розбіжності ε зведено в табл. 6.12 й показано на графіках рис. 6.10.

Таблиця 6.12

Порівняння втрат неробочого ходу

n , об/хв	Експериментальні значення втрат, [315]			Розрахункові значення втрат, (методика п. 3.2)					
	P_0 , Вт	P_{mec} , Вт	P_{Fe} , Вт	P_0 , Вт	ε , %	P_{mec} , Вт	ε , %	P_{Fe} , Вт	ε , %
40000	19	13	6	20,729	8,3	12,087	7,6	8,642	30,6
60000	38,1	24	14,1	46,009	17,2	29,12	17,6	16,889	16,5
69000	52,4	27	25,4	61,147	14,3	39,652	31,9	21,495	18,2
78000	64,3	33	31,3	78,569	18,2	52,007	36,5	26,562	17,8
90000	90,5	56	34,5	105,74	14,4	71,571	21,8	34,169	1,0
106000	115	73	42	149,38	23,0	103,56	29,5	45,82	8,3
118000	145	88	57	187,58	22,7	131,97	33,3	55,61	2,5
127000	171	108	63	219,52	22,1	156,03	30,8	63,49	0,8
136000	236	175	61	254,59	7,3	182,63	4,2	71,96	15,2
150000	324	250	74	314,85	2,9	228,75	9,3	86,1	14,1

Аналізуючи отримані розбіжності, помітно, що найбільшого значення вони сягають для механічних втрат у середині частотного діапазону. Припустимо, що прояв сильної нелінійності в залежності механічних втрат від частоти обертання ротора може бути пов'язаний зі зміною режиму роботи підшипникових опор під час проведення експерименту, наприклад, зі зміною тиску оливи у гідродинамічних підшипниках ковзання. Конструкційне демпфування або небаланс ротора теж можуть здійснювати подібний вплив. Так чи інакше, всі ці чинники носять випадковий характер й очевидно аналітичними методиками враховані бути не можуть. У загальному, розбіжність у визначенні втрат неробочого ходу не перевищує 23%.

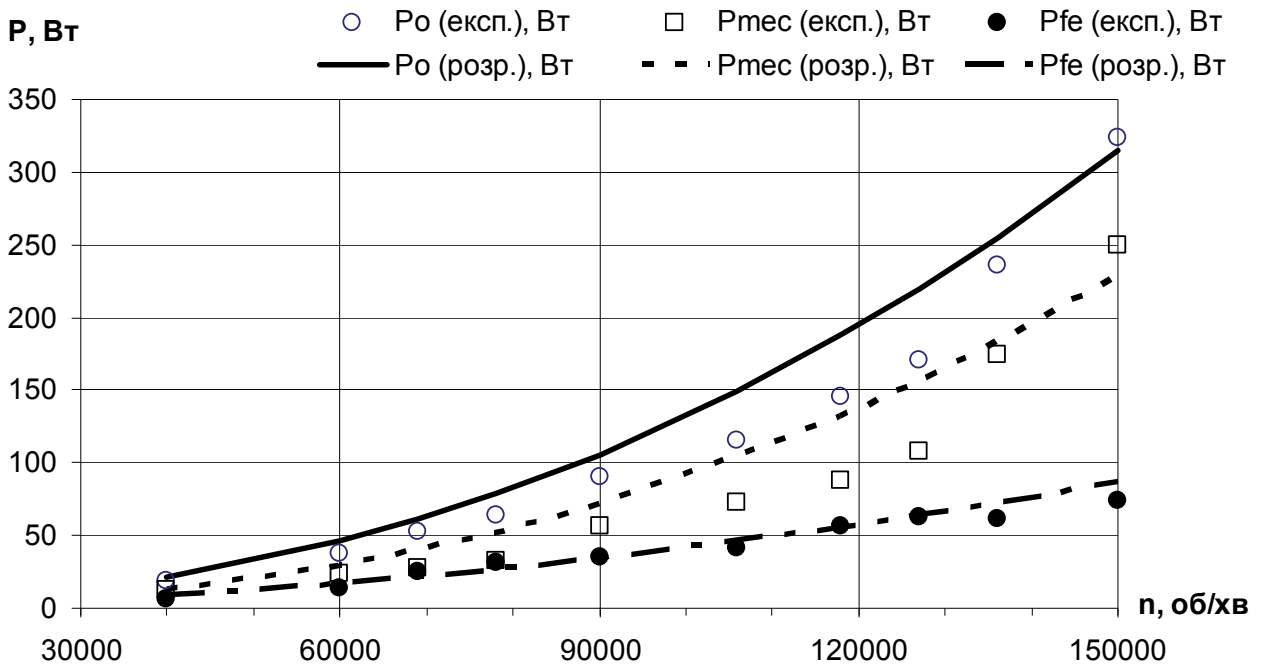


Рис. 6.10. Порівняння залежностей втрат неробочого ходу від частоти обертання, отриманих експериментальним [315] та розрахунковим (п. 3.2) шляхами

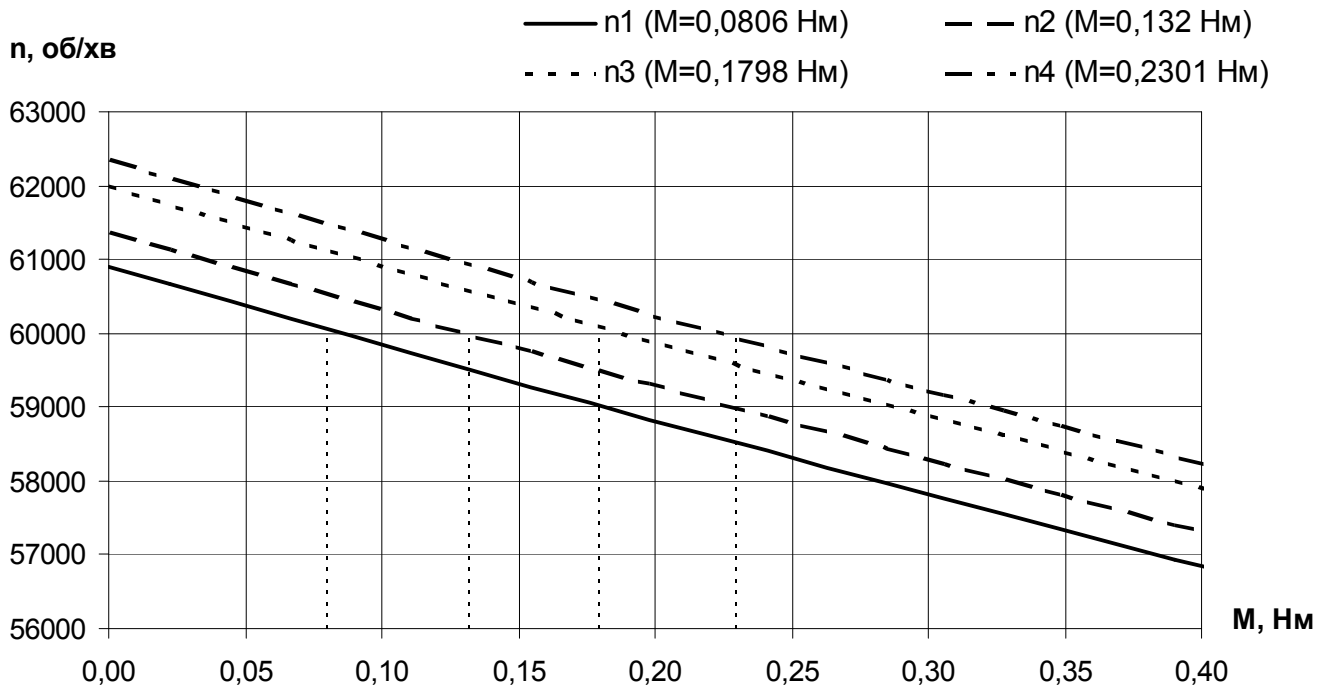


Рис. 6.11. Сукупність механічних характеристик дослідного двигуна, що забезпечують сталу частоту обертання (60000 об/хв) за дискретної зміни навантаження на валу

Ще стаття містить експериментальну залежність ККД дослідного двигуна від навантаження на валу за сталої частоти обертання 60000 об/хв.

Для здійснення коректного порівняння розрахункових даних з експериментальними нам довелося підбирати такі напруги живлення двигуна, які забезпечують вищезазначену частоту обертання за 4-ох табличних значень моменту на валу. Механічні характеристики двигуна, що відповідають таким режимам, зображено на рис. 6.11.

З'ясовано, що розрахункові залежності ККД двигуна від моменту на валі в діапазоні навантажень від 0 до $1,5 \cdot M_H$, практично збігаються для цих 4-ох випадків. Тому на рис. 6.12 наведено лише одну залежність.

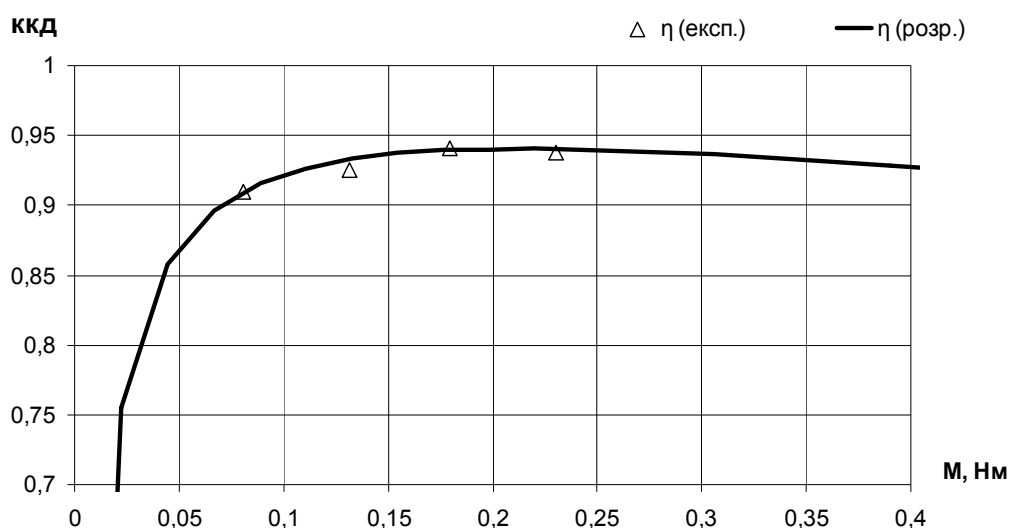


Рис. 6.12. Порівняння залежностей ККД двигуна від моменту навантаження на валу за сталої частоти обертання 60000 об/хв, отриманих експериментальним [315] та розрахунковим (п. 3.2) шляхами

Порівняння значень ККД та їх розбіжність наведено у табл. 6.13.

Таблиця 6.13

Порівняння експериментальних та розрахункових значень ККД

Момент на валу, Нм	ККД (експеримент)	ККД (розрахунок)	Розбіжність, %
0,0806	0,91	0,9086	0,15
0,132	0,925	0,9328	0,84
0,1798	0,941	0,9393	0,18
0,2301	0,938	0,9404	0,26

Похибка, що не перевищує 1%, свідчить про задовільний рівень достовірності результатів, отриманих з використанням розрахункової методики п. 3.2.

6.6. Двигун (2 кВт, 220000 об/хв)

На завершення розглянемо матеріали експериментальних досліджень, проведені з машиною, яка входить до складу гібридного турбоелектрокомпресора [275]. Фрагменти даної публікації, де йдеться про проектні параметри машини, результати експериментальних досліджень та схему системи керування, показано на рис. 6.13.

У цьому випадку порівнювалися миттєві усталені значення фазних напруги та струму. Їх значення отримані з використанням розробленої математичної моделі п. 3.3.

Інформація про розміри, обмоткові дані та властивості активних матеріалів отримувалася безпосередньо з [275], на підставі розробленої методики первинного проектування п. 3.1, беручи до уваги напрацьовані рекомендації, та з довідникових джерел (табл. 6.14). Так, наприклад, магнітні властивості матеріалу полюсів отримано на основі опублікованого діапазону значень густини енергії магнітного поля для використаного матеріалу — 39–43 MGОе або у системних одиницях 310 – 342 кДж/м³. Такому значенню відповідає матеріал на основі NdFeB, що за міжнародної класифікації позначається як «N40» (коерцитивна сила — 955 кА/м, залишкова індукція — 1,28 Тл).

Підготовлений набір вхідних даних використано для польової математичної моделі даного двигуна, яка застосовує алгоритм, описаний у п. 3.3.

Для уявлення про рівень дискретизації області розрахунку на рис. 6.14 показано більшу частину сітки, що складається з 6274 СЕ та містить 12581 вузол.

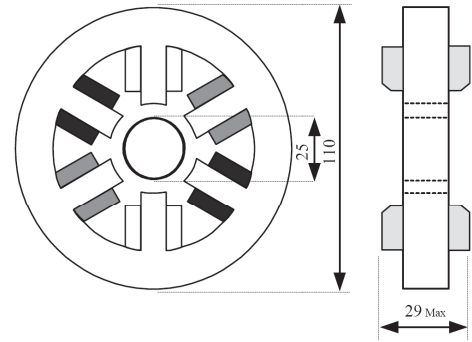
У [275] також міститься растрове зображення поля вектора магнітної індукції, отримане з використанням FEM-аналізу. На жаль, воно не містить шкали відповідності між відтінками кольору та значеннями модуля магнітної індукції.

a)

Table 1. Principal specifications of ultra high-speed PMSM drive.

Rated power (Cont.)	2 (kW)
Rated torque (Cont.)	0.159 (Nm)
Rated speed (Cont.)	120,000 (r/min)
Maximum speed	220,000 (r/min)
Overload	200 %-2 (s)

б)



(b) 6-slot motor.

Fig. 2. Principal dimensions of 3-slot and 6-slot motors.

в)

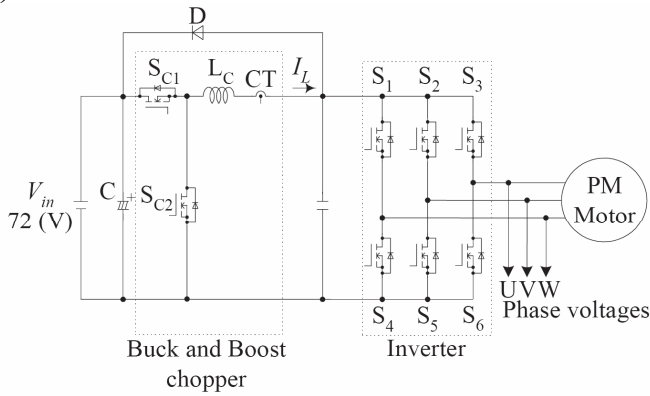


Fig. 7. Schematic diagram of pseudo current-source inverter.

г)

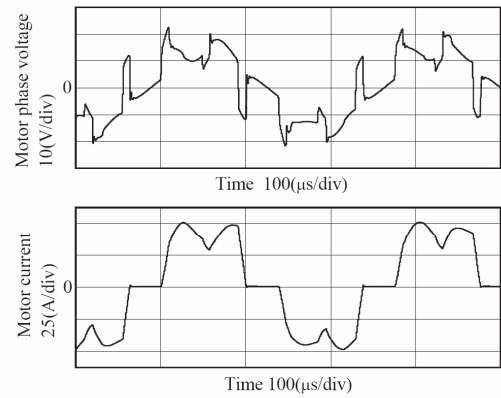
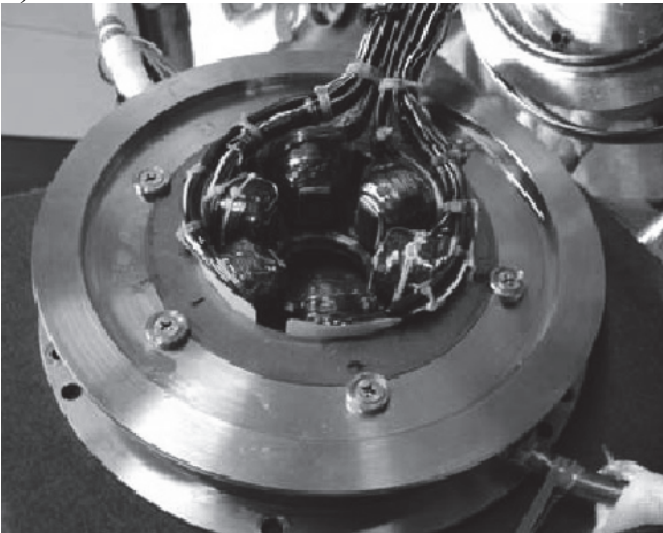


Fig. 9. Phase voltage and current waveforms at 220,000 (r/min) and 2.2-kW inverter output (experimental result).

д)



е)

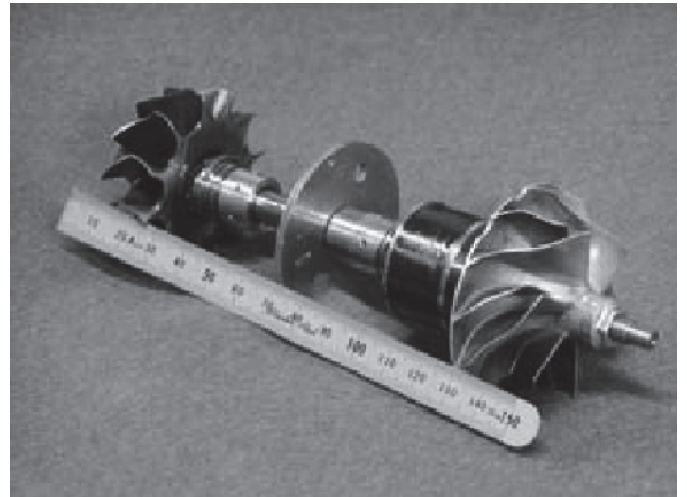


Рис. 6.13. Копії фрагментів публікації [275]: а) паспортні дані; б) головні розміри та форма активної частини; в) принципова схема системи керування; г) осцилограми фазних напруги та струму; д) статор разом з елементами системи охолодження двигуна; е) ротор разом з турбінами та диском опорного газового підшипника

Вхідна інформація про дослідний взірець

Назва показника	Його значення
Зовнішній діаметр осердя статора, мм	110
Зовнішній діаметр ротора, мм	25
Довжина осердя, мм*	16
Повна осьова довжина обмотаного осердя	29
Ефективний переріз провідника обмотки, мм*	3,5
Величина робочого повітряного проміжку, мм	5,0
Кількість зубців	6
Кількість полюсів	2
Матеріал полюсів	NdFeB
Густина енергії магн. поля для матеріалу полюсів, MGOe	39–43
Товщина листів осердя статора, мм	0,15
Номинальна напруга живлення DC, В	72
Активний опір фази обмотки статора, мОм	5,2
Індуктивність фази обмотки статора, мкГн	9
Комутаційний кут, ел.°	120

Примітка. *Визначено наближено, на підставі фотографії макету ротора (рис. 6.13, е)

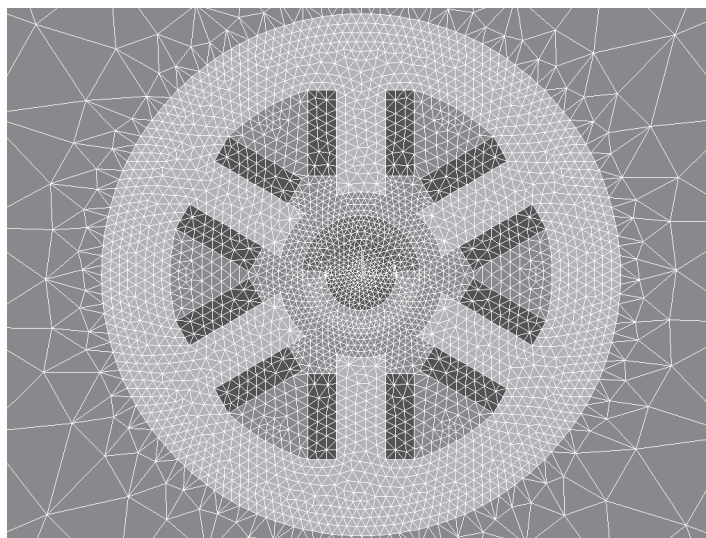


Рис. 6.14. Фрагмент сітки CE

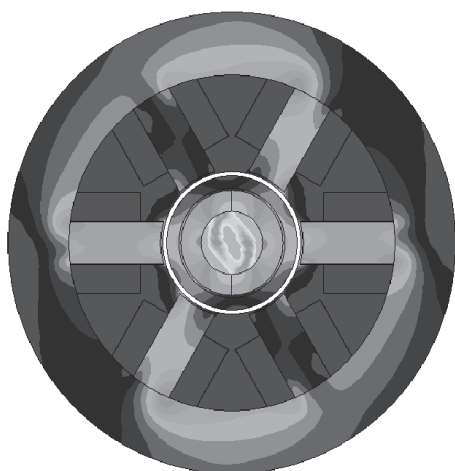
Проведено аналогічний розрахунок поля вектора \vec{B} в режимі заданих фазних струмів i_1, i_2, i_3 , причому

$$i_1 = 50 \cdot \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right); \quad i_2 = 50 \cdot \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right); \quad i_3 = 50 \cdot \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{4\pi}{3}\right).$$

Порівняння розподілу модуля вектора індукції магнітного поля на якісному рівні можна провести за допомогою рис. 6.15.

Математичний експеримент щодо визначення миттєвих значень фазних напруги та струму проводився на моделі п. 3.3, призначеній для розрахунку перехідних процесів у ВБПМ. Результат отримано шляхом усталення електромеханічного перехідного процесу, що передбачав поступове підняття напруги живлення від 10 В до 60 В DC та ступеневе збільшення навантаження до 96 мНм. Момент інерції ротора в цьому експерименті був штучно зменшений у 4 рази, у порівнянні з дійсним, з метою скорішого виходу на усталений режим.

а)



б)

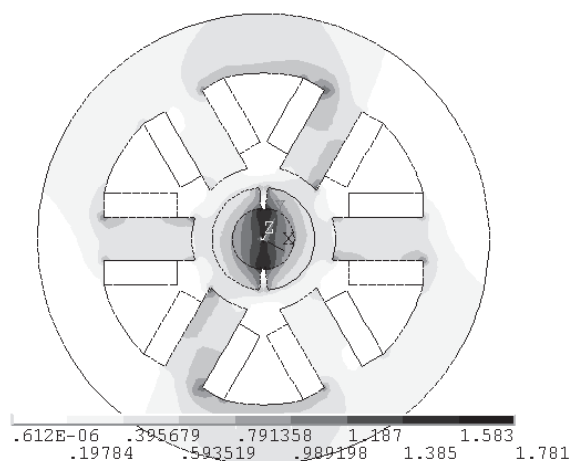


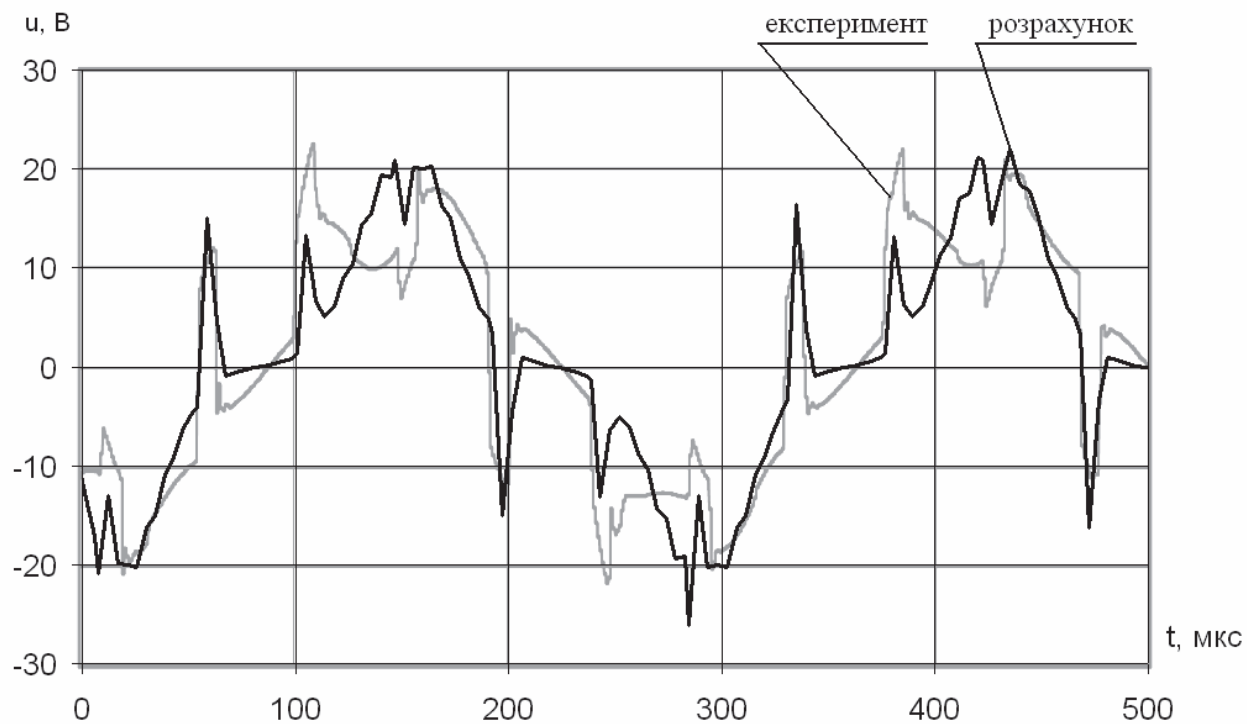
Рис. 6.15. Поле вектора магнітної індукції: а) запозичене з [275];

б) за результатами розрахунку за методикою п. 3.3, Тл

На рис. 6.16 суміщено осцилограми експерименту рис. 6.13, з [275] з графіками відповідних розрахункових величин. Маштаб за координатними осями підбрано так, щоби отримати повне співпадіння координатних сіток. Початок відліку по часовій осі для зручності сприйняття зміщено у точку початку часової осі на осцилограмах [275]. Момент навантаження на валу підбрано так, щоби врахувати механічні втрати двигуна.

Найбільше розходження результатів у визначенні миттєвих значень фазної напруги спостерігається у зоні максимальних значень (див. рис. 6.16, а). На нашу думку, це може пояснюватися наслідками роботи системи обмеження перенапруг, що апаратно вбудована в систему керування дослідним двигуном. Наприклад, розряд конденсатора, що є частиною снаберного кола силового ключа, може спричиняти такий ефект.

а)



б)

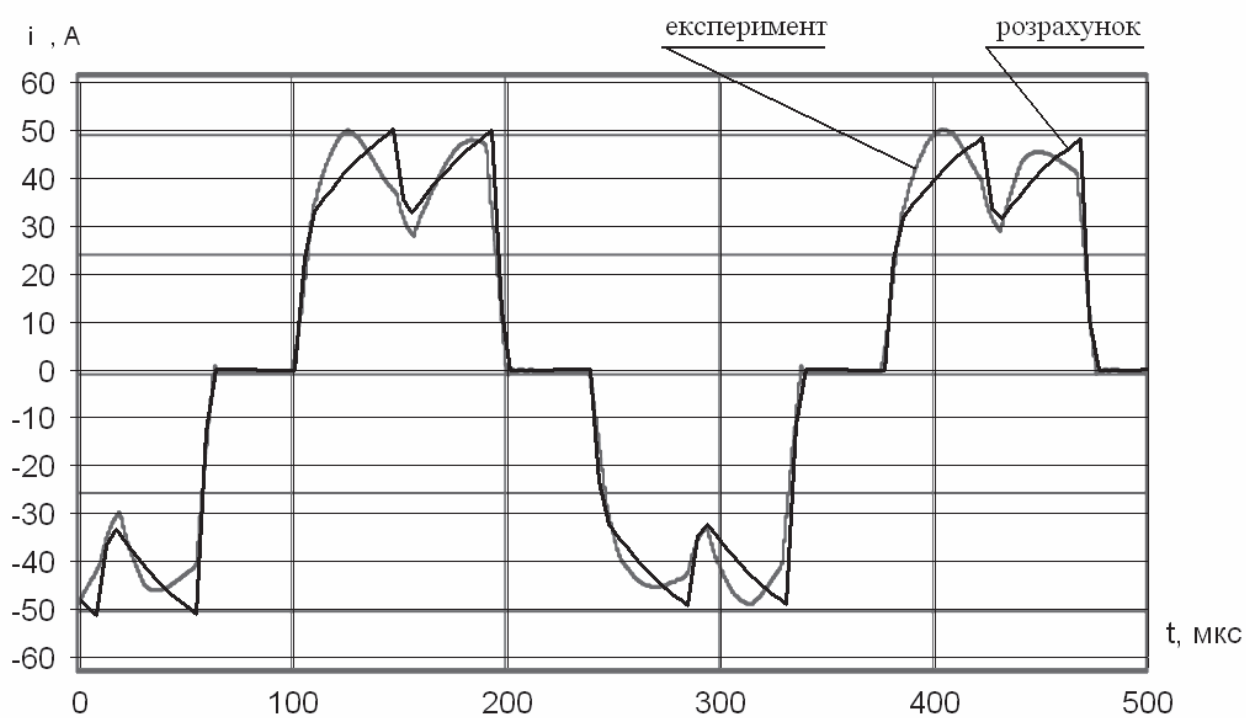


Рис. 6.16. Порівняння миттєвих значень фазних напруги (а) та струму (б) за навантаження моментом на валу 96 мНм та частоти обертання 220000 об/хв

Також помітна різниця у величинах кута комутації, тобто тривалість одночасного знаходження у відкритому стані трьох ключів. У реальній системі керування вона виявляється на 5-10 мкс більшою, ніж у моделі. Це може бути наслідком специфіки роботи комутатора, затримкою у колах керування, занадто повільною зміною провідних властивостей силового ключа та ін. Тобто розходження пояснюється недосконалістю математичного опису силових напівпровідникових ключів, які використано в моделі (п. 3.3).

Розходження у миттєвих значеннях фазних струмів є незначним. Кількісне порівняння діючих значень напруги та струму показало, що розбіжність не перевищує 6-8%.

Висновки до розділу

Порівняння результатів обчислень з експериментом дало змогу оцінити точності пропонованих розрахункових методик як в цілому, так і за окремими їх різновидами.

1. Перевірка етапів розрахунку електромагнітних процесів дає право стверджувати наступне:

- розбіжність у визначенні повних втрат потужності, отриманих розрахунковим та експериментальним способом, не перевищує 17% (п. 6.3) і 2% (п. 6.4);
- розрахунок залежності такого інтегрального показника ефективності спроектованої машини як ККД від навантаження показав розбіжність з експериментальними даними на рівні 1,5% (п. 6.3, 6.5);
- розбіжність у визначенні фазних напруг високошвидкісних генераторів за відомих значень струму навантаження та коефіцієнта потужності не перевищує 8-10 % для методик системи аналізу проектних рішень й 3-5 % для системи FEM-аналізу (пп. 6.1–6.3);
- розбіжність у визначенні діючих значень фазних напруг та струмів ВБПМ з використанням польової моделі для миттєвих значень не перевищує

8 % (п. 6.4).

2. Верифікація етапів механічного розрахунку показала:

- найбільші за величиною розбіжності з експериментальними даними спостерігаються у визначенні аеродинамічних втрат (до 40%) та механічних втрат (до 33%) (п. 6.3). Це пояснюється як нестачею інформації про об'єкт дослідження, так і недосконалістю використаних методик розрахунку;
- розбіжність у визначенні критичної частоти обертання ротора з використанням FEM-моделі не перевищує 15% (п. 6.4). Причини розбіжності пояснюються низкою чинників випадкового характеру, що безпосередньо впливають та жорсткість всієї системи. В першу чергу, це початковий розподіл механічних напружень, зумовлений попередніми натягами деталей ротора, та демпфуючі властивості змащувального шару підшипникових опор. Відсутність точних даних про розміри та фізико-механічні властивості матеріалів теж, вочевидь, не додає точності.

3. Оцінка розбіжностей у розрахунках теплових процесів:

- розрахунок середніх значень температур на підставі ТЗС у частинах ВБПМ, в яких відбувається тепловиділення, демонструє максимальну розбіжність з результатами експерименту в 14 % (п. 6.3);
- середньооб'ємні температури, отримані з використанням тривимірної моделі на основі МСЕ, відрізняються від експериментальних значень не більше ніж на 9 % (п. 6.3);

4. На підставі аналізу отриманих даних стосовно порівняння результатів, отриманих розрахунковими та експериментальними способами, можна стверджувати:

- методи аналізу проектних рішень в цілому забезпечують необхідний рівень точності у розв'язанні задач, пов'язаних зі створенням ВБПМ, визначенням її параметрів та розрахунком характеристик. Отримані результати у вигляді розмірів, обмоткових даних та властивостей

активних матеріалів можуть безпосередньо використовуватися для подальшої більш глибокої проробки конструкторських рішень з використанням польових математичних моделей, які входять до складу системи FEM-аналізу. Порівняно вища швидкодія алгоритмів системи аналізу проектних рішень дозволяє використовувати їх для задач оптимізації ВБПМ.

- математичні моделі, що застосовують FEM-аналіз, зокрема моделі для розрахунків додаткових втрат в обмотці статора, динамічних електромеханічних процесів у ВБПМ, температурного поля машини, є адекватними й можуть використовуватися для створення ВБПМ як комплексної електромеханотронної системи, так і для аналізу окремих спірних питань, що виникають при проектуванні таких систем або при запровадженні нетипових конструкційних рішень.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено актуальну науково-технічну проблему формування теоретичної бази, практичних рекомендацій та програмного забезпечення, призначених для створення високошвидкісних безконтактних електричних машин зі збудженням від постійних магнітів (ВБПМ).

Науково обґрунтовані методи інформаційно-обчислювальної підтримки процесу створення ВБПМ, об'єднані в проектно-конструкторський комплекс, який робить можливим розв'язання широкого кола задач, зокрема:

- дає змогу провести попереднє оцінювання відповідності отриманих показників машини вимогам технічного завдання;
- виконати підготовку вхідної інформації для подальшого використання у польових математичних моделях, чим істотно скоротити час багатоваріантних, можливо, оптимізаційних розрахунків;
- виконати уточнення проектних показників за допомогою адекватних математичних моделей з урахуванням чинників, які здійснюють визначальний вплив на перебіг процесів у ВБПМ у їх взаємозв'язку;
- верифікувати результати ще на етапі прийняття проектних рішень.

За результатами роботи можна зробити такі висновки:

1.1. Розглянута сукупність науково обґрунтованих засобів інформаційно-обчислювальної підтримки процесу створення ВБПМ, за використання технології віртуальних цифрових прототипів, гарантує відповідність проекту вимогам технічного завдання й не потребуватиме виконання дороговартісних етапів виготовлення фізичних макетів та проведення їх експериментальних випробувань.

1.2. Здійснювати вибір головних розмірів ВБПМ необхідно, зважаючи на напружено-деформований стан ротора та на підставі результатів модального аналізу. Так, зовнішній діаметр ротора пропонується обмежувати з огляду на максимально допустиме механічне напруження, що виникає в ньому під дією відцентрових сил, а довжину ротора — зважаючи на значення 1-ої критичної частоти обертання.

1.3. Розроблено метод та алгоритм розрахунку статичної зовнішньої характеристики ВБПМ у режимі генератора, що в термінах діючих значень напруг та струмів надає можливість врахувати насичення магнітопроводу, вищі просторові гармоніки в розподілі магнітної індукції у повітряному проміжку та вплив реакції якоря на результуючий магнітний потік. Урахування взаємозв'язку вищеназваних чинників робить можливим, залишаючись на рівні теорії кіл, забезпечення точності обчислення напруги генератора під навантаженням на рівні 8 – 12% по відношенню до експериментально виміряного значення.

1.4. Розроблено математичну модель для розрахунку додаткових втрат в обмотці статора, спричинених дією вихрових струмів. Алгоритм придатний для осердь з довільною формою пазів, у яких розташовано довільну кількість ефективних та елементарних провідників. Він побудований на підставі опису електромагнітного поля у квазістаціонарному наближенні за двовимірною формулювання та враховує вплив потоку пазового розсіювання, основного магнітного потоку та насичення магнітопроводу у взаємозв'язку цих чинників. Величина додаткових втрат в обмотці ВБПМ, обчислена за допомогою даної моделі, в середньому на 25 – 30% більша за значення, отримані на підставі аналітичного методу класичної теорії електричних машин.

1.5. Для визначення додаткових втрат (поверхневих та пульсаційних) у полюсній системі ротора ВБПМ, доцільно застосувати розроблений порівняно простий метод, що ґрунтується на розв'язанні рівняння Гельмгольца для провідного напівпростору у двовимірному формулюванні. Розбіжність у величинах додаткових втрат в роторі ВБПМ, обчислених за допомогою цього методу та з використанням математичної моделі, що побудована на підставі опису електромагнітного поля у квазістаціонарному наближенні за двовимірною формулювання, не перевищує 20% і має тенденцію до зменшення за зростання частоти обертання.

1.6. Розроблений у роботі метод розрахунку магнітно-механічних параметрів електричних машин дає змогу підняти швидкість обчислень, у задачах з дослідження динаміки складних електромеханотронних систем, принаймні у 2 – 2,5 рази. Це підтверджено результатами, розв'язаної у роботі, задачі розрахунку

електромеханічних перехідних процесів у електромеханотронній системі, що складається з ВБПМ, сполученої з навантаженням, напівпровідникового комутувального пристрою та давача положення ротора. Створена для цього математична модель враховує всі найважливіші чинники, що впливають на перебіг процесів у даній системі, в їх взаємозв'язку, а саме: дійсну форму поперечного перерізу магнітопроводу; двовимірний просторовий розподіл векторного магнітного потенціалу і, як наслідок, фазні потокозчеплення, ЕРС та електромагнітний момент визначаються з урахуванням усіх просторових гармонік поля; ефект насичення магнітопроводу; нелінійність вольт-амперних характеристик напівпровідникових елементів комутувального пристрою.

1.7. Розроблено математичну модель для розрахунку напружено-деформованого стану суцільних та складених роторів, викликаного навантаженням відцентровими силами. Задача розрахунку полів зміщень та механічних напружень розглядається у тривимірній постановці, що дає змогу врахувати наявність осьової складової механічного напруження. У порівнянні з підходом, у якому напружено-деформований стан таких роторів вважається плоским, вдалося підняти точність розрахунку запасу міцності більше, ніж на 20%.

1.8. Розроблено математичну модель для розрахунку критичних частот обертання суцільних та складених роторів на основі модального аналізу матриці жорсткості в обертовій системі координат. Врахування гіроскопічного ефекту та скінченної жорсткості опор ротора дає право стверджувати, що для жорстких суцільних роторів у діапазоні їх діаметрів $D_j \approx 100 \div 250$ мм та за співвідношень віддалі між опорами до D_j від 2 до 7, робота за частоти обертання, що перевищуватиме 90000 об/хв неможлива.

1.9. Розроблена математична модель для розрахунку поля температури у ВБПМ зі способами охолодження: IC0145 (0146, 0147); IC15 (16,17); ICW37 (97) надає можливість, за рахунок урахування об'ємного розподілу втрат потужності й неоднакової теплопровідності обмотки та магнітопроводу статора в ортогональних напрямках, не лише визначати локальні температури з розбіжністю, не вищою 5–

10 %, порівняно з експериментальними значеннями, а й виявляти недоліки конструкцій систем охолодження. Запропонована заміна обмотки та осердя статора гомогенними анізотропними, в тепловому відношенні, тілами, що за формою повторюють свої реальні аналоги, дає змогу істотно зменшити розмірність задачі розрахунку температурного поля практично без втрати точності й робить можливим її розв'язання на обчислювальних машинах класу «персональний комп'ютер».

1.10. Для проведення теплового розрахунку ВБПМ зі способами охолодження IC0145 (0146, 0147), IC15 (16,17), ICW37 (97) пропонуємо, розроблені на підставі аналізу результатів розрахунку тривимірних полів температур та їх градієнтів, теплові заступні схеми. Запропоновані способи обчислення параметрів цих схем, забезпечують можливість оцінки теплового стану таких машин з точністю, не нижчою 11–18 %, по відношенню до експериментально виміряних значень температур.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Авербух В.Я. Космическая прецизионная электромеханика / В.Я. Авербух // Вопросы электромеханики. Труды НПП ВНИИЭМ, Т. 124. – 2011. – С. 17-28.
2. Адволоткин Н.П. и др. Управляемые бесконтактные двигатели постоянного тока / Н.П. Адволоткин, В.Т. Гращенков, Н.И. Лебедев, – Л.: Энергоатомиздат. 1984. – 160 с.
3. Акинин К.П. Условия построения бездатчиковых электромеханических систем на основе бесконтактных двигателей с постоянными магнитами / К.П. Акинин // Технічна електродинаміка. – К. – 2011. № 6. – С. 18-23.
4. Алексеенко Ю.В. Подбалансировка ротора электродвигателя в собственном корпусе как средство сохранения стабильности вибрационных параметров герметического электронасоса / Ю.В. Алексеенко, Э.Л. Барский, Д.Д. Рябикин, Н.Я. Овчаренко // Расчеты параметров электрических машин. [сб. науч. ст.] – Кишинев. "Штиинца". – 1980. – С. 42-45.
5. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго, пер. с фр. – М., «Наука», 1965. – 780 с.
6. Антипов В.Н. и др. Снижение механических потерь минитурбогенераторов малоразмерных газотурбинных установок / В.Н. Антипов, И.Ю. Кручинина, Т.В. Хамова, В.В. Московская // Тез. докладов «Новые материалы для малой энергетики и экологии. Проблемы и решения». – Санкт-Петербург, 2011. – С.29.
7. Антонов А.Е. Порошковые магнитопроводы для магнитоэлектрических машин / А.Е. Антонов, А.А. Филоменко // Технічна електродинаміка. – К. – 2014. № 2. – С. 44-46.
8. Антонов А.Е. Потери на вихревые токи в обмотке беспазовой электрической машины / А.Е. Антонов, И.С. Петухов // Технічна електродинаміка. – К. – 2010. № 4. – С. 38-42.
9. Антонов А.Е. Потери от уравнительных токов в многожильных обмотках беспазовых электрических машин / А.Е. Антонов, В.Г. Киреев, И.С. Петухов // Технічна електродинаміка. – К. – 2011. № 3. – С. 33-39.

10. Антонов А.Е. Электрические машины магнитоэлектрического типа / А.Е. Антонов, – К.: НАН Украины, Институт электродинамики. 2011. – 216 с.
11. Анурьев В.И. Справочник конструктора-машиностроителя: в 3 т. / В.И. Анурьев, 8-е изд. перераб. и доп. – М.: Машиностроение. 2001. – Т.1. – 920 с.
12. Анурьев В.И. Справочник конструктора-машиностроителя: в 3 т. / В.И. Анурьев, 8-е изд. перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 2001. – Т. 2. – 912 с.
13. Аполонский С.М. Дифференциальные уравнения математической физики в электротехнике / С.М. Аполонский, – СПб.: Питер. 2012. – 352 с.
14. А.с. 1274080 СССР, Н 02 К 21/14, 1/22. Ротор генератора / Ю. В. Муравьев, Н. И. Кузьмичев. – № 3870060/24-07 ; заявл. 20.03.85 ; опубл. 30.11.86, Бюл. № 44.
15. А.с. 1697208 СССР, Н 02 К 21/28. Ротор высокоскоростной электрической машины / В. С. Масленников, Б. В. Бухреев, В. М. Лапшинов. – № 4738779/07 ; заявл. 19.09.89 ; опубл. 07.12.91, Бюл. № 45.
16. Афонин А.А. Магнитные системы электромеханических преобразователей энергии с вариацией векторов намагниченности постоянных магнитов / А.А. Афонин // Технічна електродинаміка. – К. – 2004. № 1. – С. 47-55.
17. Байда Е.И. Сравнительный анализ моделей конвективной теплоотдачи / Е.И. Байда // Електротехніка і електромеханіка. – 2011. № 2. – С. 14-17.
18. Балагуров В.А. и др. Электрические генераторы с постоянными магнитами / В.А. Балагуров, Ф.Ф. Галтеев, – М.: Энергоатомиздат. 1988. – 280 с.
19. Балагуров В.А. Проектирование специальных электрических машин переменного тока: Учеб. Пособие для студентов вузов / В.А. Балагуров, – М.: Высш. шк 1982. – 272 с.
20. Бертинов А.И. и др. Специальные электрические машины: (Источники и преобразователи энергии). Учеб. пособие для вузов / А.И. Бертинов, Д.А. Бут, С.Р. Мизюрин и др., – М.: Энергоиздат. 1982. – 552 с.
21. Бесчастных В.Н. Газовый подшипник тяжелого ротора газотурбинных двигателей. Опыт разработки и перспективы внедрения / В.Н. Бесчастных, Ю.А. Равикович // Вестник МАИ. Т.17. – 2010. № 3. – С. 91-98.

22. Богданова Ю.В. Моделирование динамики ротора электрошпинделя на магнитных подшипниках / Ю.В. Богданова, А.М. Гуськов // Электрон. журнал: Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2015. № 1. – С. 201-220.
23. Борисенко А.И. и др. Охлаждение промышленных электрических машин/ А. И. Борисенко, О. Н. Костиков, Л. И. Яковлев, – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 296 с.
24. Боярчук К.А. Проблемы создания электрогенераторов для турбомашинных преобразователей энергетических установок космического назначения / К.А. Боярчук, Л.Г. Вержбицкий, Ю.А. Берюляев, М.Л. Круглова, Л.К.Ковалев, К.Л. Ковалев, Е.Е. Тулинова // Электричество. – 2012. № 8. – С. 2-7.
25. Бретшнайдер С. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета / С. Бретшнайдер, , пер. с польск. – Л.: "Химия". 1966. – 536 с.
26. Бут Д.А. Бесконтактные электрические машины. Учеб. пособие для электромех. и электроэнерг. спец. вузов / Д.А. Бут, – М.: Высш. шк. 1990. – 416 с.
27. Васьковский Ю.Н. Математическое моделирование и выбор конструктивных параметров тягового синхронного электродвигателя с постоянными магнитами / Ю.Н. Васьковский, Ю.А. Гайдено, А.Е. Русятинский // Технічна електродинаміка. – К. – 2013. № 6. – С. 40-45.
28. Видеман Е. Конструкции электрических машин / Е. Видеман, В. Келленбергер, пер. с нем. – Л., «Энергия», 1972. – 520 с.
29. Виноградов Н.В. Проектирование электрических машин / Н.В. Виноградов, Ф.А. Горяинов, П.С. Сергеев, – М., «Энергия», – 1969. – 707 с.
30. Воловик А.П. Высокоскоростные подшипники качения генератора для газотурбинных установок / А.П. Воловик, М.Е. Коварский, В.А. Зайцев // Вопросы электромеханики. Труды НПП ВНИИЭМ, Т. 139. – 2014. – С. 3-6.
31. Высокотехнологичные инженерные пластики и изделия из них [Электронный ресурс] / APC Group – 2016. – [1 с.]. – Режим доступа: <http://apc-group.ru/> – Назва з екрану. – Дата звернення: 19.08.2016.
32. Высоцкий В.Е. Операторно-рекутентные модели вентильных двигателей-генераторов с позиционно-зависимым управлением / В.Е. Высоцкий // Изв. вузов

Электромеханика. – 2005. № 6. – С. 24-32.

33. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер, пер.с англ. – М.: «Мир», – 1984. – 428 с.

34. Гейд С. и др. Использование функции порядкового анализа для слежения за состоянием крупного турбогенератора на этапе выбега [Электронный ресурс] / С. Гейд, Х. Херлуфсен, Х. Константин-Хансен. Техническое обозрение фирмы Брюль и Кьер – 2002. – [8 с.]. – Режим доступа: <http://vibrosignal.com/uploads/files/book2.pdf> – Назва з екрану. – Дата звернення: 30.03.2016.

35. Геча В.Я. Комплексная математическая модель новой конструкции высокооборотного электрогенератора / В.Я. Геча, А.Б. Захаренко, И.А. Мещихин, В.А. Пинскер // Вопросы электромеханики. Труды НПП ВНИИЭМ, Т. 122(3). – 2011. – С. 3-10.

36. Геча В.Я. Новые технические решения для создания высокооборотного энергоэффективного электрогенератора / В.Я. Геча, А.Б. Захаренко // Вопросы электромеханики. Труды НПП ВНИИЭМ, Т. 130. – 2012. – С. 3-7.

37. Геча В.Я. Применение метода конечных суперэлементов для расчета электромагнитного поля магнитоэлектрической машины / В.Я. Геча, А.Б. Захаренко // Вопросы электромеханики. Труды НПП ВНИИЭМ, Т. 107. – 2008. – С. 19-23.

38. Глебова М.Л. Удосконалення моделей колекторних і вентильних машин постійного струму для вибору ефективних параметрів і режимів роботи: автореф. дис... канд. техн. наук: 05.09.01 / М.Л. Глебова, Нац. техн. ун-т "Харк. політехн. ін-т". – Харків. 2001. – 20 с.

39. Голованов Д.В. Методы расчёта высокоскоростных генераторов для газотурбинных установок / Д.В. Голованов, М.Е. Коварский, В.В. Магин, И.Г. Трунов // Вопросы электромеханики. Труды НПП ВНИИЭМ, Т. 126. – 2012. – С. 3-8.

40. Горская И.Ю. Синтез магнитной системы с постоянными магнитами, создающей максимальное среднее значение магнитного поля в заданном объеме / И.Ю. Горская // Изв. вузов Электромеханика. – 2001. № 1. – С. 21-24.

41. ГОСТ 18855-94 (ИСО 281-89). Подшипники качения. Динамическая расчетная грузоподъемность и расчетный ресурс (долговечность). Введ. 1997–01–01.

– М.: Изд.-во стандартов, 1996. – 29 с.

42. ГОСТ 20459-88 (МЕК 34-6-69). Машины электрические вращающиеся. Методы охлаждения. Обозначения. – Введ. 1989-01-01. – М.: Изд.-во стандартов, 1988. – 15 с.

43. ГОСТ 21427.2-83. Сталь электротехническая холоднокатаная изотропная тонколистовая. Технические условия. Введ. 1983-06-21. – М.: Изд.-во стандартов, 1982. – 10 с.

44. ГОСТ 1978-81. Втулки подшипников скольжения металлические. Типы и основные размеры. Введ. 1981-07-16. – М.: Изд.-во стандартов, 1982. – 5 с.

45. ГОСТ ИСО 1940-1-2007. Вибрация. Требования к качеству балансировки жестких роторов. Введ. 2008-07-01. – М.: Изд.-во стандартов, 2007. – 52 с.

46. Гребеников В.В. Влияние высоты пазов статора на характеристики электрических машин с постоянными магнитами / В.В. Гребеников, М.В. Прыймак // Вісник Національного Технічного Університету «ХПІ». – 2015. № 5 (1114). – С. 32-36.

47. Гребеников В.В. Модификация магнитной системы электродвигателя ДВ-3000 с постоянными магнитами / В.В. Гребеников, М.В. Прыймак, Ю.В. Шарабан // Технічна електродинаміка. – К. – 2011. № 2. – С. 30-35.

48. Гребеніков В.В. Науково-технічні основи удосконалення електричних машин з постійними магнітами : автореф. дис... д-ра. техн. наук: 05.09.01 / В.В. Гребеніков, Нац. акад. наук України, Ін-т електродинаміки. – К. 2013. – 36 с.

49. Домбровский В.В. Основы проектирования электрических машин переменного тока / В.В. Домбровский, Г.М. Хуторецкий, – Л., «Энергия», 1974. – 504 с.

50. Дружинин В.В. Магнитные свойства электротехнической стали / В.В. Дружинин, – М.: Энергия; – 1974. – 240 с.

51. «Електромеханотронна система перетворення енергії для безредукторних вітроустановок з вертикальною віссю обертання». Звіт про науково-дослідну роботу. НУ „Львівська політехніка”. 2010. – 193 с.

52. Забелин Н.А. Подшипники для малорасходных турбин автономных источников электрической энергии / Н.А. Забелин, Ю.В. Матвеев, Г.А. Фокин // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. – 2014. № 4(207). – С. 210-222.

53. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О.Зенкевич, пер.с англ. – М.: «Мир», – 1975. – 542 с.

54. Зечихин Б.С. Электрические машины летательных аппаратов. Гармонический анализ активных зон / Б.С. Зечихин, – М.: Машиностроение. 1983. – 149 с.

55. Зысина-Моложен Л.М. Теплообмен в кольцевом канале, образованном неподвижным и вращающимся соосными цилиндрами / Л.М. Зысина-Моложен, М.П.Поляк // Теплоэнергетика: [сб. науч. работ], – М: 1970, №6, с. 47-50.

56. Иванов-Смоленский А.В. Электромагнитные поля и процессы в электрических машинах и их физическое моделирование / А.В. Иванов-Смоленский, – М.: «Энергия», – 1969. – 304 с.

57. Исмагилов Ф.Р. Коэффициент полезного действия высокоскоростных электромеханических преобразователей энергии с высококоэрцитивными постоянными магнитами / Ф.Р. Исмагилов, И.Х. Хайруллин, В.Е. Вавилов // Изв. вузов Электромеханика. – 2015. № 2. – С. 12-19.

58. Калантаров П.Л. и др. Расчет индуктивностей. Справочная книга / П.Л. Калантаров, Л.А. Цейтлин, – Л.: Энергоатомиздат. 1986. – 488 с.

59. Карминский В.Д. Техническая термодинамика и теплопередача: Курс лекций / В.Д. Карминский, – М: Маршрут, 2005.– 224 с.

60. Кекот О.В. Основы теория и перспективы применения в мощном регулируемом приводе явнополюсной электрической машины с полупроводниковым коммутатором: дис... канд. техн. наук: 05.09.01/ О.В. Кекот, Львівський політехнічний інститут. – Львів. 1974. – 210 с.

61. Кобрін В.Л. Раціональна дискретизація області розрахунку теплового поля методом кінцевих елементів в електромеханічних перетворювачах / В.Л. Кобрін, О.Б. Бабійчук, В.П. Шевченко // Електромашінобудування та електрообладнання:

[міжвідомчий наук.техн.зб.] – Київ: "Техніка". – 2006. № 67. – С. 95-97.

62. Ковалев М.П. Расчет высокоточных шарикоподшипников / М.П. Ковалев, М.З. Народецкий, – М.: «Машиностроение», 1975. – 280 с.

63. Ковшаров А.Н. Разработка системы управления высокоскоростным синхронным двигателем без использования датчика угла поворота ротора / А.Н. Ковшаров // Вопросы электромеханики. Труды НПП ВНИИЭМ, Т. 140. – 2014. – С. 7-12.

64. Копытов С. М. Совершенствование конструкций газомангнитных опор высокоскоростных роторных машин / С. М. Копытов, А. В. Космынин, А. В. Ульянов, В.С. Щетинин, А. С. Хвостиков // Фундаментальные исследования, (10-1). – 2013. – С. 25-29.

65. Корн Г.А. Справочник по математике для научных работников и инженеров: определения, теоремы, формулы / Г.А. Корн, Т.М. Корн, И.Г. Араманович. – М.: «Наука», 1984. – 831 с.

66. Костюк А.Г. Динамика и прочность турбомашин: учебник для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. / А.Г.Костюк, – М.: Издательский дом МЭИ, 2007.– 476 с.

67. Крейт Ф. Основы теплопередачи: Пер. с англ. / Крейт Ф., Блэк У.; под ред. И. А. Анфимова. – М.: «Мир», 1983. – 512 с.

68. Круг А.Е. Удельные потери в шихтованных сердечниках при высоких частотах перемагничивания / А.Е. Круг // «Электросила» [сборник], – Л: 1989, №37, с. 82-89.

69. Кручинина И.Ю. Проблемные вопросы создания высокоскоростных мини-турбогенераторов и пути их решения / И. Ю. Кручинина, В. Н. Антипов // Информационно-управляющие системы, 4 (59). – 2012. – С. 25-34.

70. Кручинина И.Ю. Высокоиспользованные электрические машины для современной энергетики: проблемы создания и исследований: автореф. дис... д-ра. техн. наук: 05.09.01 / И.Ю. Кручинина, ГОУВПО "Санкт-Петербургский государственный политехнический университет".- Санкт-Петербург. 2013. – 40 с.

71. Кутателадзе С.С. Теплопередача и гидродинамическое сопротивление: Справочное пособие / С.С. Кутателадзе;– М.: Энергоатомиздат, 1990. – 367 с.

72. Ледовский А.Н. Электрические машины с высококоэрцитивными постоянными магнитами / А.Н. Ледовский, – М.: Энергоатомиздат. 1985. – 168 с.

73. Лохнин В.В. Высокоиспользованные магнитоэлектрические машины : Теория и разработка: автореф. дис... д-ра. техн. наук: 05.09.01 / В.В. Лохнин, – М.: МАМИ. 1998. – 40 с.

74. Лучин Г.А. и др. Газовые опоры турбомашин / Г.А. Лучин, Ю.В. Пешти, А.И. Снопов, – М.: Машиностроение. 1989. – 240 с.

75. Макарчук О.В. Аналітичний розрахунок втрат потужності від вихрових струмів в роторах з постійними магнітами / О.В. Макарчук // Технічна електродинаміка. – К. – 2015. № 6. – С. 41-45.

76. Макарчук О.В. Вольт-амперні характеристики напівпровідникових елементів електромеханотронних систем / О.В. Макарчук // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка” “Електроенергетичні та електромеханічні системи”. – Л.: НУЛП. –2008. № 615. – С. 72-78.

77. Макарчук О.В. Втрати потужності від вихрових струмів в роторі високошвидкісного генератора зі збудженням від постійних магнітів / О.В. Макарчук // Технічна електродинаміка №1, – 2013. – С. 56–61.

78. Макарчук О.В. Ефект витіснення струму в провідниках короткозамкнених обмоток машин змінного струму при малих ковзаннях / О.В. Макарчук, І.Є. Біляковський // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка” “Електроенергетичні та електромеханічні системи”. – Л.: НУЛП. – 1997. № 334. – С. 3-7.

79. Макарчук О.В. Магнітно-механічна характеристика явнополюсного вентильного двигуна з постійними магнітами / О.В. Макарчук, В.І. Ткачук, Р.К. Василів // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету. – Кременчук. – 2006. № 3(38). – С. 29-33.

80. Макарчук О.В. Математична модель вентильного двигуна з постійними магнітами / О.В.Макарчук // Технічна електродинаміка. -К. – 2007. № 5. – С. 28-35.

81. Макарчук О.В. Математичне моделювання електромеханічних перехідних процесів у явнополюсних електричних машинах: дис... канд. техн. наук: 05.09.01 / О.В. Макарчук, Державний ун-т "Львівська політехніка". – Львів. 1996. – 203 с.

82. Макарчук О.В. Метод розрахунку поперечних коливань вала, що обертається / О.В. Макарчук // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка” “Електроенергетичні та електромеханічні системи”. – Л.: НУЛП. – 2002. № 449. – С. 120-126.

83. Макарчук О.В. Модель безконтактної електричної машини зі збудженням від постійних магнітів / О.В. Макарчук // Технічна електродинаміка. – К. – 2011. № 1. – С. 37-45.

84. Макарчук О.В. Опис обмоток електричних машин полігармонічними функціями. / О.В. Макарчук // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка” “Електроенергетичні та електромеханічні системи”. – Л.: НУЛП. – 1998. № 347. – С. 68-74.

85. Макарчук О.В. Особливості роботи вентильного двигуна з постійними магнітами без давача положення ротора / О.В. Макарчук // Технічна електродинаміка. – К. – 2006. № 3. – С. 30-35.

86. Макарчук О.В. Порівняння колової та польової моделей для розрахунку перехідних процесів у стрижні кліткової обмотки / О.В. Макарчук, В. М. Гладкий // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка” “Електроенергетичні та електромеханічні системи”. – Львів: Вид- НУЛП. – 2002. № 449. – С. 54-60.

87. Макарчук О.В. Реактивний момент явнополюсних електричних машин з постійними магнітами / О.В. Макарчук // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка” “Електроенергетичні та електромеханічні системи”. – Л.: НУЛП. – 2003. № 485. – С. 120-126.

88. Макарчук О.В. Розрахунок характеристик двигуна постійног струму на підставі обчислення магнітного поля / О.В. Макарчук, В.В. Попічко // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка” “Електроенергетичні та електромеханічні системи”. – Л.: НУЛП. – 2005. № 544. – С. 96-103.

89. Макарчук О.В. Ротори електричних машин зі збудженням від постійних магнітів / О.В. Макарчук, І.Г. Шаповалов // “Електромеханічні і енергозберігаючі системи”. Щоквартальний науково-виробничий журнал. – Кременчук: КрНУ. – 2011. № 1 (13). – С. 21-26.

90. Манорик П.А. и др. Высокоэнергетические постоянные магниты на основе сплавов системы Неодим-Железо-Бор: химия, материаловедение, применение / П.А. Манорик, А.А. Павлюков, В.К. Бухтияров, – Киев: Наукова думка. 2013. – 399 с.

91. Мартыненко Г.Ю. Интегрированное программное средство для численного анализа динамики роторов на различных опорах / Г.Ю. Мартыненко, С. С. Мьякинников // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. – 2012. № 1(55). – С. 117-131.

92. Матющенко А.В. Полевые математические модели вентильных двигателей с постоянными магнитами и их сопоставительный анализ / А.В. Матющенко // Електротехніка і електромеханіка. – 2015. № 1. – С. 25-28.

93. Мещеряков В.Н. Структурно-топологический анализ векторной модели вентильного двигателя / В.Н. Мещеряков, В.Г. Карантаев // Изв. вузов Электромеханика. – 2004. № 3. – С. 25-29.

94. Митчелл Э. и др. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчелл, Р. Уейт, , пер. с англ. – М.: Мир. 1981. – 216 с.

95. Михеев М. А. Основы теплопередачи. Изд. 2-е, стереотип. / М. А. Михеев, И. М. Михеева – М., «Энергия», 1977. – 344 с.

96. Мищенко Т.Н. Потери мощности от гистерезиса и вихревых токов в магнитотвердых материалах постоянных магнитов для тяговых двигателей / Т.Н. Мищенко, В.А. Браташ, Н.А. Костин // Гірнична електромеханіка та автоматика: Наук.-техн. зб. – Вип. 85. – 2010. – С. 208-215.

97. Науменко В.И. Авиационные электрические машины с интенсивным охлаждением / В.И. Науменко, О.Г. Клочков; – М.: «Машиностроение», 1977. – 128 с.

98. Норри Д. и др. Введение в метод конечных элементов: Пер.с англ./ Д. Норри, Ж. де Фриз; – М.: Мир, 1981. – 304 с.

99. Овчинников И.Е. Вентильные электрические двигатели и привод на их основе (малая и средняя мощность) / И.Е. Овчинников, , Курс лекций – СПб.: Корона-Век. 2006. – 336 с.

100. Овчинников И.Е. Теория вентильных электрических двигателей / И.Е. Овчинников, – Л.: Наука. 1985. – 164 с.

101. Олейников А.М. Математическая модель автономной безредукторной ветроэлектрической установки на генераторе с постоянными магнитами / А.М. Олейников, Л.Н. Канов, Ю.В. Матвеев, Е.И. Зарицкая // Научный журнал «Электротехника та електроенергетика», ЗНТУ, Запоріжжя. – 2010. № 2. – С. 62-67.

102. Опалев Ю.Г. Вентильные электродвигатели для прецизионных быстродействующих приводов мехатронных технологических модулей: автореф. дис... канд. техн. наук: 05.09.01 / Ю.Г. Опалев, Чуваш. гос. ун-т им. И.Н. Ульянова].- Чебоксары. 2011. – 20 с.

103. Осідач Ю.В. Дослідження впливу конструкційних факторів на рівень пульсацій ЕРС спеціальних машин постійного струму / Ю.В. Осідач , О.В. Макарчук, А.В. Мирка // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка” “Електроенергетичні та електромеханічні системи”. – Л.: НУЛП. – 2000. № 400. – С. 114-121.

104. Осідач Ю.В. Особливості роботи й основні характеристики вентильного двигуна з зосередженими обмотками якоря / Ю.В. Осідач , В.І. Ткачук, О.В. Макарчук // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка” “Електроенергетичні та електромеханічні системи”. – Л.: НУЛП. – 1998. № 347. – С. 124-130.

105. Павлище В.Т. Підшипники кочення: Основні параметри, конструкції опор, змащування, ущільнення та розрахунки ресурсу / В.Т. Павлище; – Л.: Вид-во Нац. ун-ту "Львів. політехніка", – 2001. – 136 с.

106. Панченко В.І. Ефективність постійних магнітів в електричних генераторах із магнітоелектричним збудженням / В.І. Панченко, С.І. Федоров, В.В. Сухова // Гірничя електромеханіка та автоматика: Наук.-техн. зб. – Вип. 92. – 2014. – С. 101-104.

107. Пархоменко Г. А. Выбор размеров ротора сверхвысокоскоростной электрической машины с учетом динамических нагрузок / Г. А. Пархоменко, Ю. В. Гришин, Д. Ю. Гришин // Электротехнические комплексы и системы управления. – 2010. № 3. – С. 29-33.

108. Пат. 105743 Україна, МПК F03D 9/02. Вітрова теплоелектростанція / І.З. Щур, О.В. Макарчук, В.І. Щур, В.І. Климко. - № а 2013 08843 ; заявл. 15.07.2013; опубл. 10.06.2014, Бюл. 11. – 4с.

109. Пат. 2137954. Российская Федерация, МПК F16 C27/02. Лепестковый газодинамический подшипник / Ю.И.Ермилов, Ю.А. Равикович. - № 2007148404/09; заявл. 03.04.1997; опубл. 20.09.1999.

110. Пат. 2347310 Российская Федерация, МПК H02K 15/16. Турбоэлектрическая установка / Н.Н. Лаптев, А.В. Левин, В.М. Довгаленок, М.Ф. Ходунов.- № 2007148404/09; заявл. 27.12.2007; опубл. 20.02.2009.

111. Пат. на корисну модель 80216 Україна, МПК F03D 3/02. Безконтактна контрроторна вітроустановка / О.В. Макаруч, І.З. Щур, А.І. Ковальчук. - № u 2012 07720; заявл. 25.06.2012; опубл. 27.05.2013, Бюл. 10. – 4с.

112. Петухов И.С. Численное моделирование поверхностного эффекта в ферромагнетике при синусоидальном магнитном потоке / И.С. Петухов // Технічна електродинаміка. – К. – 2013. № 6. – С. 24-29.

113. Пинегин С.В. и др. Прецизионные опоры качения и опоры с газовой смазкой: Справочник / С.В. Пинегин, А.В. Орлов, Ю.Б. Табачников, – М.: Машиностроение. 1984. – 216 с.

114. Писаревский Ю. В. Проблемы разработки высокоскоростных электрических двигателей для стоматологии / Ю. В. Писаревский, Ж. А. Ген // Электротехнические комплексы и системы управления. – 2011. № 4. – С. 46-51.

115. Плешков П.Г. Математичні моделі синхронних двигунів на постійних магнітах для синтезу систем автоматичного керування високоефективними електроприводами / П.Г. Плешков , І.В. Савеленко, А.В. Некрасов // Вісник КрНУ ім. М. Остроградського. Вип. 2 (91). – 2015. – С. 26-34.

116. Подберезная И.Б. Моделирование электромагнитных систем с постоянными магнитами модифицированным методом интегральных уравнений / И.Б. Подберезная, В.П. Гринченков, О.Ф. Ковалев // Изв. вузов Электромеханика. – 2004. № 4. – С. 6-9.

117. Поджаренко В.О. и др. Пристрої вимірювання та контролю характеристик електричних машин з газоманітним підвісом / В.О. Поджаренко, П.І. Кулаков, В.Ю. Кучерук, – Вінниця: Універсум-Вінниця. 2004. – 154 с.

118. Подшипники с подвижными вкладышами (опорные) [Электронный ресурс]/

ООО «Сарториус Украина» – 2016. – Режим доступа: http://sart.com.ua/new/hidrodynamic%20bearings/tilting%20pad%20bearings_journal.htm – Назва з екрану. – Дата звернення: 14.04.2016.

119. Постников И.М. Проектирование электрических машин / И.М. Постников; Киев, Гостехиздат УССР, – 1960. – 910 с.

120. Пятин Ю.М. и др. Постоянные магниты. Справочник / Ю.М. Пятин, А.Б. Альтман, Э.Е. Верниковский, – М.: Энергия. 1980. – 487 с.

121. Равикович Ю.А. Опыт МАИ по созданию высокооборотных турбоагрегатов с газодинамическими подшипниками скольжения для двигательных энергетических установок [Электронный ресурс] / Международный технологический форум "Инновации. Технологии. Производство" – 2014. – [30 с.]. – Режим доступа: http://www.itp-forum.ru/conf2014/ПЗ_НТК_Равикович – Назва з екрану. – Дата звернення: 07.09.2015.

122. Радимов И.Н. Исследования вентильного двигателя с внутренними постоянными магнитами при двух способах соединения фаз обмотки статора / И.Н. Радимов, В.В. Рымша, М.В. Гулый, П.А. Кравченко // Електротехніка і електромеханіка. – 2010. № 6. – С. 35-38.

123. Рымша В.В. Моделювання і синтез реактивних та індукторних електромеханічних перетворювачів: автореф. дис... д-ра. техн. наук: 05.09.01 / В.В. Рымша, Нац. ун-т "Львів. політехніка". – Львів. 2004. – 39 с.

124. Рихтер. Р. Электрические машины: в 5 т. / Р. Рихтер. Пер. с нем. под ред. Ю.С.Чечета. – Л.: ОНТИ НКТП СССР. – 1935. Т. 1: Расчетные элементы общего значения. Машины постоянного тока. – 598 с.

125. Рихтер. Р. Электрические машины: в 5 т. / Р. Рихтер. Пер. с нем. под ред. Ю.С.Чечета. – Л.: ОНТИ НКТП СССР. – 1936. Т. 2: Синхронные машины и одноякорные преобразователи. – 687 с.

126. Ртищева А.С. Теоретические основы гидравлики и теплотехники / А.С. Ртищева, Ульяновск: УлГТУ. 2007. – 171 с.

127. Румянцев М.Ю. Опыт разработки высокоскоростных электротурбомашин в ООО "Турбоком М" / М.Ю. Румянцев, Н.Е. Захарова, С.И. Сигачев // Вестник МЭИ – М.: Изд-во МЭИ. – 2007. № 3. – С. 45-50.

128. Румянцев М.Ю. Разработка высокоскоростных электрокомпрессоров на основе вентильных электродвигателей на газодинамических опорах / М.Ю. Румянцев, Н.Е. Захарова, С.И. Сигачев // Газотурбинные и комбинированные установки и двигатели. Сб. докладов 13-й всероссийской межвузовской научно-технической конференции. М.: Изд-во МГТУ. – 2008.

129. Савоненко В.И. Нелинейный динамический анализ роторных систем центробежных машин на опорных сегментных подшипниках / В.И. Савоненко // «Вісник СумДУ». – 2005. № 1(73). – С. 25-34.

130. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. Пер.с англ. / Л. Сегерлинд; – М.: «Мир», – 1979. – 392 с.

131. Сильвестер П. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков: Пер. с англ. / П. Сильвестер, Р. Феррари – М.: Мир, – 1986. – 229 с.

132. Сипайлов Г.А. и др. Тепловые, гидравлические и аэродинамические расчеты в электрических машинах: Учеб.для вузов / Г.А. Сипайлов, Д.И. Санников, В.А. Жадан.– М.: «Высшая школа», 1989. – 239 с.

133. Ситин Д.А. Магнитные системы синхронных электрических машин с редкоземельными постоянными магнитами и повышенной частотой вращения: автореф. дис... канд. техн. наук: 05.09.01 / Д.А. Ситин, Моск. гос. авиац. ин-т. – М.: 2009. – 20 с.

134. Скворцов С.С. Особенности теплового расчета гильзованных (герметичных) электродвигателей / С.С. Скворцов, М.Е. Коварский // Вопросы электромеханики. Труды НПП ВНИИЭМ, Т. 112. – 2009. № 5. – С. 11-16.

135. Справочник машиностроителя: в 3 т. / Под. ред. Чудакова Е.А. – М.: МАШГИЗ, – 1961. – Т. 3. – 1100 с.

136. Стадник И.П. Оптимизация геометрических параметров электродвигателя с постоянными магнитами / И.П. Стадник, В.В. Чабанов // Технічна електродинаміка.

– К. – 2015. № 2. pp. 57-63.

137. Стренг Г. и др. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс, , пер. с англ. – М.: Мир. 1977. – 351 с.

138. Титов В.В. Турбогенераторы. Расчет и конструкция / В.В. Титов, Г.М. Хуторецкий, Г.А. Загородная [и др.]. – Л.: «Энергия», – 1967. – 894 с.

139. Ткачук В.І. та ін. Теорія та синтез вентильних двигунів постійного струму: монографія / В.І. Ткачук, І.Є. Біляковський, О.В. Макарчук, Л.В.Каша, О.В. Грещук Львів: Видавництво "Львівської політехніки". 2011. – 320 с.

140. Ткачук В.І. Методика проектування вентильних двигунів з високоенергетичними постійними магнітами / В.І. Ткачук, І.Є. Біляковський, Р.О. Біловус // Вісник КДУ ім. М. Остроградського. Вип. 3 (62). Частина 2. – 2010. – С. 79-82.

141. Тондл. А. Динамика роторов турбогенераторов / А. Тондл, – Л.: «Энергия», – 1971. – 388 с.

142. Турбодетандер – тип MTG. Техническая информация [Электронный ресурс] / RMG REGEL + MESSTECHNIK GMBH – 2007. – [8 с.]. – Режим доступа: https://www.honeywellprocess.com/library/marketing/tech-specs/ MTG_rus_0702.pdf – Назва з екрану. – Дата звернення: 07.09.2015.

143. ТУ 1984-001-18785310-2003. Технические условия. Материалы магнитотвердые спеченные на основе сплавов неодима с железом и бором. Введ. 2003-05-30. – М.: ООО НПК «Магниты и магнитные материалы», 2003. – 10 с.

144. ТУ 3498-002-18785310-2003. Технические условия. Материалы магнитотвердые спеченные на основе сплавов неодима с железом и бором. Введ. 2003-07-30. – М.: ООО НПК «Магниты и магнитные материалы», 2003. – 10 с.

145. Устройство и конструкция высокоскоростного электрошпинделя [Электронный ресурс] / По материалам IBAG Switzerland AG и IBAG North America – 2010. – [12 с.]. – Режим доступа: http://www.sergeev-hsc.de/media/DIR_65814/c219c0b38f472e1bffff824affffff0.pdf – Назва з екрану. – Дата звернення: 30.03.2016.

146. Февралева Н.Е. Магнитотвердые материалы и постоянные магниты. Определение характеристик. Справочник / Н.Е. Февралева, – Киев: Наукова думка.

1969. – 232 с.

147. Федоров М.М. Удосконалення методів прогнозування теплового стану електродвигунів змінного струму в нестационарних режимах їх роботи: автореф. дис... д-ра. техн. наук: 05.09.01 / М.М. Федоров, Нац. техн. ун-т "Харк. політехн. ін-т". – Харків. 2003. – 36 с.

148. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. Том 5: Электричество и магнетизм / Р.Фейнман, Р.Лейтон, М.Сэндс. Пер. с англ.; – М.: «Мир», – 1966. – 296 с.

149. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. Том 6: Электродинамика / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Пер. с англ.; – М.: «Мир», – 1966. – 344 с.

150. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. Сер. Механика в техническом университете. / В.И. Феодосьев, – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана. 1999. Т.2 – 592 с.

151. Филиппов И. Ф. Теплообмен в электрических машинах: Учеб. пособие для вузов / И. Ф. Филиппов, – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1986. – 256 с.

152. Фильц Р.В. Векторная базисная функция Тейлора и её применение в задачах электродинамики / Р.В. Фильц // Изв. вузов Электромеханика. – 1989. № 9. – С. 5-10.

153. Фильц Р.В. Дискретные аналоги дифференциальных операторов и их применение в задачах электромеханики / Р.В. Фильц // Изв. вузов Электромеханика. – 1990. №3. – С.5-16.

154. Фильц Р.В. Магнитно-механические параметры электромеханических преобразователей энергии / Р.В. Фильц // Изв. вузов Электромеханика. – 1988. №12. – С.18-22.

155. Фильц Р.В. и др. Математическое моделирование явнополюсных синхронных машин / Р.В. Фильц, Н.Н. Лябук, – Львов: Свит. 1991. – 176 с.

156. Чан Тхі Тху Хионг. Вентильні явнополюсні двигуни з постійними магнітами з покращеними характеристиками: автореф. дис... канд. техн. наук: 05.09.01 / Чан Тхі Тху Хионг., Одес. нац. політехн. ун-т. – Одеса. 2009. – 20 с.

157. Чернавский С.А. Подшипники скольжения / С.А. Чернавский, – М.:

МАШГИЗ, – 1963. – 244 с.

158. Шаров В.С. Высокочастотные и сверхвысокочастотные электрические машины / В.С. Шаров, – М.: Энергия. 1973. – 248 с.

159. Шепталин Д.С. Исследование бесконтактного электромагнитного преобразователя энергии для космического аппарата: автореф. дис... канд. техн. наук: 05.09.01 / Д.С. Шепталин, Нац. исслед. ун-т “МЭИ”, – М.: 2012. – 20 с.

160. Шимони К. Теоретическая электротехника / К. Шимони, – М.: Мир, – 1964. – 773 с.

161. Шуйский В.П. Расчет электрических машин (пер. с нем.) / В.П. Шуйский, – Л.: «Энергия», – 1968. – 732 с.

162. Шумов Ю.Н. Сверхскоростные и ультраскоростные асинхронные машины за рубежом: обзор публикаций / Ю.Н. Шумов // Электричество. – 2011. № 5. – С. 36-41.

163. Щур І.З. Стратегії керування безредукторними електроприводами на базі безконтактних вбудованих модулів з постійними магнітами / І.З. Щур, О.В. Макаручук, М.В. Черепаняк // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка” “Електроенергетичні та електромеханічні системи”. – Л.: НУЛП. – 2008. № 615. – С. 167-175.

164. Юферов Ф.М. Электрические машины автоматических устройств / Ф.М. Юферов, – М.: Высш. шк. 1998. – 479 с.

165. Abdi B. A Simple Analog BLDC Drive Control for Electro-Mechanical Energy Storage System / B. Abdi, M.M. Teymoori, H. Gholamrezaei, A.A. Nasiri // Energy Procedia. – 2011. № 12. pp. 1002-1007.

166. Aglén O. A High speed generator for microturbines / O. Aglén // International Conference on Electrical Engineering And Technology ICEET01, Dares Salaam, Tanzania. – 2001.

167. Aglen O. Back-to-back tests of a high-speed generator generator / O. Aglen //, Proc. of IEMDC. – 2003, pp 1084-1090.

168. Aglen O. Loss calculation and thermal analysis of a high-speed generator / O. Aglen // Proc. of IEMDC. – 2003, pp. 1117-1125.

169. Aglén O. Thermal analysis of a high-speed generator / O. Aglén, A. Andersson // Industry Applications Conference. 38th IAS Annual Meeting. Conference Record of the vol.1. – 2003. pp. 547-554.

170. Albach M. Two-dimensional calculation of winding losses in transformers / M. Albach // Power Electronics Specialists Conference, PESC 00. IEEE 31st Annual (Vol. 3). – 2000. pp. 1639-1644.

171. Al-Naemi F.I. FEM modeling of rotor losses in PM motors / F.I. Al-Naemi, A.J. Moses // Journal of magnetism and magnetic materials, 304(2). – 2006. pp. e794-e797.

172. Amara Y. Analytical prediction of eddy-current loss in armature windings of permanent magnet brushless AC machines / Amara Yacine, Pascal Reghem, and Georges Barakat // Magnetics, IEEE Transactions on 46.8 – 2010, pp. 3481-3484.

173. Andersson B. Lumped Parameter Thermal Modelling of Electric Machines. Analysis of an Interior Permanent Magnet Synchronous Machine for Vehicle Applications / B. Andersson, Department of Energy and Environment. Division of Electric Power Engineering Chalmers University of Technology (Master of Science Thesis).Goteborg, Sweden. 2013. – 72 c.

174. Ansys 11.0 Theory Manual / SAS IP Inc., 2006.

175. Antipov V.N. High-speed electrical machines for power engineering: Current state and development trends / V.N. Antipov, Y.B. Danilevich // Russian Electrical Engineering, 78(6). – 2007. pp. 277-279.

176. Atallah K. Rotor loss in permanent-magnet brushless AC machines / K. Atallah, D. Howe, P. H. Mellor, D. A. Stone // Industry Applications, IEEE Transactions on, 36(6). – 2000. pp. 1612-1618.

177. Bailey C. Design of high-speed direct-connected permanent-magnet motors and generators for the petrochemical industry / C. Bailey, D.M. Saban, P. Guedes-Pinto // Industry Applications, IEEE Transactions on 45(3). – 2009. pp. 1159-1165.

178. Bergstrom J.P. High-Speed High-Power Permanent Magnet Machine Parameters, Qualities, and Considerations / J.P. Bergstrom, Report Presented to the Faculty of the Graduate School of The University of Texas at Austin in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Science in Engineering The University of

Texas at Austin, USA. 2013. – 33 p.

179. Bianchi N. Analysis and design of a PM brushless motor for high-speed operations / N. Bianchi, S. Bolognani, F. Luise // Energy conversion, IEEE transactions on, 20(3). – 2005. pp. 629-637.

180. Bianchi N. Potentials and limits of high-speed PM motors / N. Bianchi, S. Bolognani, F. Luise // Industry Applications, IEEE Transactions on, 40(6). – 2004. pp. 1570-1578.

181. Binder A. Losses in High Speed Permanent Magnet Motor with magnetic levitation for 40000/min, 40 kW / A. Binder, M. Klohr, T. Schneider // In Proc. of the 16th Int. Conf. on Electrical machines (ICEM). Krakow (Poland). – 2004. pp. 5-8.

182. Boldea I. PM-assisted reluctance synchronous motor/generator (PM-RSM) for mild hybrid vehicles: electromagnetic design / I. Boldea, L. Tutelea, C.I. Pitic // Industry Applications, IEEE Transactions on 40.2. – 2004. pp. 492-498.

183. Boldea I. The electric generators handbook. Synchronous generators / Ion Boldea. (The electric power engineering series) © by Taylor & Francis Group, LLC. – 2006. – 444 p.

184. Borisavljevic A. Limits, Modeling and Design of High-Speed Permanent Magnet Machines / A. Borisavljevic, Proefschrift ter verkrijging van de graad van doctor aan de Technische Universiteit Delft (Doctoral Thesis). Luyben, Netherlands. 2011. – 219 p.

185. Bottauscio O. Additional losses in induction machines under synchronous no-load conditions / O. Bottauscio, M. Oriano, A. Manzin, M. Zucca // Magnetics, IEEE Transactions on 40.5. – 2004. pp. 3254-3261.

186. Burdet L. Active magnetic bearing design and characterization for high temperature applications/L.Burdet, (Doctoral dissertation), Lausanne, EPFL. 2006. – 135 p.

187. Cables, Litz wires, Plastic hoses, Flexible connections [Электронный ресурс] / DACPOL – 2016. – [1 с.]. – Режим доступа: <http://www.dacpol.eu/en/cables-litz-wires-plastic-hoses-flexible-connections-454-1390> – Назва з екрану. – Дата звернення: 25.08.2016.

188. Ceramic bearings and exsev bearings [Электронный ресурс] / Kooyo – 2009. –

[70 с.]. – Режим доступа: http://www.podshipnik.ru/docs/koyocatb2004e_ceramic.pdf – Назва з екрану. – Дата звернення: 28.03.2016.

189. Chebak A. Optimal design of a high-speed slotless permanent magnet synchronous generator with soft magnetic composite stator yoke and rectifier load / A. Chebak, P. Viarouge, J. Cros // *Mathematics and Computers in Simulation*, 81(2). – 2010. pp. 239-251.

190. Chedot L. A cross saturation model for interior permanent magnet synchronous machine. Application to a starter-generator / L. Chedot, G. Friedrich // *In Industry Applications Conference, 39th IAS Annual Meeting. Conference Record of the IEEE (Vol. 1)*. – 2004. pp. 10-17.

191. Chen J. Development of a high-speed permanent-magnet brushless DC motor for driving embroidery machines / J. Chen, Y. Guo, J. Zhu // *Magnetics, IEEE Transactions on*, 43(11). – 2007. pp. 4004-4009.

192. Cho H.W. Analytical calculation of rotor losses in high-speed permanent magnet synchronous motor at different load conditions / H.W. Cho, H.K. Sung, J.Y. Choi, D.J. You, J.H. Park, S.M. Jang, S.H. Lee // *Journal of Applied Physics*, 103(7). – 2008. pp. 07F129.

193. Chun Y. Coupled-field thermal analysis of high-speed permanent magnetic generator applied in micro-turbine generator / Y. Chun, W. Keyin, W. Xiaonian // *Electrical Machines and Systems, ICEMS 2005. Proceedings of the Eighth International Conference*, vol.3. – 2005. pp. 2458-2461.

194. Cichowski A. Bezcujnikowy rozruch wysokoobrotowej maszyny synchronicznej z magnesami trwałym / A. Cichowski, S. Bujacz, J. Nieznański, P. Szczepankowski // *Przegląd Elektrotechniczny*. – 2010. № 86. pp. 121-124.

195. Cros J. Synthesis of high performance PM motors with concentrated windings / J. Cros, P. Viarouge // *Energy conversion, IEEE Transactions on* 17(2). – 2002. pp. 248-253.

196. Crovac Magnetoflex Vacozetsemivac Sensorvac Ductile Permanent Magnet Alloys and Magnetically Semi-Hard Materials [Електронний ресурс] / *Vacuumschmelze GmbH* – 1999. – [12 с.]. – Режим доступа: <http://www.vacuumschmelze.com/fileadmin/>

documents/broschueren/htbrosch/Pd-003en.pdf – Назва з екрану. – Дата звернення: 17.03.2016.

197. Dajaku G. Eddy current loss minimization in rotor magnets of PM machines using high-efficiency 12-teeth/10-slots winding topology / G. Dajaku, D. Gerling // Electrical Machines and Systems (ICEMS), 2011 International Conference on IEEE, 2011. Beijing, China.

198. Deeb R. Thermal Calculation of Permanent Magnet Motors in High Current Technology / R. Deeb, Brno University of Technology, Faculty of Electrical Engineering and Communication (Doctoral thesis). 2013. – 94 p.

199. Degner M.W. A rotor lamination design for surface permanent magnet retention at high speeds / M.W. Degner, R. Van Maaren, A. Fahim, D.W. Novotny // Industry Applications, IEEE Transactions on, 32(2). – 1996. № 32(2). pp. 380-385.

200. Delivery programme and characteristics for Tenax® IMS65 filament yarn [Електронний ресурс] / Toho Tenax Europe GmbH – 2010. – [1 с.]. – Режим доступу: <http://www.havel-composites.com/proddocs/IMS65%20E23%20en%202010-01.pdf> – Назва з екрану. – Дата звернення: 05.05.2016.

201. DIN 31652/1, Hydrodynamische Radial-Gleitlager im stationären Betrieb, Teil 1: Berechnung von Kreiszyylinderlagern, DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Beuth Verlag GmbH Berlin, April 1983. – 16 p.

202. DIN 31652/2, Hydrodynamische Radial-Gleitlager im stationären Betrieb, Teil 2: Funktionen für die Berechnung von Kreiszyylinderlagern, DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Beuth Verlag GmbH Berlin, April 1983. – 19 p.

203. DIN 31652/3, Hydrodynamische Radial-Gleitlager im stationären Betrieb, Teil 3: Betriebsrichtwerte für die Berechnung von Kreiszyylinderlagern, DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Beuth Verlag GmbH Berlin, April 1983. – 7 p.

204. Dubas F. Design of a high-speed permanent magnet motor for the drive of a fuel cell air-compressor / F. Dubas, C. Espanet, A. Miraoui // In Vehicle Power and Propulsion, Conference IEEE. – 2005. pp. 603-610.

205. Electrical Steel [Електронний ресурс] / POSCO – 2014. – [19 с.]. – Режим доступу: http://www.poscothailand.com/wp-content/uploads/2014/07/e_electrical_pdf_

2011 . pdf – Назва з екрану. – Дата звернення: 07.09.2015.

206. Frelin W. Transformer winding losses evaluation when supplying non linear load / W. Frelin, M. Berthet, M. Petit, J. C. Vannier // In Universities Power Engineering Conference (UPEC09), Proceedings of the 44th International IEEE. – 2009. pp. 1-5.

207. Gałuszkiewicz Z. Wysokoobrotowy silnik PM BLDC / Z. Gałuszkiewicz, K. Krykowski, R. Miksiewicz, J. Hetmańczyk // Przegląd Elektrotechniczny. – 2010. № 86(2). pp. 160-163.

208. Gieras J.F. Design of a high-speed permanent-magnet brushless generator for microturbines / J.F. Gieras, U. Jonsson // ELECTROMOTION. – 2005. № 12. pp. 86-91.

209. Gieras J.F. et al. Axial Flux Permanent Magnet Brushless Machine / J.F. Gieras, G R. Wang, M. J. Kamper, Springer Science & Business Media. 2008. – 340 p.

210. Gieras J.F. Permanent magnet motor technology: design and applications / J.F. Gieras, Third edition. CRC Press. London, New York. 2010. – 603 p.

211. Gilson A. Design of a cost-efficient high-speed high-efficiency PM machine for compressor applications / A. Gilson, S. Tavernier, M. Gerber, C. Espanet, F. Dubas, D. Depernet // In Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE), IEEE . – 2015. pp. 3852-3856.

212. Grössinger R., Schrefl T., Scholz W. Calculation of eddy currents in metal samples / Projektarbeit Hart- u. Weichmagnete LV-Nr. 131.019 [Електронний ресурс] / – 1999. – [49 с.]. – Режим доступу: <http://magnet.atp.tuwien.ac.at/scholz/projects/proj3/> – Назва з екрану. – Дата звернення: 07.09.2015.

213. Han S.H. Analysis of rotor core eddy-current losses in interior permanent-magnet synchronous machines / Han Seok-Hee, T. M. Jahns, Z. Q. Zhu // Industry Applications, IEEE Transactions on, 46(1). – 2010. pp. 196-205.

214. Hendershot J.R. et al. Design of Brushless Permanent-Magnet Motors / J.R. Hendershot, TJE Miller, Magna Phisics Publishing and Clarendon Press; Oxford. 1994. – 581 p.

215. Herrault F. Ultraminiaturized high-speed permanent-magnet generators for milliwatt-level power generation / F. Herrault, C.H. Ji, M.G. Allen // Microelectromechanical Systems, Journal of, 17(6). – 2008. pp. 1376-1387.

216. (HF-) Litz Wire & Special Cables [Электронный ресурс] / Synflex Elektro GmbH – 2016. – Режим доступа: <http://www.synflex.com/de/broschueren/hflitzen/pdflash.html?modal=false&width=950&height=730&l=en> – Назва з екрану. – Дата звернення: 14.04.2016.

217. High-speed permanent magnet motor solutions for aeration blowers [Электронный ресурс] / ©SKF, BeyondZero – 2013. – [2 с.]. – Режим доступа: <http://www.skf.com/binary/21-121449/360-Magnet-motor-solutions---13624-EN.pdf> – Назва з екрану. – Дата звернення: 18.03.2016.

218. High-speed permanent magnet motor solutions from SKF [Электронный ресурс] / ©SKF, BeyondZero – 2013. – [8 с.]. – Режим доступа: <http://www.skf.com/binary/30-121984/High-speed-magnet-motor-solutions---13625-EN.pdf> – Назва з екрану. – Дата звернення: 18.03.2016.

219. Holm S.R. Modelling and optimization of a permanent magnet machine in a flywheel / S.R. Holm, Proefschrift ter verkrijging van de graad van doctor aan de Technische Universiteit Delft (Doctoral Thesis). Luyben, Netherlands. 2003. – 249 p.

220. Hong D. K. Development of a super high speed motor-generator and controller / D. K. Hong, M. H. Ahn, D. S. Joo, B. C. Woo, D. H. Koo // *Journal of Applied Physics*, 115(17). – 2014. pp. 17E705.

221. Hong D. K. Ultra high speed motor supported by air foil bearings for air blower cooling fuel cells / D. K. Hong, B. C. Woo, J. Y. Lee, D. H. Koo // *Magnetics, IEEE Transactions on*, 48(2). – 2012. pp. 871-874.

222. Huang W.Y. Optimization of magnet segmentation for reduction of eddy-current losses in permanent magnet synchronous machine / W.Y. Huang, A. Bettayeb, R. Kaczmarek, J.C. Vannier // *IEEE Transactions on energy conversion*, 25(2). – 2010. pp. 381-387.

223. Huang Y. Loss Calculation and Thermal Analysis of a High Speed Claw Pole Motor with Soft Magnetic Composite Core / Y. Huang, Y. Guo, J. Zhu // In *Australasian Universities Power Engineering Conference*. Victoria University https://www.researchgate.net/profile/Youguang_Guo/publication/228804518_Loss_Calculation_and_T

hermal_Analysis_of_a_High_Speed_Claw_Pole_Motor_with_Soft_Magnetic_Composite_Core/links/0f31753c5c53d6e12a000000.pdf. – 2006. pp.

224. Huang Y. Thermal Analysis of High-Speed SMC Motor Based on Thermal Network and 3-D FEA With Rotational Core Loss Included / Y. Huang, J. Zhu, Y. Guo // *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol.45, no.10. – 2009. pp. 4680-4683.

225. INCONEL® alloy 718 [Электронный ресурс] / Special Metals Corporation – 2007. – [28 с.]. – Режим доступа: <http://www.specialmetals.com/documents/Inconel%20alloy%20718.pdf> – Назва з екрану. – Дата звернення: 18.03.2016.

226. Induction Generator Based Cogeneration Modules Tecogen CM-60 & CM-75 [Электронный ресурс] / Tecogen Inc – 2016. – Режим доступа: <http://www.tecogen.com/products-cogeneration-cm-60.htm> – Назва з екрану. – Дата звернення: 17.03.2016.

227. In-situ balancing of high-speed rotors [Электронный ресурс] / Centrum průmyslového výzkumu Techlab s.r.o – 2008. – [8 с.]. – Режим доступа: <http://www.techlab.cz/en/BalRot1BM.pdf> – Назва з екрану. – Дата звернення: 18.03.2016.

228. Ishak D. Eddy-current loss in the rotor magnets of permanent-magnet brushless machines having a fractional number of slots per pole / D. Ishak, Z.Q. Zhu, D. Howe // *Magnetics, IEEE Transactions on*, 41(9). – 2010. pp. 2462-2469.

229. Islam M. J. Eddy-current loss and temperature rise in the form-wound stator winding of an inverter-fed cage induction motor / M. J. Islam, H. V. Khang, A.-K. Repo, A. Arkkio // *Magnetics, IEEE Transactions on* 46.8 . – 2010. pp. 3413-3416.

230. ISO 281:2007: “Rolling Bearings—Dynamic Load Ratings and Rating Life.”

231. James B. P. High Speed Generator for Turbocharger Based Domestic Combined Heat and Power Unit Employing the Inverted Brayton Cycle / B. P. James, B. Zahawi // *Energy Procedia*. – 2013. № 42. pp. 249-260.

232. Jang S. M. Analysis on operational power and eddy current losses for applying coreless double-sided permanent magnet synchronous motor/generator to high-power flywheel energy storage system / S. M. Jang, J. H. Park, D. J. You, S. H Choi // *Journal of Applied Physics*, 105(7). – 2009. pp. 07F116.

233. Judge A. Air gap elimination in permanent magnet machines / A. Judge, Worcester Polytechnic Institute (Doctoral thesis). 2011. – 157 p.

234. Jumayev S. Three-Dimensional Analytical Model of Helical Winding PM Machines Including Rotor Eddy-Currents / S. Jumayev, J. Paulides, K. Boynov, J. Pyrhonen, E. Lomonova // *Magnetics, IEEE Transactions* – в роботі.

235. Kano M. Efficiency Improvement and Loss Analysis of Ultra-High Speed Permanent-Magnet Motor / M. Kano, T. Noguchi // *In The International Workshop on Mechatronics, Supalai Resort, Saraburi, Thailand*. http://pelab.nagaokaut.ac.jp/omomlab/paper/2006/Mechatronics2006_KANO.pdf. – 2006.

236. Kim S.I. A novel rotor configuration and experimental verification of interior PM synchronous motor for high-speed applications / S.I. Kim, Y. K. Kim, G.H. Lee, J.P. Hong // *Magnetics, IEEE Transactions on*, 48(2). – 2012. pp. 843-846.

237. Kolondzovski Z. Comparative thermal analysis of different rotor types for a high-speed permanent-magnet electrical machine / Z. Kolondzovski, A. Belahcen, A. Arkkio // *Electric Power Applications, IET* , vol.3, no.4. – 2009. pp. 279-288.

238. Kolondzovski Z. Multiphysics thermal design of a high-speed permanent-magnet machine / Z. Kolondzovski, A. Belahcen, A. Arkkio // *Applied Thermal Engineering*, 29(13). – 2009. pp. 2693-2700.

239. Kolondzovski Z. Power limits of high-speed permanent-magnet electrical machines for compressor applications / Z. Kolondzovski, A. Arkkio, J. Larjola, P. Sallinen // *Report Series on Electromechanics, Report 76, Aalto University School of Science and Technology, Espoo*. – 2010. pp. 1-21.

240. Kolondzovski Z. Thermal and mechanical analyses of high-speed permanent-magnet electrical machines / Z. Kolondzovski, Department of Electrical Engineering, Aalto University School of Science and Technology (Doctoral thesis). Espoo. 2010. – 94 p.

241. Komar I. Hydrodynamic and Elastohydrodynamic Lubrication Models to Verify the Performance of Marine Propulsion Shafting / I. Komar, N. Vulić, L. Roldo // *Transactions of FAMENA*, 37(1). – 2013. pp. 15-27.

242. Latka M. The analysis of the distortion of voltages and currents of an AC/DC converter used in a high-speed drive system in household equipment / M. Latka, M. Grad // *Przegląd Elektrotechniczny*. – 2011. № 87(8). pp. 82-86.

243. Lenasi K. Calculation of power losses in ultra high speed PM motor / K. Lenasi, M. Berlec, D. Makuc // *Compel: International journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 19(2). – 2000. pp. 495-501.

244. Li J. Effects of MMF harmonics on rotor eddy-current losses for inner-rotor fractional slot axial flux permanent magnet synchronous machines / J. Li, D.W. Choi, D.H. Son, Y.H. Cho // *Magnetics, IEEE Transactions on*, 48(2). – 2012. pp. 839-842.

245. Lis M. Model matematyczny elektromechanicznych stanów nieustalonych silnika typu BLDC zasilanego ze źródła napięcia sinusoidalnego / M. Lis, O. Makarchuk // *Zeszyty Problemowe – Maszyny Elektryczne.* – 2013. № 1 (98). pp. 183-188.

246. Lis M. Model matematyczny silnika synchronicznego z magnesami trwałymi o sterowaniu sinusoidalnym zasilanego ze źródła prądowego / M. Lis, O. Makarchuk // *Zeszyty Problemowe – Maszyny Elektryczne.* – 2012. № 3 (96). pp. 175-178.

247. Lis M. Model matematyczny układu napędowego z silnikiem PMSM zasilanym ze źródła napięcia sinusoidalnego / M. Lis, O. Makarchuk // *Przeglad Electrotechniczny.* – 2013. № 12. pp. 211-214.

248. Liu G.R. Meshfree methods: moving beyond the finite element method / G.R. Liu, Taylor & Francis. 2003. – 693 p.

249. Liu R. Modeling of eddy-current loss of electrical machines and transformers operated by pulsewidth-modulated inverters / R. Liu, C.C. Mi, D.W. Gao // *Magnetics, IEEE Transactions on*, 44(8). – 2008. pp. 2021-2028.

250. Luomi J. Efficiency optimization of a 100-W 500 000-r/min permanent-magnet machine including air-friction losses / J. Luomi, C. Zwyssig, A. Looser, J.W. Kolar // *Industry Applications, IEEE Transactions on*, 45(4). – 2009. pp. 1368-1377.

251. MacDonald D.C. A new lumped steady-state synchronous machine model derived from finite element analysis / D.C. MacDonald // *Energy Conversion, IEEE Transactions on* 14(1). – 1999. pp. 1-7.

252. Machine design databook [Электронный ресурс] / The McGraw-Hill Companies – 2004. – [1282 с.]. – Режим доступа: http://www.digitalengineeringlibrary.com/PROPERTIES_OF_ENGINEERING.pdf – Назва з екрану. – Дата звернення: 01.02.2010.

253. MachLine®: the perfect solution for your machine tools [Электронный ресурс] / MachLine®. – [71 с.]. – Режим доступа: http://www.ntn-snr.com/industry/fr/en-en/file.cfm/machline_catalogue_gb.pdf?contentID=2621 – Назва з екрану. – Дата звернення: 28.03.2016.

254. Madenci E. et al. The finite element method and application in engineering using ANSYS / E. Madenci, I. Guven, Springer. 2006. – 686 p.

255. Maga D. Additional losses in permanent magnet brushless machines / D. Maga, M. Zagirnyak, D. Miljavec // In Power Electronics and Motion Control Conference (EPE/PEMC), 2010 14th International. IEEE. – 2010. pp. 4-12.

256. Magnetic Alloy 2605SA1 (Iron-based). Technical Bulletin [Электронный ресурс] / Honeywell – 2001. – [2 с.]. – Режим доступа: [http://www.welkuan.com/docs/amorphous%20iron\(2605\).pdf](http://www.welkuan.com/docs/amorphous%20iron(2605).pdf) – Назва з екрану. – Дата звернення: 26.04.2016.

257. Magnussen F. Winding factors and Joule losses of permanent magnet machines with concentrated windings / F. Magnussen, C. Sadarangani // In Electric Machines and Drives Conference, IEMDC'03. IEEE International. – 2003. № Vol. 1. pp. 333-339.

258. Makarchuk O. V. Additional losses in the stator windings of the high-speed brushless electrical machine with the permanent magnets / O. V. Makarchuk // Scientific Bulletin of National Mining University. – 2016. № 6. pp. 107-113.

259. Makarchuk O. Analiza stanu cieplnego wysokoobrotowych maszyn elektrycznych o wzbudzeniu od magnesów trwałych z chłodzeniem cieczowym / O. Makarchuk, M. Lis, A. Gastołek, J. Sosnowski // Zeszyty Problemowe – Maszyny Elektryczne. – 2015. № 1 (98). pp. 7-15.

260. Makarchuk O. Metoda wyznaczania parametrów i charakterystyk wysokoobrotowej bezszczotkowej prądnicy z wzbudzeniem magnesami trwałymi dla stanów ustalonych / O. Makarchuk, A. Rusek, M. Patro, A. Gastołek // Zeszyty Problemowe – Maszyny Elektryczne. – 2016. № 3 (111). pp. 45-52.

261. Makarchuk O. Optimization of the design of electromagnetic transformer of mechanical energy into heat for VAWT / O. Makarchuk, A. Rusek, I. Shchur, V. Klymko // Przegląd Elektrotechniczny. – 2015. № 12. pp. 151-154.

262. Makarchuk O. The electromagnetic transformer of mechanical energy into heat

for wind turbine / O. Makarchuk, A. Rusek, I. Shchur, V. Shchur // *Przegland Electrotechniczny*. – 2015. № 1. pp. 179-182.

263. Merdzan M. Comparative analysis of rotor losses in high-speed permanent magnet machines with different winding configurations considering the influence of the inverter PWM / M. Merdzan, J. J.H. Paulides, E.A. Lomonova // *In Ecological Vehicles and Renewable Energies (EVER), 2015 Tenth International Conference on IEEE*. – 2015. pp. 1-8.

264. Moaveni, Saeed. Finite element analysis: theory and application with ANSYS / S. Moaveni. © 1999 Prentice hall, US, – 527 p.

265. Motor spindle overview [Электронный ресурс] / IBAG North America – 2012. – [7 с.]. – Режим доступа: <http://www.sergeev-hsc.de/media/30e70649f298cbdeffff80a2fffffef.pdf> – Назва з екрану. – Дата звернення: 30.03.2016.

266. Nagorny A. High speed Permanent magnet synchronous motor/generator design for flywheel applications [Электронный ресурс] / National research council associateship award. – 2004. – [34 с.]. – Режим доступа: <http://83.172.160.181/free-energy-info.tuks.nl/P25.pd> – Назва з екрану. – Дата звернення: 07.09.2015.

267. Nagorny A.S. Experimental performance evaluation of a high speed permanent magnet synchronous motor and drive for a flywheel application at different frequencies / A.S. Nagorny, R.H. Jansen, M.D. Kankam // *Proc. ICEM 2006, Chania (Greece)*. – 2007. pp. 12.

268. Nanocrystalline soft magnetic material FINEMET [Электронный ресурс] / Hitachi Metals, Ltd – 2005. – [12 с.]. – Режим доступа: <http://www.hilltech.com/pdf/hl-fm10-cFinemetIntro.pdf> – Назва з екрану. – Дата звернення: 18.03.2016.

269. Nategh S. Thermal Analysis and Management of High-Performance Electrical Machines / S. Nategh, Department of Electrical Energy Conversion, KTH Royal Institute of Technology (Doctoral Thesis). Stockholm, Sweden. 2013. – 137 p.

270. Nd-Fe-B Magnets, Properties and Applications [Электронный ресурс] / Michael Weickmann, Vacuumschmelze GmbH & Co. KG, Hanau, Germany – 2009. – [10 с.]. – Режим доступа: <http://www.vacuumschmelze.com/fileadmin/documents/pdf/>

fipublikationen/2009/NdFeB_Magnets___Properties_and_Applications_revised_13_03_09.pdf – Назва з екрану. – Дата звернення: 18.03.2016.

271. Nelson F.C. Rotor dynamics without equations / F.C. Nelson // International Journal of COMADEM. – 2007. № 10(3). pp. 2-10.

272. Nerg J. Thermal Analysis of Radial-Flux Electrical Machines With a High Power Density / J. Nerg, M. Rilla, J. Pyrhonen // Industrial Electronics, IEEE Transactions, vol.55, no.10. – 2008. pp. 3543-3554.

273. Niu S. Analysis of eddy-current loss in a double-stator cup-rotor PM machine / S. Niu, K. T. Chau, J. Z. Jiang // Magnetics, IEEE Transactions on 44.11 (2008), pp. 4401-4404.

274. Niu S. Eddy current reduction in high-speed machines and eddy current loss analysis with multislice time-stepping finite-element method / S. Niu, S.L. Ho, W.N. Fu, J. Zhu // IEEE Transactions on, 48(2). – 2012. pp. 1007-1010.

275. Noguchi T. 220,000-r/min, 2-kW permanent Magnet Motor Drive for Turbocharger / T. Noguchi, Y. Takata, Y. Yamashita, Y. Komatsu, S. Ibaraki // In International Power Electronics Conference (IPEC-Niigata 2005). – 2005. pp. 0-6.

276. Noguchi T. Development of 150000 r/min, 1.5 kW permanent-magnet motor for automotive supercharger / T. Noguchi, M. Kano // In Power Electronics and Drive Systems, PEDS'07. 7th International Conference on IEEE. – 2007. pp. 183-188.

277. NovaDrive 400 and NovaGen 400 Product Specifications [Електронний ресурс] / Synchrony; Inc. – 2009. – [2 с.]. – Режим доступу: http://www.synchrony.com/support/documents/12-2010_NovaDrive400.pdf – Назва з екрану. – Дата звернення: 30.03.2016.

278. Ohsieger B. Proračun kružno-cilindričnog kliznog ležaja s hidrodinamičkim podmazivanjem. Rijeka, 2001. – 49 s.

279. Ouyang Z. The analysis and comparison of leakage inductance in different winding arrangements for planar transformer / Z. Ouyang, O. C. Thomsen, M. A. Andersen // In Power Electronics and Drive Systems, PEDS 2009. International Conference on IEEE. – 2009. pp. 1143-1148.

280. Paulides J.J. An evaluation of alternative stator lamination materials for a high-speed, 1.5 MW, permanent magnet generator / J.J. Paulides, G.W. Jewell, D. Howe // *Magnetics*, IEEE Transactions on 40(4). – 2004. pp. 2041-2043.

281. Perryman R. High efficiency high speed PM motors for the more electric aircraft / R. Perryman, L. M. Mhango // *Proceedings of the 6th WSEAS International Conference on Power Systems*, Lisbon, Portugal. – 2006. № 1(7). pp. 368-375.

282. Petrov I. Hysteresis losses in different types of permanent magnets used in PMSMs / I. Petrov, D. Egorov, J. Link, S. Ruoho, J. Pyrhonen // *IEEE Transactions on Industrial electronics*. – 2016. pp. p.9 в роботі.

283. Petrov I. Performance of low-cost permanent magnet material in PM synchronous machines / I. Petrov, J. Pyrhonen // *Industrial Electronics*, IEEE Transactions on, 60(6). – 2013. pp. 2131-2138.

284. Pfister P.D. Very-high-speed slotless permanent-magnet motors: Analytical modeling, optimization, design, and torque measurement methods / P.D. Pfister, Y. Perriard // *Industrial Electronics*, IEEE Transactions on, 57(1). – 2010. pp. 296-303.

285. Piróg S. Sterowanie wysokoobrotowymi silnikami do urządzeń AGD / S. Piróg, M. Baszyński, T. Siostrzonek // IX Krajowa Konferencja Naukowa «Sterowanie w Energoelektronice i Napędzie» http://www.sene.p.lodz.pl/index.php?www=arch_2009.html. – 2009.

286. Pirogova N.S. Calculative and Experimental Analysis of Natural and Critical Frequencies and Mode Shapes of High-speed Rotor for Micro Gas Turbine Plant / N.S. Pirogova, P.A. Taranenko // *Procedia Engineering*. – 2015. № 129. pp. 997-1004.

287. Polinder H. Eddy-current losses in the segmented surface-mounted magnets of a PM machine / H. Polinder, M.J. Hoeijmakers // *In Electric Power Applications*, IEE Proceedings. Vol. 146. – 1999. № 3. pp. 261-266.

288. Power Electronics [Електронний ресурс] / Beacon Power, LLC – 2015. – Режим доступу: <http://beaconpower.com/power-electronics> – Назва з екрану. – Дата звернення: 07.09.2015.

289. Pratte D. Thermal Energy Recovery System – Turbo Revolution [Електронний ресурс] / David Pratte // – 2014. – Режим доступу: <http://www.superstreetonline.com/>

how-to/engine/1403-turbcharger-thermal-energy-recovery-systems/ – Назва з екрану. – Дата звернення: 07.09.2015.

290. Products [Електронний ресурс] / CARO-PROMETA Metallvertriebs GmbH – 2016. – Режим доступу: <http://www.caro-prometa.de/internet/en/produkte/produkte.jsp> – Назва з екрану. – Дата звернення: 14.04.2016.

291. Pyrhönen J. High-speed high-output solid-rotor induction-motor technology for gas compression / J. Pyrhönen, J. Nerg, P. Kurronen, U. Lauber // *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 57(1). – 2010. pp. 272-280.

292. Pyrhönen J. et al. Design Process of Rotating Electrical Machines. Design of Rotating Electrical Machines / J. Pyrhönen, T. Jokinen, V. Hrabovcova, John Wiley & Sons, Ltd. 2008. – 512 p.

293. Rare-earth permanent magnets [Електронний ресурс] / Vacuumschmelze GmbH & co.KG – 2012. – [56 с.]. – Режим доступу: http://www.vacuumschmelze.com/fileadmin/documents/broschueren/dmbrosch/PD-002_e_310807.pdf – Назва з екрану. – Дата звернення: 18.03.2016.

294. Riba J. R. Rare-earth-free propulsion motors for electric vehicles: A technology review / J. R. Riba, C. Lopez-Torres, L. Romeral, A. Garcia // *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. – 2016. № 57. pp. 367-379.

295. Saari J. Thermal analysis of high-speed induction machines / J. Saari // *Acta Polytechnica Scandinavica. Electrical Engineering Series No. 90. (Doctoral thesis)*. Helsinki 1998. – 73 p.

296. Saleh S.A. Steady-state performance analysis and modelling of directly driven interior permanent magnet wind generators / S.A. Saleh, M.A. Khan, M.A. Rahman // *Renewable Power Generation, IET*, 5(2). – 2011. pp. 137-147.

297. Schlemmer E., Müller F. Electromagnetic Finite Element Calculations of Permanent Magnet Generators for ECOBulb and HYDROMATRIX Applications [Електронний ресурс] / In Proceedings of the International conference on renewable energies and power quality (ICREPQ'03) – 2003. – Режим доступу: https://www.researchgate.net/profile/Erwin_Schlemmer/publication/228901701_Electromagnetic_Finite_Element_calculations_of_permanent_magnet_generators_for_ECOBulb_and_HYDRO

MATRIX_applications/links/0fcfd5113563514e7f000000.pdf – Назва з екрану. – Дата звернення: 07.09.2015.

298. Shchur I. Modelowanie symulacyjno-komputerowe maszyny synchronicznej z magnesami trwałymi z uwzględnieniem nasycenia magnetycznego / I. Shchur, A. Rusek, O. Makarchuk // Zastosowania elektromagnetyzmu w nowoczesnych technikach i informatyce. XXII Sympozjum środowiskowe PTZE Sandomierz. – 2012. pp. 192-194.

299. Shchur I. Modelowanie symulacyjno-komputerowe silnika synchronicznego z magnesami trwałymi na podstawie wyników badań polowych / I. Shchur, A. Rusek, O. Makarchuk // Zeszyty Problemowe – Maszyny Elektryczne. – 2012. № 3 (96). pp. 189-195.

300. Shchur I. The Simulation Model of a Synchronous Machine with Permanent Magnets That Takes into Account Magnetic Saturation / I. Shchur, A. Rusek, O. Makarchuk, M. Lis // Przegląd Elektrotechniczny. – 2013. № 4. pp. 102-105.

301. Shen J.X. Reduction of rotor eddy current loss in high speed PM brushless machines by grooving retaining sleeve / J.X. Shen, H. Hao, M.J. Jin, C. Yuan // Magnetics, IEEE Transactions on, 49(7). – 2013. pp. 3973-3976.

302. Sim K. Thermal analysis of high-speed permanent magnet motor with cooling flows supported on gas foil bearings: part I-coupled thermal and loss modeling / K. Sim, Y.B. Lee, S.M. Jang, T.H. Kim // Journal of Mechanical Science and Technology, 29(12). – 2015. pp. 5469-5476.

303. Sim K. Thermal analysis of high-speed permanent magnet motor with cooling flows supported on gas foil bearings: part II-bearing modeling and case studies / K. Sim, Y.B. Lee, S.M. Jang, T.H. Kim // Journal of Mechanical Science and Technology, 29(12). – 2015. pp. 5477-5483.

304. Šimek J. Unorthodox behavior of a rigid rotor supported in sliding bearings / J. Šimek, J. Tůma, J. Škuta, R. Klečka // In Proc. Colloquium Dynamics of Machines, Prague. – 2010. pp. 1-6.

305. Soft Magnetic Cobalt-Iron-Alloys. VACOFLUX 48 VACOFLUX 50 VACODUR 50 VACOFLUX 17 [Електронний ресурс] / Vacuumschmelze GmbH & co.KG – 2001. – [8 с.]. – Режим доступу: <http://www.vacuumschmelze.com/fileadmin/>

docroot/medialib/documents/broschuere/htbrosch/Pht-004_e.pdf – Назва з екрану. – Дата звернення: 18.03.2016.

306. Somaloy®Technologyby Höganäs [Електронний ресурс] / Höganäs East Europe LLC – 2008. – [104 с.]. – Режим доступу: www.hoganas.com/globalassets/media/sharepoint-documents/BrochuresanddatasheetsAllDocuments/Somaloy_Technology.pdf – Назва з екрану. – Дата звернення: 14.04.2016.

307. Static and Dynamic Balancing of Rigid Rotors. Applications notes [Електронний ресурс] / Brüel & Kjær Sound & Vibration Measurement A/S – 2007. – [20 с.]. – Режим доступу: <http://www.bksv.com/doc/bo0276.pdf> – Назва з екрану. – Дата звернення: 18.03.2016.

308. Staton D. Solving the more difficult aspects of electric motor thermal analysis / D. Staton, A. Boglietti, A. Cavagnino // In Electric Machines and Drives Conference, IEMDC'03. IEEE International. (Vol. 2). – 2003. pp. 747-755.

309. Stewart P. Dynamic model tracking design for low inertia, high speed permanent magnet ac motors / P. Stewart, V. Kadiramanathan // ISA transactions, 43(1). – 2004. pp. 111-122.

310. Stolarski T.A. Tribology in machine design / T.A. Stolarski, Butterworth-Heinemann. 1990. – 298 p.

311. Stone G.C. et al. Electrical insulation for rotating machines: design, evaluation, aging, testing, and repair / G.C. Stone, E.A. Boulter, I. Culbert, IEEE Press Series on Power Engineering, John Wiley & Sons. 2004. (Vol. 21) – 371 p.

312. Super precision bearings [Електронний ресурс] / IBC Wälzlager GmbH – 2006. – [74 с.]. – Режим доступу: http://www.ibt-russia.com/pub/Super%20Precision%20Bearings_E.pdf – Назва з екрану. – Дата звернення: 28.03.2016.

313. Super-precision bearings [Електронний ресурс] / ®SKF, BeyondZero – 2014. – [424 с.]. – Режим доступу: <http://www.skf.com/binary/111-129877/13383-EN---Super-precision-bearings.pdf> – Назва з екрану. – Дата звернення: 28.03.2016.

314. Šušnjić L. Electromagnetic Analysis of a Radial-Flux Synchronous Machine Excited by Surface-Mounted Permanent Magnet / L. Šušnjić, Z. Haznadar // In 10th

International Symposium on Electromagnetic Fields in Electrical Engineering ISEF 2001. – 2001. pp. 211-216.

315. Takahashi I. A super high speed PM motor drive system by a quasi-current source inverter / I. Takahashi, T. Koganezawa, G. Su, K. Ohyama // Industry Applications, IEEE Transactions on, 30(3). – 1994. pp. 683-690.

316. The Evolution of Magnetic Bearings [Электронный ресурс] / Revolve Magnetic Bearings Inc., SKF Company – 2003. – [8 с.]. – Режим доступа: http://www.industrial-gp.ro/media/35349/rulmenti_magnetici_skf.pdf – Назва з екрану. – Дата звернення: 28.03.2016.

317. Thomas A.S. Proximity Loss Study In High Speed Flux-Switching Permanent Magnet Machine / A.S. Thomas, Z.Q. Zhu, G.W. Jewell // Magnetics, IEEE Transactions on 45(10). – 2009. pp. 4748-4751.

318. Toda H. Rotor eddy-current loss in permanent magnet brushless machines / H. Toda, Z.P. Xia, J. B. Wang, K. Atallah, D. Howe // IEEE transactions on magnetics, 40(4). – 2004. pp. 2104-2106.

319. US Pat. 6,239,520. Permanent magnet rotor cooling system and method. Stahl D. A., Vessa P. B. Capstone turbine corporation. 29.05.2001.

320. Uzhegov N.S. An analysis of the 6-slot 2-pole high-speed permanent magnet synchronous machines with tooth-coil windings / N.S. Uzhegov, J. Nerg, J. Pyrhonen // In Industrial Electronics Society, IECON 2015-41st Annual Conference of the IEEE. – 2015. pp. 001867-001872.

321. Wallmark O. Analysis of axial leakage in high-speed slotless PM motors for industrial hand tools / O. Wallmark, P. Kjellqvist, F. Meier // Industry Applications, IEEE Transactions on, 45(5). – 2009. pp. 1815-1820.

322. Wang J. Rotor eddy-current loss in permanent-magnet brushless AC machines / J. Wang, K. Atallah, R. Chin, W. M. Arshad, H. Lendenmann // Magnetics, IEEE Transactions on, 46(7). – 2010. pp. 2701-2707.

323. Wang J.Q. Design and analysis of electromagnetic properties for high speed PM generator [J] / J.Q. Wang, F.X. Wang, X.G. Kong // Proceedings of the CSEE. – 2008. № 20. pp. 105-110.

324. Wang X.H. Analysis of a Novel Flux-Weakening Structure of High-Speed Permanent-Magnet Motors Based on Soft-Magnetic Ferrite. / X.H. Wang, F.A.N.G. Xue, Y.J. Guo, X.H. Wang // Journal of Iron and Steel Research, International. – 2006. № 13. pp. 456-461.

325. WO 2005/046021. Rotor and bearing system for a turbomachine. D. Lubell, D. Weissert. Capstone turbine corporation. 19.05.2005.

326. Yamazaki K. Effect of eddy-current loss reduction by magnet segmentation in synchronous motors with concentrated windings / Yamazaki Katsumi, Yu Fukushima. // Industry Applications, IEEE Transactions on 47(2). – 2011. pp. 779-788.

327. Yamazaki K. Loss analysis of permanent magnet motors with concentrated windings-variation of magnet eddy current loss due to stator and rotor shapes / K. Yamazaki, Y. Fukushima, M. Sato // In Industry Applications Society Annual Meeting, IAS'08, IEEE International . – 2008. pp. 1-8.

328. Yu H.C Design methodology and self-turning velocity control for high-speed slim sensorless brushless direct current motors with self-lubricated bearings / H.C Yu, C.S. Jang, W.Y. Peng // Mechanism and Machine Theory. – 2015. № 84. pp. 134-144.

329. Zhao L. A highly efficient 200 000 RPM permanent magnet motor system / L. Zhao, C. Ham, L. Zheng, T. Wu, K. Sundaram, J. Kapat, L. Chow // Magnetics, IEEE Transactions on, 43(6). – 2007. pp. 2528-2530.

330. Zhou F. Study of retaining sleeve and conductive shield and their influence on rotor loss in high-speed PM BLDC motors / F. Zhou, J. Shen, W. Fei, R. Lin // Magnetics, IEEE Transactions on, 42(10). – 2006. pp. 3398-3400.

331. Zwysig C. An ultra-high-speed, 500000 rpm, 1 kW electrical drive system / C. Zwysig, M. Duerr, D. Hassler, J. W. Kolar // In Power Conversion Conference-Nagoya, PCC'07 IEEE. – 2007. pp. 1577-1583.

ДОДАТОК 1.

ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ МАГНІТНОГО ПОЛЯ МСЕ

Розглянемо застосування алгоритму, наведеного у п.2.2.2 на простому прикладі. Область розрахунку поля розділено на 4 СЕ. Густина струму є заданою у 9-му вузлі й становить $J_{z9} = 1 \times 10^6 \text{ А/м}^2$, абсолютна магнітна проникність середовища — $\mu = 10^6 \times \mu_0 \text{ Гн/м}$. У вузлах № 1, 7, 8 задано потенціал $A_{z1} = 0,1 \text{ Вб/м}$, а у вузлах № 4, 5 — $A_{z2} = 0,22 \text{ Вб/м}$. Конфігурація розрахункової області та крайова умова схематично показані на рис.Д1.1. Необхідно визначити значення потенціалу, індукції та напруженості магнітного поля у вузлах № 2, 3, 6, 9.

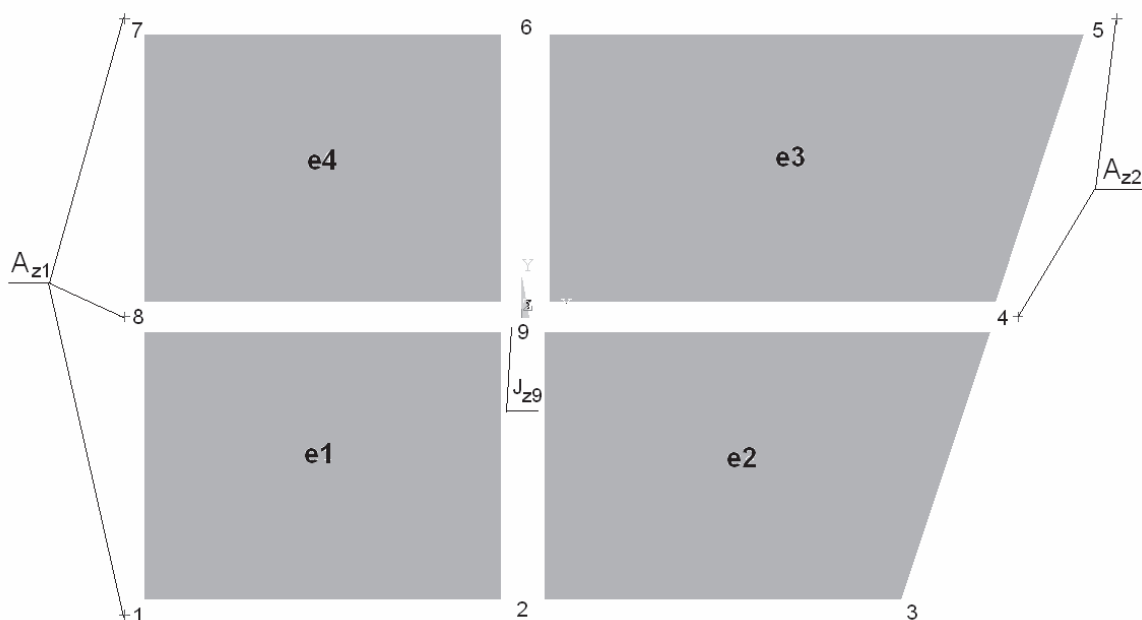


Рис. Д1.1 Скінченно-елементна модель

Так звана глобальна нумерація вузлів моделі разом з їх координатами у декартовій прямокутній СК наведена в табл. Д1.1.

Таблиця Д1.1

Координати вузлів скінченно-елементної моделі

№ вузла у глобальній нумерації	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x, м	-4	0	4	5	6	0	-4	-4	0
y, м	-3	-3	-3	0	3	3	3	0	0

Номери вузлів СЕ у локальній нумерації, згідно позначень прийнятих у

п. 2.1.1 для двовимірних елементів, та відповідні їм номери вузлів у глобальній нумерації наведено у табл. Д1.2.

Таблиця Д1.2

Відповідність локальної та глобальної нумерації вузлів моделі

Позначення вузла у локальній нумерації (див. рис. 2.2)	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>
№ вузла у локальній нумерації	1	2	3	4
№ вузлів у глобальній нумерації для СЕ №1	1	2	9	8
№ вузлів у глобальній нумерації для СЕ №2	2	3	4	9
№ вузлів у глобальній нумерації для СЕ №3	9	4	5	6
№ вузлів у глобальній нумерації для СЕ №4	8	9	6	7

На підставі інформації з табл. Д1.1 та Д1.2 формуємо координатні матриці елементів (2.20) та масив L_G (див. стор. 87).

$$\mathbf{C}_m^{[1]} = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{C}_m^{[2]} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & -3 \\ 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{C}_m^{[3]} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \\ 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{C}_m^{[4]} = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}; \quad L_G = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 9 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

Матриці Якобі для елементів (2.19) визначаємо як

$$\mathbf{J}^{[1]} = \mathbf{N}^{<s,t>} \mathbf{C}_m^{[e]} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{J}^{[2]} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 9+t & 0 \\ 1+s & 6 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{J}^{[3]} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 11+t & 0 \\ 1+s & 6 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{J}^{[4]} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Похідні функції форми, згідно до (2.17)

$$\mathbf{N}^{<x,y>[1]} = \left(\mathbf{J}^{[1]} \right)^{-1} \cdot \mathbf{N}^{<s,t>} = \begin{vmatrix} \frac{-1}{8} + \frac{t}{8} & \frac{1}{8} - \frac{t}{8} & \frac{1}{8} + \frac{t}{8} & \frac{-1}{8} - \frac{t}{8} \\ \frac{-1}{6} + \frac{s}{6} & \frac{-1}{6} - \frac{s}{6} & \frac{1}{6} + \frac{s}{6} & \frac{1}{6} - \frac{s}{6} \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{N}^{<x,y>[2]} = \begin{vmatrix} \frac{-1+t}{9+t} & \frac{1-t}{9+t} & \frac{1+t}{9+t} & \frac{-1-t}{9+t} \\ \frac{-1}{3} \cdot \frac{4+t-5s}{9+t} & \frac{-5}{3} \cdot \frac{1+s}{9+t} & \frac{4}{3} \cdot \frac{1+s}{9+t} & \frac{1}{3} \cdot \frac{5+t-4s}{9+t} \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{N}^{<x,y>[3]} = \begin{vmatrix} \frac{-1+t}{11+t} & \frac{1-t}{11+t} & \frac{1+t}{11+t} & \frac{-1-t}{11+t} \\ \frac{-1}{3} \cdot \frac{5+t-6s}{11+t} & \frac{-2}{1} \cdot \frac{1+s}{11+t} & \frac{5}{3} \cdot \frac{1+s}{11+t} & \frac{1}{3} \cdot \frac{6+t-5s}{11+t} \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{N}^{<x,y>[4]} = \mathbf{N}^{<x,y>[1]}.$$

Характеристичні елементні матриці, за (2.83)

$$\mathbf{K}_1^{[1]} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}_*^{<x,y>[1]} \mathbf{N}^{<x,y>[1]} \left| \mathbf{J}^{[1]} \right| ds dt = \frac{1}{72} \begin{vmatrix} 50 & -2 & -25 & -23 \\ -2 & 50 & -23 & -25 \\ -25 & -23 & 50 & -2 \\ -23 & -25 & -2 & 50 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{K}_1^{[2]} = \begin{vmatrix} 0,6889 & -0,02228 & -0,2822 & -0,3845 \\ & 0,8556 & -0,3845 & -0,4488 \\ (\text{симетр.}) & 0,6076 & 0,05908 & \\ & & & 0,7743 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{K}_1^{[3]} = \begin{vmatrix} 0,7533 & 0,07999 & -0,3167 & -0,5167 \\ & 0,9200 & -0,5167 & -0,4833 \\ (\text{симетр.}) & 0,6806 & 0,1528 & \\ & & & 0,8472 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{K}_1^{[4]} = \mathbf{K}_1^{[1]}.$$

Стовпці правих частин, за (2.84)

$$\bar{K}_2^{[1]} = \mu \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{N}[s,t]_* \bar{N}[s,t] \left| \mathbf{J}^{[1]} \right| ds dt \cdot \bar{J}_z^{[1]} = \|0,4189 \quad 0,8378 \quad 1,6755 \quad 0,8378\|_*;$$

$$\bar{K}_2^{[2]} = \|0,9425 \quad 0,4712 \quad 0,9948 \quad 1,9897\|_*; \quad \bar{K}_2^{[3]} = \|2,1991 \quad 1,0996 \quad 0,5760 \quad 1,1519\|_*;$$

$$\bar{K}_2^{[4]} = \|0,8378 \quad 1,6755 \quad 0,8378 \quad 0,4189\|_*;$$

за умови, що елементні вектори густин струмів —

$$\bar{J}_z^{[1]} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{z9} \\ 0 \end{vmatrix}; \quad \bar{J}_z^{[2]} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ J_{z9} \end{vmatrix}; \quad \bar{J}_z^{[3]} = \begin{vmatrix} J_{z9} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \quad \bar{J}_z^{[4]} = \begin{vmatrix} 0 \\ J_{z9} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Матриці

$$\mathbf{K}_{31}^{[1]} = \mathbf{K}_{31}^{[2]} = \mathbf{K}_{31}^{[3]} = \mathbf{K}_{31}^{[4]} = 0.$$

Розширені характеристичні матриці елементів, складені за правилом з п. 2.2.2 (див. стор. 87)

$$\mathbf{K}_{1p}^{[1]} = \begin{vmatrix} K_{1(1,1)}^{[1]} & K_{1(1,2)}^{[1]} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & K_{1(1,4)}^{[1]} & K_{1(1,3)}^{[1]} \\ K_{1(2,1)}^{[1]} & K_{1(2,2)}^{[1]} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & K_{1(2,4)}^{[1]} & K_{1(2,3)}^{[1]} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ K_{1(4,1)}^{[1]} & K_{1(4,2)}^{[1]} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & K_{1(4,4)}^{[1]} & K_{1(4,3)}^{[1]} \\ K_{1(3,1)}^{[1]} & K_{1(3,2)}^{[1]} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & K_{1(3,4)}^{[1]} & K_{1(3,3)}^{[1]} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0,6944 & -0,0278 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -0,3194 & -0,3472 \\ -0,0278 & 0,6944 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -0,3472 & -0,3194 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ -0,3194 & -0,3472 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0,6944 & -0,0278 \\ -0,3472 & -0,3194 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -0,0278 & 0,6944 \end{vmatrix} ;$$

$$\mathbf{K}_{1p}^{[2]} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & 0,6889 & -0,0223 & -0,2822 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -0,3845 \\ \bullet & -0,0223 & 0,8556 & -0,3845 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -0,4488 \\ \bullet & -0,2822 & -0,3845 & 0,6076 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -0,0591 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & -0,3845 & -0,4488 & -0,0591 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0,7743 \end{vmatrix} ;$$

$$\mathbf{K}_{1p}^{[3]} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & 0,92 & -0,5167 & -0,4833 & \bullet & \bullet & 0,08 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & -0,5167 & 0,6806 & 0,1528 & \bullet & \bullet & -0,3167 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & -0,4833 & 0,1528 & 0,8472 & \bullet & \bullet & -0,5167 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & 0,08 & -0,3167 & -0,5167 & \bullet & \bullet & 0,7533 & \bullet \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{K}_{1p}^{[4]} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0,6944 & -0,0278 & -0,3472 & -0,3194 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -0,0278 & 0,6944 & -0,3194 & -0,3472 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -0,3472 & -0,3194 & 0,6944 & -0,0278 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -0,3194 & -0,3472 & -0,0278 & 0,6944 & \bullet \end{pmatrix}.$$

Повна матриця коефіцієнтів, за (2.92)

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^4 \mathbf{K}_{1p}^{[e]} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,6944 & -0,0278 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -0,3194 & -0,3472 \\ -0,0278 & 1,3834 & -0,0223 & -0,2822 & \bullet & \bullet & \bullet & -0,3472 & -0,7039 \\ \bullet & -0,0223 & 0,8556 & -0,3845 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -0,4488 \\ \bullet & -0,2822 & -0,3845 & 1,5276 & -0,5167 & -0,4833 & \bullet & \bullet & 0,1391 \\ \bullet & \bullet & \bullet & -0,5167 & 0,6806 & 0,1528 & \bullet & \bullet & -0,3167 \\ \bullet & \bullet & \bullet & -0,4833 & 0,1528 & 1,5417 & -0,0278 & -0,3472 & -0,8361 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -0,0278 & 0,6944 & -0,3194 & -0,3472 \\ -0,3194 & -0,3472 & \bullet & \bullet & \bullet & -0,3472 & -0,3194 & 1,3889 & -0,0556 \\ -0,3472 & -0,7039 & -0,4488 & 0,1391 & -0,3167 & -0,8361 & -0,3472 & -0,0556 & 2,9165 \end{pmatrix}$$

Розширені вектори правих частин

$$\vec{K}_{2p}^{[1]} = \left\| \vec{K}_{2(1)}^{[1]} \quad \vec{K}_{2(2)}^{[1]} \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \vec{K}_{2(4)}^{[1]} \quad \vec{K}_{2(3)}^{[1]} \right\|_* =$$

$$= \left\| 0,4189 \quad 0,8378 \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad 0,8378 \quad 1,6755 \right\|_*;$$

$$\vec{K}_{2p}^{[2]} = \left\| \bullet \quad 0,9425 \quad 0,4712 \quad 0,9948 \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad 1,9897 \right\|_*;$$

$$\vec{K}_{2p}^{[3]} = \|\bullet \bullet \bullet 1,0996 \ 0,576 \ 1,1519 \bullet \bullet 2,1991\|_*;$$

$$\vec{K}_{2p}^{[4]} = \|\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet 0,8378 \ 0,4189 \ 0,8378 \ 1,6755\|_*;$$

Повний вектор правих частин

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= \sum_{e=1}^4 \vec{K}_{2p}^{[e]} = \\ &= \|0,4189 \ 1,7802 \ 0,4712 \ 2,0944 \ 0,576 \ 1,9897 \ 0,4189 \ 1,6755 \ 7,5398\|_*. \end{aligned}$$

Вилучимо з матриці \mathbf{K} та вектора \vec{Q} стрічки з номерами, що відповідають номерам вузлів із заданим значенням потенціалу. У стрічках матриці \mathbf{K} , що залишилися, перенесемо у праві частини, у вектор \vec{Q} , добутки відповідних коефіцієнтів на ці відомі значення потенціалу.

Отже, отримуємо

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} 1,3834 & -0,0223 & \bullet & -0,7039 \\ -0,0223 & 0,8556 & \bullet & -0,4488 \\ \bullet & \bullet & 1,5417 & -0,8361 \\ -0,7039 & -0,4488 & -0,8361 & 2,9165 \end{vmatrix},$$

$$\vec{Q} = \begin{vmatrix} Q_2 - A_{z1}(K_{2,1} + K_{2,8}) - A_{z2}K_{2,4} \\ Q_3 - A_{z2}K_{3,4} \\ Q_6 - A_{z1}(K_{6,7} + K_{6,8}) - A_{z2}(K_{6,4} + K_{6,5}) \\ Q_9 - A_{z1}(K_{9,1} + K_{9,7} + K_{9,8}) - A_{z2}(K_{9,4} + K_{9,5}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,8798 \\ 0,5558 \\ 2,0999 \\ 7,6539 \end{vmatrix}.$$

Розв'яжемо отриману САР, як

$$\vec{A}_z = \mathbf{K}^{-1} \vec{Q}.$$

Шуканий розв'язок $\vec{A}_z = \|4,1744 \ 3,6012 \ 4,3012 \ 5,4192\|_*$, дає значення потенціалу у вузлах № 2, 3, 6 та 9, відповідно та зображений на рис. Д1.2 а.

Для виконання подальших обчислень формуємо елементні вектори потенціалу

$$\vec{A}_z^{[1]} = \begin{vmatrix} 0,1 \\ 4,1744 \\ 5,4192 \\ 0,1 \end{vmatrix}; \quad \vec{A}_z^{[2]} = \begin{vmatrix} 4,1744 \\ 3,6012 \\ 0,22 \\ 5,4192 \end{vmatrix}; \quad \vec{A}_z^{[3]} = \begin{vmatrix} 5,4192 \\ 0,22 \\ 0,22 \\ 4,3012 \end{vmatrix}; \quad \vec{A}_z^{[4]} = \begin{vmatrix} 0,1 \\ 5,4192 \\ 4,3012 \\ 0,1 \end{vmatrix}.$$

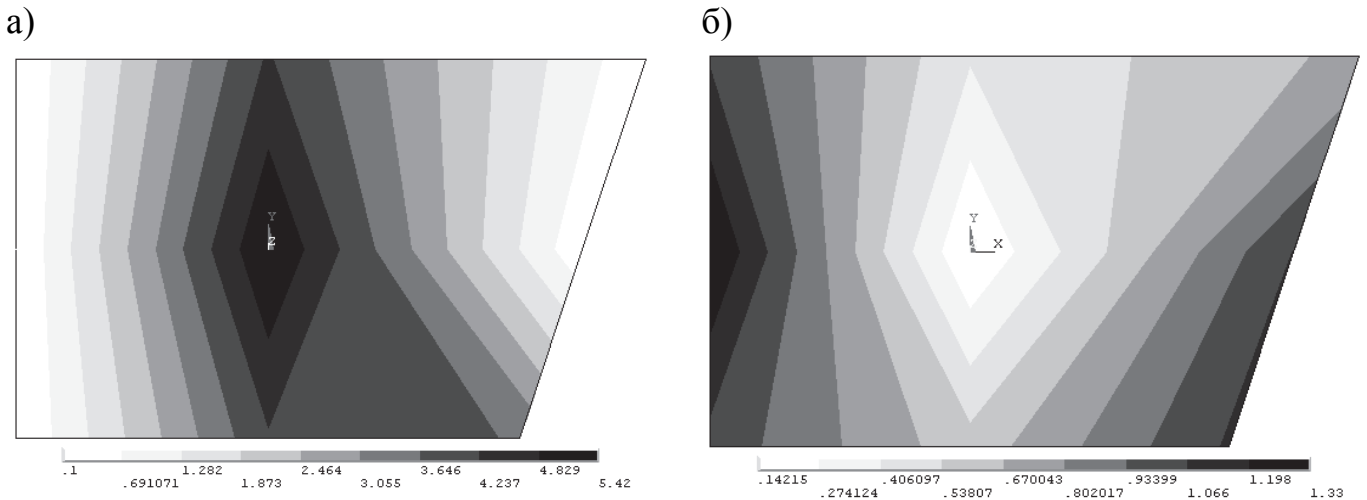


Рис. ДІ.2 Поле: а) векторного магнітного потенціалу, Вб/м;
б) індукції магнітного поля, Тл

Визначення вузлових значень проекцій магнітної індукції на підставі елементного стовпця потенціалу здійснюватимемо за (2.94). Так для вузла №1, що належить 1-му СЕ та має природні координати $s = -1$ та $t = -1$ (див. рис. 2.2)

$$\begin{Bmatrix} B_{x1}^{[e]} \\ B_{y1}^{[e]} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \mathbf{N}_{[s_1, t_1]} \langle x, y \rangle \vec{A}_z^{[1]} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0,1 \\ 4,1744 \\ 5,4192 \\ 0,1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,0 \\ -1,0186 \end{Bmatrix}.$$

Визначені в такий спосіб проекції \vec{B} та перегруповані у елементні вектори

$$\vec{B}_x^{[1]} = \begin{Bmatrix} 0,0 \\ 0,4149 \\ 0,4149 \\ 0,0 \end{Bmatrix}; \quad \vec{B}_x^{[2]} = \begin{Bmatrix} 0,4149 \\ -1,0793 \\ -0,7804 \\ 0,4149 \end{Bmatrix}; \quad \vec{B}_x^{[3]} = \begin{Bmatrix} -0,3727 \\ 0,3466 \\ 0,2267 \\ -0,3727 \end{Bmatrix}; \quad \vec{B}_x^{[4]} = \begin{Bmatrix} 0,0 \\ -0,3727 \\ -0,3727 \\ 0,0 \end{Bmatrix};$$

$$\vec{B}_y^{[1]} = \begin{Bmatrix} -1,0186 \\ -1,0186 \\ -1,3298 \\ -1,3298 \end{Bmatrix}; \quad \vec{B}_y^{[2]} = \begin{Bmatrix} 0,1433 \\ 0,1433 \\ 1,0398 \\ 1,0398 \end{Bmatrix}; \quad \vec{B}_y^{[3]} = \begin{Bmatrix} 1,0398 \\ 1,0398 \\ 0,6802 \\ 0,6802 \end{Bmatrix}; \quad \vec{B}_y^{[4]} = \begin{Bmatrix} -1,3298 \\ -1,3298 \\ -1,0503 \\ -1,0503 \end{Bmatrix}.$$

За потреби, елементні вектори напруженості магнітного поля легко отримуються за (2.95).

ДОДАТОК 2.

ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ ПОЛЯ ЗМІЩЕНЬ МСЕ

Розглянемо застосування алгоритму, наведеного у п. 2.3.2 на прикладі. Область розрахунку поля наближена одним СЕ. Механічні властивості середовища: модуль Юнга $E = 150 \cdot 10^9$ Па та коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,25$. Закріпленими є вузли № 1, 2, 3, 4, причому $u_1 = v_1 = w_1 = 0$; $v_2 = 0$; $v_3 = 0$; $u_4 = v_4 = w_4 = 0$. Вимушуючі сили прикладені до вузла № 8 — $F_{8X} = 5 \cdot 10^6$ Н; $F_{8Z} = -8 \cdot 10^6$ Н. Конфігурація розрахункової області та крайова умова схематично показані на рис. Д2.1. Необхідно визначити компоненти вектора трансляційного зміщення у вузлах № 2, 3, 5, 6, 7, 8.

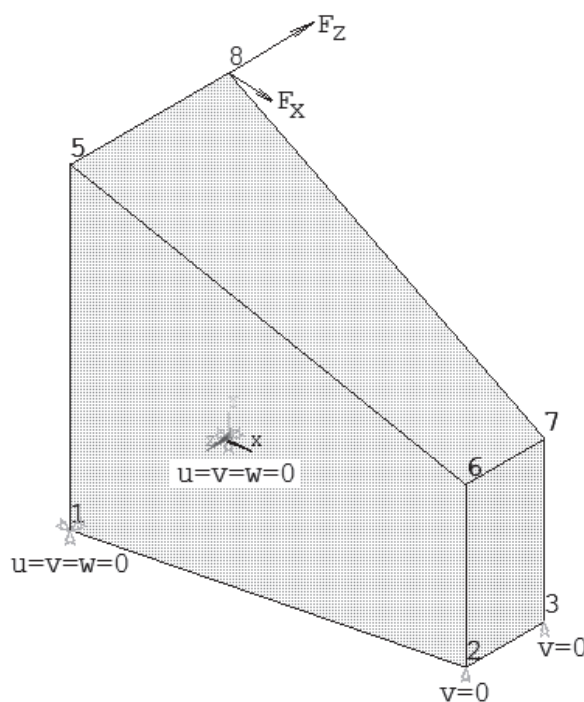


Рис.Д2.1. Скінченно-елементна модель

Нумерація вузлів моделі разом з відповідними координатами у декартовій прямокутній СК наведена в табл. Д2.1.

На підставі інформації з табл. Д2.1 формуємо координатну матрицю єдиного елемента (2.38)

$$\mathbf{C}_m^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 \\ 1 & 0 & 0,25 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ 1 & 0,5 & 0,25 \\ 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таблиця Д2.1

Координати вузлів скінченно-елементної моделі

Позначення вузла (див. рис. 2.3)	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>o</i>	<i>p</i>
№ вузла	1	2	3	4	5	6	7	8
x, м	0	1	1	0	0	1	1	0
y, м	0	0	0	0	1	0,5	0,5	1
z, м	0,5	0,25	0	0	0,5	0,25	0	0

Матрицю Якобі елемента визначаємо як (2.37)

$$\mathbf{J}^{[1]} = \mathbf{N}^{<s,t,r>} \mathbf{C}_m^{[1]} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,125 - 0,125r & -0,0625 + 0,0625t \\ 0 & 0 & -0,1875 + 0,0625s \\ 0 & 0,375 - 0,125s & 0 \end{pmatrix}.$$

Похідні функції форми, згідно до (2.36)

$$\mathbf{N}^{<x,y,z>[1]} = \left(\mathbf{J}^{[1]} \right)^{-1} \cdot \mathbf{N}^{<s,t,r>} = \frac{1}{-3+s} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0,25(3-s-3t+st-r-sr+tr+str) & -0,25(3-s-3t+st-5r-sr+5tr+str) \\ 1-t-s+st & 1-t+s-st \\ -2,0(1-s-r+sr) & 2,0(-1-s+r+sr) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,25(-1+3s-3t+st+3r-sr+5tr+str) & -0,25(-5+3s-3t+st+3r-sr+tr+str) \\ 1+t+s+st & 1+t-s-st \\ -2,0(-1-s+r+sr) & 2,0(1-s-r+sr) \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc}
-0,25(-1-s+t+st-r-rs+tr+str) & 0,25(-5-s+5t+st-5r-rs+5tr+str) \\
-1+t+s-st & -1+t-s+st \\
2,0(-1+s-r+sr) & -2,0(1+s+r+sr) \\
\\
-0,25(3-s+5t+st+3r-rs+5tr+str) & 0,25(3-s+t+st+3r-rs+tr+str) \\
-1-t-s-st & -1-t+s+st \\
2,0(1+s+r+sr) & -2,0(-1+s-r+sr)
\end{array} \Bigg\|$$

3 компонентів $\mathbf{N}^{<x,y,z>[1]}$ формуємо елементну матрицю деформацій (2.101)

за принципом

$$\mathbf{B}^{[1]} = \mathbf{D}\mathbf{N}^{[1]} = \begin{array}{ccc} \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right\| & \times & \left\| \begin{array}{ccccccc} N_1^{[1]} & 0 & 0 & N_2^{[1]} & \dots & N_8^{[1]} & 0 & 0 \\ 0 & N_1^{[1]} & 0 & 0 & \dots & 0 & N_8^{[1]} & 0 \\ 0 & 0 & N_1^{[1]} & 0 & \dots & 0 & 0 & N_8^{[1]} \end{array} \right\| = \\
\\
= & \left\| \begin{array}{ccccccc} \frac{\partial N_1^{[1]}}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2^{[1]}}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_8^{[1]}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^{[1]}}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2^{[1]}}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_8^{[1]}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1^{[1]}}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2^{[1]}}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_8^{[1]}}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1^{[1]}}{\partial y} & \frac{\partial N_1^{[1]}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^{[1]}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{[1]}}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_8^{[1]}}{\partial y} & \frac{\partial N_8^{[1]}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^{[1]}}{\partial z} & \frac{\partial N_1^{[1]}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^{[1]}}{\partial z} & \frac{\partial N_2^{[1]}}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8^{[1]}}{\partial z} & \frac{\partial N_8^{[1]}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{[1]}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1^{[1]}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{[1]}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2^{[1]}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_8^{[1]}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_8^{[1]}}{\partial x} \end{array} \right\| =
\end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{1,1}^{<x,y,z>[1]} & 0 & 0 & \mathbf{N}_{1,2}^{<x,y,z>[1]} & 0 & 0 & \dots & \mathbf{N}_{1,8}^{<x,y,z>[1]} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_{2,1}^{<x,y,z>[1]} & 0 & 0 & \mathbf{N}_{2,2}^{<x,y,z>[1]} & 0 & \dots & 0 & \mathbf{N}_{2,8}^{<x,y,z>[1]} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{N}_{3,1}^{<x,y,z>[1]} & 0 & 0 & \mathbf{N}_{3,2}^{<x,y,z>[1]} & \dots & 0 & 0 & \mathbf{N}_{3,8}^{<x,y,z>[1]} \\ \mathbf{N}_{2,1}^{<x,y,z>[1]} & \mathbf{N}_{1,1}^{<x,y,z>[1]} & 0 & \mathbf{N}_{2,2}^{<x,y,z>[1]} & \mathbf{N}_{1,2}^{<x,y,z>[1]} & 0 & \dots & \mathbf{N}_{2,8}^{<x,y,z>[1]} & \mathbf{N}_{1,8}^{<x,y,z>[1]} & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_{3,1}^{<x,y,z>[1]} & \mathbf{N}_{2,1}^{<x,y,z>[1]} & 0 & \mathbf{N}_{3,2}^{<x,y,z>[1]} & \mathbf{N}_{2,2}^{<x,y,z>[1]} & \dots & 0 & \mathbf{N}_{3,8}^{<x,y,z>[1]} & \mathbf{N}_{2,8}^{<x,y,z>[1]} \\ \mathbf{N}_{3,1}^{<x,y,z>[1]} & 0 & \mathbf{N}_{1,1}^{<x,y,z>[1]} & \mathbf{N}_{3,2}^{<x,y,z>[1]} & 0 & \mathbf{N}_{1,2}^{<x,y,z>[1]} & \dots & \mathbf{N}_{3,8}^{<x,y,z>[1]} & 0 & \mathbf{N}_{1,8}^{<x,y,z>[1]} \end{pmatrix}$$

де \mathbf{D} – матриця – диференційний оператор (2.101);

$\mathbf{N}^{[1]}$ – елементна матриця форми (2.119)

Матриця пружності, у відповідності до (2.97)

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1,8 \cdot 10^{11} & 0,6 \cdot 10^{11} & 0,6 \cdot 10^{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 \cdot 10^{11} & 1,8 \cdot 10^{11} & 0,6 \cdot 10^{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 \cdot 10^{11} & 0,6 \cdot 10^{11} & 1,8 \cdot 10^{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 \cdot 10^{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 \cdot 10^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 \cdot 10^{11} \end{pmatrix}.$$

Характеристична елементна матриця, на підставі (2.122) та (2.41)

$$\mathbf{K}^{[1]} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_*^{[1]} \mathbf{D} \mathbf{B}_*^{[1]} | \mathbf{J}^{[1]} | ds dt dr.$$

Після встановлення закріплень (крайова умова Діріхле), тобто вилучивши з матриці $\mathbf{K}^{[1]}$ рядки та стовпці з номерами, що відповідають номерам компонент закріплених вузлів, а саме № 1, 2, 3, 5, 8, 10, 11, 12, остаточно отримуємо

$$\mathbf{K}^{[1]} =$$

2.5×10^{10}	8.333×10^9	-1.062×10^{10}	-3.333×10^9	1.25×10^9	2.917×10^9	8.333×10^8	6.25×10^9	-1.667×10^9	4.167×10^9	-7.5×10^9	4.167×10^8	8.333×10^8	-5.625×10^9	2.083×10^9	-3.333×10^9
8.333×10^9	4.611×10^{10}	-3.333×10^9	-3.799×10^{10}	8.333×10^8	2.149×10^{-8}	8.194×10^9	4.167×10^9	1.476×10^{-7}	1.764×10^{10}	8.333×10^8	1×10^{10}	-2.139×10^{10}	-3.333×10^9	5×10^9	-1.132×10^{10}
-1.062×10^{10}	-3.333×10^9	2.125×10^{10}	-1.667×10^9	-3.75×10^9	8.333×10^8	1.667×10^9	-9.375×10^9	-2.083×10^9	-4.167×10^9	4.375×10^9	-1.667×10^9	-8.333×10^8	1.25×10^9	2.917×10^9	8.333×10^8
-3.333×10^9	-3.799×10^{10}	-1.667×10^9	4.486×10^{10}	1.667×10^9	-5×10^9	-1.069×10^{10}	-4.167×10^9	-1×10^{10}	-2.201×10^{10}	-8.333×10^8	-8.338×10^{-8}	1.701×10^{10}	8.333×10^8	3.307×10^{-8}	8.194×10^9
1.25×10^9	8.333×10^8	-3.75×10^9	1.667×10^9	1.75×10^{10}	-8.333×10^8	-1.667×10^9	5×10^9	2.083×10^9	4.167×10^9	-6.25×10^9	4.167×10^8	5.833×10^9	-1.063×10^{10}	-1.667×10^9	-3.333×10^9
2.917×10^9	-2.852×10^{-8}	8.333×10^8	-5×10^9	-8.333×10^8	2.361×10^{10}	1×10^{10}	2.083×10^9	1.056×10^{10}	5×10^9	4.167×10^8	-4.306×10^9	-9.306×10^{-9}	-1.667×10^9	-7.986×10^9	5.879×10^{-8}
8.333×10^8	8.194×10^9	1.667×10^9	-1.069×10^{10}	-1.667×10^9	1×10^{10}	4.361×10^{10}	4.167×10^9	5×10^9	2.056×10^{10}	5.833×10^9	-9.306×10^{-9}	-1.931×10^{10}	-3.333×10^9	5.879×10^{-8}	-3.799×10^{10}
6.25×10^9	4.167×10^9	-9.375×10^9	-4.167×10^9	5×10^9	2.083×10^9	4.167×10^9	3.25×10^{10}	6.667×10^9	1.333×10^{10}	-8.75×10^9	2.083×10^9	-3.333×10^9	-1.188×10^{10}	4.167×10^8	-9.167×10^9
-1.667×10^9	-1.476×10^{-7}	-2.083×10^9	-1×10^{10}	2.083×10^9	1.056×10^{10}	5×10^9	6.667×10^9	2.861×10^{10}	1×10^{10}	2.083×10^9	-7.361×10^9	-1.321×10^{-8}	4.167×10^8	-6.181×10^9	3.659×10^{-8}
4.167×10^9	1.764×10^{10}	-4.167×10^9	-2.201×10^{10}	4.167×10^9	5×10^9	2.056×10^{10}	1.333×10^{10}	1×10^{10}	4.861×10^{10}	-3.333×10^9	-1.321×10^{-8}	-3.736×10^{10}	-9.167×10^9	3.659×10^{-8}	-2.118×10^{10}
-7.5×10^9	8.333×10^8	4.375×10^9	-8.333×10^8	-6.25×10^9	4.167×10^8	5.833×10^8	-8.75×10^9	2.083×10^9	-3.333×10^9	2.5×10^{10}	4.167×10^9	-6.667×10^9	3.125×10^9	8.333×10^8	-8.333×10^8
4.167×10^8	1×10^{10}	-1.667×10^9	8.338×10^{-8}	4.167×10^8	-4.306×10^9	-3.706×10^{-8}	2.083×10^9	-7.361×10^9	-3.293×10^{-8}	4.167×10^9	2.611×10^{10}	-1×10^{10}	8.333×10^8	9.931×10^9	-5×10^9
8.333×10^8	-2.139×10^{10}	-8.333×10^8	1.701×10^{10}	5.833×10^9	-3.706×10^{-8}	-1.931×10^{10}	-3.333×10^9	-3.293×10^{-8}	-3.736×10^{10}	-6.667×10^9	-1×10^{10}	4.611×10^{10}	-8.333×10^8	-5×10^9	1.993×10^{10}
-5.625×10^9	-3.333×10^9	1.25×10^9	8.333×10^8	-1.063×10^{10}	-1.667×10^9	-3.333×10^9	-1.188×10^{10}	4.167×10^8	-9.167×10^9	3.125×10^9	8.333×10^8	-8.333×10^8	2.125×10^{10}	-3.333×10^9	8.333×10^9
2.083×10^9	5×10^9	2.917×10^9	6.1×10^{-8}	-1.667×10^9	-7.986×10^9	-5.879×10^{-8}	4.167×10^8	-6.181×10^9	1.102×10^{-8}	8.333×10^8	9.931×10^9	-5×10^9	-3.333×10^9	2.486×10^{10}	-1×10^{10}
-3.333×10^9	-1.132×10^{10}	8.333×10^8	8.194×10^9	-3.333×10^9	-5.879×10^{-8}	-3.799×10^{10}	-9.167×10^9	1.102×10^{-8}	-2.118×10^{10}	-8.333×10^8	-5×10^9	1.993×10^{10}	8.333×10^9	-1×10^{10}	4.486×10^{10}

Вектор навантажень (2.123), розміру $24-8=16$, формуємо за тим самим принципом

$$\vec{F}^{[1]} = \vec{F}_Q^{[1]} = \left\| 0 \quad \dots \quad 0 \quad F_{8X} \quad 0 \quad F_{8Z} \right\|_* = \left\| 0 \quad \dots \quad 0 \quad 5 \cdot 10^6 \quad 0 \quad -8 \cdot 10^6 \right\|_*.$$

Розв'язок рівняння $\mathbf{K}\vec{\delta} = \vec{F}$, отримуємо у вигляді

$$\vec{\delta} = \left\| 7,837 \cdot 10^{-6} \quad 4,158 \cdot 10^{-4} \quad 3,983 \cdot 10^{-4} \quad 4,091 \cdot 10^{-4} \quad -4,004 \cdot 10^{-4} \quad 7,650 \cdot 10^{-4} \right. \\ \left. -2,276 \cdot 10^{-3} \quad 2,743 \cdot 10^{-5} \quad -2,510 \cdot 10^{-4} \quad 1,043 \cdot 10^{-3} \quad 6,208 \cdot 10^{-4} \quad -2,985 \cdot 10^{-5} \right. \\ \left. 1,072 \cdot 10^{-3} \quad 1,039 \cdot 10^{-3} \quad -5,974 \cdot 10^{-4} \quad -2,408 \cdot 10^{-3} \right\|_*.$$

Модуль вектора зміщень у вигляді растрового зображення, на якому ділянкам з більш темним забарвленням відповідають більші значення локальних зміщень, показано на рис.Д2.2.

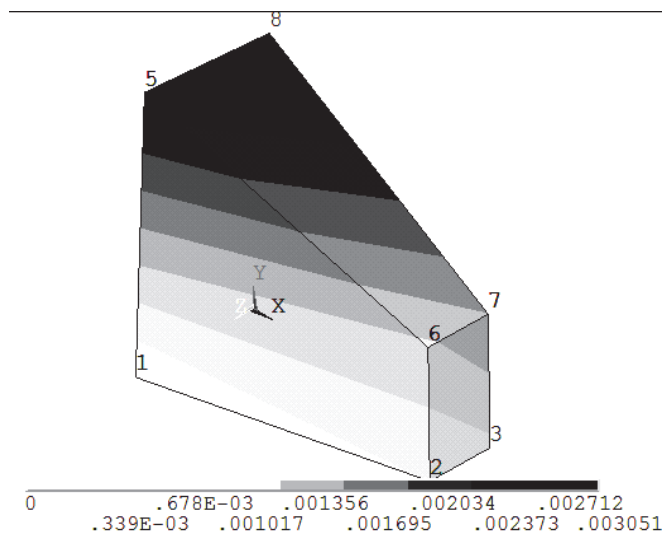


Рис.Д2.2. Поле зміщень моделі

ДОДАТОК 3.

ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУР МСЕ

Розглянемо застосування алгоритму, наведеного у п. 2.4.2 на прикладі. Область розрахунку поля розділено на 4 СЕ. Об'ємне тепловиділення в кожному елементі становить $p_v = 1000 \text{ Вт/м}^3$, коефіцієнт теплопровідності – $\lambda = 1 \text{ Вт/м}^\circ\text{С}$. На бокових сторонах задано розподіл температури $T_1 = 0^\circ\text{С}$, $T_2 = 150^\circ\text{С}$. Тепловіддача з решти зовнішніх поверхонь області розрахунку відсутня $\alpha = 0 \text{ Вт/м}^2\text{С}$. Конфігурація розрахункової області та крайова умова схематично показані на рис.Д3.1. Отже, температура T_1 задана у вузлах № 1, 7, 8, 10, 16, 17, а T_2 — № 3, 4, 5, 12, 13, 14. Необхідно визначити температури у вузлах № 2, 6, 9, 11, 15, 18.

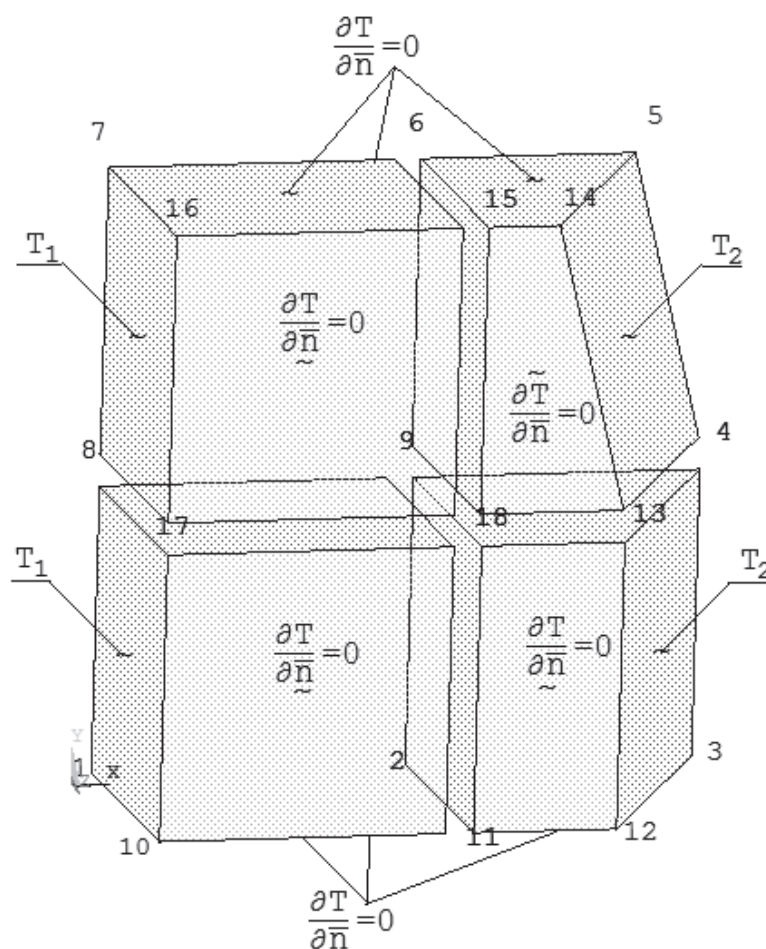


Рис. Д.3.1 Скінченно-елементна модель

Глобальна нумерація вузлів моделі разом з їх координатами у декартовій прямокутній СК наведена в табл. ДЗ.1.

Таблиця ДЗ.1

Координати вузлів скінченно-елементної моделі

№ вузла у глобальній нумерації	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
x, м	0	1	2	2	1,75	1	0	0	1	0	1	1,5	1,5	1,25	1	0	0	1
y, м	0	0	0	1	2	2	2	1	1	0	0	0	1	2	2	2	1	1
z, м	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Номери вузлів SE у локальній нумерації, згідно позначень прийнятих у п. 2.1.1, та відповідні їм номери вузлів у глобальній нумерації наведено у табл. ДЗ.2.

Таблиця ДЗ.2

Відповідність локальної та глобальної нумерації вузлів моделі

Позначення вузла у локальній нумерації (див. рис. 2.3)	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>o</i>	<i>p</i>
№ вузла у локальній нумерації	1	2	3	4	5	6	7	8
№ вузлів у глобальній нумерації для SE №1	10	11	2	1	17	18	9	8
№ вузлів у глобальній нумерації для SE №2	11	12	3	2	18	13	4	9
№ вузлів у глобальній нумерації для SE №3	18	13	4	9	15	14	5	6
№ вузлів у глобальній нумерації для SE №4	17	18	9	8	16	15	6	7

На підставі інформації з табл. ДЗ.2 формуємо координатні матриці елементів

(2.38)

$$\mathbf{C}_m^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C}_m^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1,5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1,5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C}_m^{[3]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1,5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1,25 & 2 & 1 \\ 1,75 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C}_m^{[4]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриці Якобі для елементів визначаємо як (2.37)

$$\mathbf{J}^{[1]} = \mathbf{N}^{<s,t,r>} \mathbf{C}_m^{[e]} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{J}^{[2]} = \begin{pmatrix} 0,375 + 0,125t & 0 & 0 \\ 0,125 + 0,125s & 0 & -0,5 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{J}^{[3]} = \begin{vmatrix} 0,3125 - 0,0625r + 0,125t & 0 & 0 \\ 0,125 + 0,125s & 0 & -0,5 \\ -0,0625 - 0,0625s & 0,5 & 0 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{J}^{[4]} = \begin{vmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Похідні функції форми, згідно до (2.36)

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^{<x,y,z>[1]} &= \left(\mathbf{J}^{[1]} \right)^{-1} \cdot \mathbf{N}^{<s,t,r>} = \\ &= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -1+t+r-tr & 1-t-r+tr & 1+t-r-tr & -1-t+r+tr \\ -1+t+s-st & -1+t-s+st & -1-t-s-st & -1-t+s+st \\ 1-s-r+rs & 1+s-r-rs & -1-s+r+rs & -1+s+r-rs \\ -1+t-r+tr & 1-t+r-tr & 1+t+r+tr & -1-t-r-tr \\ 1-t-s+st & 1-t+s-st & 1+t+s+st & 1+t-s-st \\ 1-s+r-rs & 1+s+r+rs & -1-s-r-rs & -1+s-r+rs \end{vmatrix}; \\ \mathbf{N}^{<x,y,z>[2]} &= \begin{vmatrix} \frac{-1+t+r-tr}{3+t} & \frac{1-t-r+tr}{3+t} & \frac{1+t-r-tr}{3+t} \\ 0,25 \frac{-1+t+s-st}{3+t} & 0,25 \frac{-1+t-s+st}{3+t} & 0,25 \frac{-1-t-s-st}{3+t} \\ 0,5 \frac{1+t-r-tr-2s+2rs}{3+t} & \frac{1+s-r-rs}{3+t} & 0,5 \frac{-1-s+r+rs}{3+t} \\ \frac{-1-t+r+tr}{3+t} & \frac{-1+t-r+tr}{3+t} & \frac{1-t+r-tr}{3+t} \\ 0,25 \frac{-1-t+s+st}{3+t} & 0,25 \frac{1-t-s+st}{3+t} & 0,25 \frac{1-t+s-st}{3+t} \\ 0,5 \frac{-2-t+2r+tr+s-rs}{3+t} & 0,5 \frac{1+t+r+tr-2s-2rs}{3+t} & \frac{1+s+r+rs}{3+t} \\ \frac{1+t+r+tr}{3+t} & \frac{-1-t-r-tr}{3+t} \\ 0,25 \frac{1+t+s+st}{3+t} & 0,25 \frac{1+t-s-st}{3+t} \\ 0,5 \frac{-1-s-r-rs}{3+t} & 0,5 \frac{-2-t-2r-tr+s+rs}{3+t} \end{vmatrix}; \\ \mathbf{N}^{<x,y,z>[3]} &= \frac{1}{-5-2t+r} \times \\ &\times \begin{vmatrix} 2,0(1-t-r+tr) & 2,0(-1+t+r-tr) \\ 0,5(3-2t-r+tr-2s+st-t^2+st^2) & 0,5(2-t+2s-st-t^2-st^2) \\ 0,25(-3-4t+4r+4tr+7s-8rs-r^2+sr^2) & 0,25(-7+8r-7s+8rs-r^2-sr^2) \\ 2,0(-1-t+r+tr) & 2,0(-1-t+r+tr) \\ 0,5(2+3t+2s+3st+t^2+st^2) & 0,5(3+4t-r-tr-2s-3st+t^2-st^2) \\ 0,25(3-4r+3s-4rs+r^2+sr^2) & 0,25(7+4t-8r-4tr-3s+4rs+r^2-sr^2) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{matrix} 2,0(1-t+r-tr) & 2,0(-1+t-r+tr) \\ 0,5(-2+t+r-tr+3s-2st+t^2-st^2) & 0,5(-3+2t-3s+2st+t^2+st^2) \\ 0,25(-3-4t-2r-4tr+7s+6rs+r^2-sr^2) & 0,25(-7-6r-7s-6rs+r^2+sr^2) \end{matrix} \\
& \left. \begin{matrix} 2,0(-1-t-r-tr) & 2,0(1+t+r+tr) \\ 0,5(-3-4t-3s-4st-t^2-st^2) & 0,5(-2-3t+r+tr+3s+4st-t^2+st^2) \\ 0,25(3+2r+3s+2rs-r^2-sr^2) & 0,25(7+4t+6r+4tr-3s-2rs-r^2+sr^2) \end{matrix} \right\}; \\
& \mathbf{N}^{<x,y,z>[4]} = \mathbf{N}^{<x,y,z>[1]}.
\end{aligned}$$

Характеристичні елементні матриці, за (2.138)

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1^{[1]} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_*^{<x,y,z>[1]} N^{<x,y,z>[1]} \mathbf{J}^{[1]} |dsdt dr = \\
&= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ & 4 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ & & 4 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ & & & 4 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ & & & & 4 & 0 & -1 & 0 \\ & & & & & 4 & 0 & -1 \\ & & & & & & 4 & 0 \\ & & & & & & & 4 \end{pmatrix}; \\
& \text{(симетр.)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{K}_1^{[2]} = \\
& \left. \begin{pmatrix} 0,3219 & -0,1344 & -0,06129 & 0,04045 & 0,05677 & -0,1193 & -0,06189 & -0,04227 \\ & 0,4052 & 0,04045 & -0,1446 & -0,1193 & 0,09843 & -0,04227 & -0,1036 \\ & & 0,2645 & -0,03533 & -0,06189 & -0,04227 & -0,01359 & -0,09058 \\ & & & 0,3478 & -0,04227 & -0,1036 & -0,09058 & 0,2808 \\ & & & & 0,3219 & -0,1344 & -0,06129 & 0,04045 \\ & & & & & 0,4052 & 0,04045 & -0,1446 \\ & & & & & & 0,2645 & -0,03533 \\ & & & & & & & 0,3478 \end{pmatrix}; \right. \\
& \text{(симетр.)}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_1^{[3]} = \begin{vmatrix} 0,3442 & -0,1671 & -0,06800 & 0,05758 & 0,09412 & -0,1670 & -0,07556 & -0,01819 \\ & 0,3859 & 0,03675 & -0,1513 & -0,1254 & 0,1358 & -0,01819 & -0,09640 \\ & & 0,2305 & -0,05343 & -0,05473 & -0,01819 & 0,00754 & -0,08046 \\ & & & 0,3555 & -0,01819 & -0,1172 & -0,1221 & 0,04921 \\ & & & & 0,3736 & -0,2590 & -0,09045 & 0,08004 \\ & & & & & 0,4986 & 0,1009 & -0,1738 \\ & & & & & & 0,3018 & -0,1039 \\ & & & & & & & 0,3434 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{K}_1^{[4]} = \mathbf{K}_1^{[1]}.$$

Стовпці правих частин, за (2.139)

$$\begin{aligned} \bar{K}_2^{[1]} &= \frac{q'}{\lambda} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{N}_* \mathbf{J}^{[1]} ds dt dr = \\ &= \|\|125 \quad 125 \quad 125 \quad 125 \quad 125 \quad 125 \quad 125 \quad 125\|_*; \end{aligned}$$

$$\bar{K}_2^{[2]} = \|\|83,33 \quad 83,33 \quad 104,2 \quad 104,2 \quad 83,33 \quad 83,33 \quad 104,2 \quad 104,2\|_*;$$

$$\bar{K}_2^{[3]} = \|\|72,92 \quad 72,92 \quad 93,75 \quad 93,75 \quad 62,50 \quad 62,50 \quad 83,33 \quad 83,33\|_*;$$

$$\bar{K}_2^{[4]} = \bar{K}_2^{[1]}.$$

За відсутності тепловіддачі ($\alpha = 0$), вектори

$$\bar{K}_{31}^{[1]} = \bar{K}_{31}^{[2]} = \bar{K}_{31}^{[3]} = \bar{K}_{31}^{[4]} = 0,$$

та матриці

$$\mathbf{K}_{32}^{[1]} = \mathbf{K}_{32}^{[2]} = \mathbf{K}_{32}^{[3]} = \mathbf{K}_{32}^{[4]} = 0.$$

Розширені характеристичні матриці елементів, складаються за правилом на стор. 87

$$\mathbf{K}_{1p}^{[4]} = \begin{pmatrix}
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0,333 & 0 & -0,083 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0,333 & 0 & -0,083 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -0,083 & 0 & 0,333 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & -0,083 & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & -0,083 & 0 & 0,333 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -0,083 & 0 & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & -0,083 & -0,083 & -0,083 & \bullet & \bullet & \bullet & 0,333 & 0 & -0,083 & 0 & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -0,083 & 0 & -0,083 & -0,083 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0,333 & 0 & -0,083 & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -0,083 & -0,083 & 0 & -0,083 & \bullet & \bullet & \bullet & -0,083 & 0 & 0,333 & 0 & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -0,083 & -0,083 & -0,083 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & -0,083 & 0 & 0,333 & \bullet
 \end{pmatrix}$$

Повна матриця коефіцієнтів, за (2.149)

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^4 \mathbf{K}_{1p}^{[e]} =$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix}
 0.333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.083 & 0 & -0.083 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.083 & -0.083 \\
 0 & 0.681 & -0.035 & -0.091 & 0 & 0 & 0 & -0.083 & 0.028 & -0.083 & 0.04 & -0.145 & -0.104 & 0 & 0 & 0 & -0.083 & -0.126 \\
 0 & -0.035 & 0.265 & -0.014 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.091 & 0 & -0.061 & 0.04 & -0.042 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.062 \\
 0 & -0.091 & -0.014 & 0.495 & 0.008 & -0.08 & 0 & 0 & -0.089 & 0 & -0.062 & -0.042 & 0.077 & -0.018 & -0.055 & 0 & 0 & -0.129 \\
 0 & 0 & 0 & 0.008 & 0.302 & -0.104 & 0 & 0 & -0.122 & 0 & 0 & 0 & -0.018 & 0.101 & -0.09 & 0 & 0 & -0.076 \\
 0 & 0 & 0 & -0.08 & -0.104 & 0.677 & 0 & -0.083 & 0.049 & 0 & 0 & 0 & -0.096 & -0.174 & 0.08 & -0.083 & -0.083 & -0.102 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & -0.083 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.083 & 0 & -0.083 & -0.083 \\
 0 & -0.083 & 0 & 0 & 0 & -0.083 & 0 & 0.667 & 0 & -0.083 & -0.083 & 0 & 0 & 0 & -0.083 & -0.083 & 0 & -0.167 \\
 -0.083 & 0.028 & -0.091 & -0.089 & -0.122 & 0.049 & -0.083 & 0 & 1.37 & -0.083 & -0.126 & -0.104 & -0.296 & -0.117 & -0.102 & -0.083 & -0.167 & 0.098 \\
 0 & -0.083 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.083 & -0.083 & 0.333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.083 \\
 -0.083 & 0.04 & -0.061 & -0.062 & 0 & 0 & 0 & -0.083 & -0.126 & 0 & 0.655 & -0.134 & -0.119 & 0 & 0 & 0 & -0.083 & 0.057 \\
 0 & -0.145 & 0.04 & -0.042 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.104 & 0 & -0.134 & 0.405 & 0.098 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.119 \\
 0 & -0.104 & -0.042 & 0.077 & -0.018 & -0.096 & 0 & 0 & -0.296 & 0 & -0.119 & 0.098 & 0.791 & 0.136 & -0.125 & 0 & 0 & -0.301 \\
 0 & 0 & 0 & -0.018 & 0.101 & -0.174 & 0 & 0 & -0.117 & 0 & 0 & 0 & 0.136 & 0.499 & -0.259 & 0 & 0 & -0.167 \\
 0 & 0 & 0 & -0.055 & -0.09 & 0.08 & -0.083 & -0.083 & -0.102 & 0 & 0 & 0 & -0.125 & -0.259 & 0.707 & 0 & -0.083 & 0.094 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.083 & 0 & -0.083 & -0.083 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.333 & -0.083 \\
 -0.083 & -0.083 & 0 & 0 & 0 & -0.083 & -0.083 & 0 & -0.167 & 0 & -0.083 & 0 & 0 & 0 & -0.083 & 0 & 0.667 & 0 \\
 -0.083 & -0.126 & -0.062 & -0.129 & -0.076 & -0.102 & -0.083 & -0.167 & 0.098 & -0.083 & 0.057 & -0.119 & -0.301 & -0.167 & 0.094 & -0.083 & 0 & 1.333
 \end{pmatrix}$$

Розширені вектори правих частин

$$\begin{aligned}
 \vec{K}_{2p}^{[1]} &= \left\| \vec{K}_{2(4)}^{[1]} \quad \vec{K}_{2(3)}^{[1]} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \vec{K}_{2(8)}^{[1]} \quad \vec{K}_{2(7)}^{[1]} \quad \vec{K}_{2(1)}^{[1]} \quad \vec{K}_{2(2)}^{[1]} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \vec{K}_{2(5)}^{[1]} \quad \vec{K}_{2(6)}^{[1]} \right\|_* = \\
 &= \left\| 125 \quad 125 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 125 \quad 125 \quad 125 \quad 125 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 125 \quad 125 \right\|_*;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{2p}^{[2]} &= \left\| 0 \quad \bar{K}_{2(4)}^{[2]} \quad \bar{K}_{2(3)}^{[2]} \quad \bar{K}_{2(7)}^{[2]} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \bar{K}_{2(8)}^{[2]} \quad 0 \quad \bar{K}_{2(1)}^{[2]} \quad \bar{K}_{2(2)}^{[2]} \quad \bar{K}_{2(6)}^{[2]} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \bar{K}_{2(5)}^{[2]} \right\|_* = \\ &= \left\| 0 \quad 104,2 \quad 104,2 \quad 104,2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 104,2 \quad 0 \quad 83,33 \quad 83,33 \quad 83,33 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 83,33 \right\|_*; \\ \bar{K}_{2p}^{[3]} &= \left\| 0 \quad 0 \quad 0 \quad \bar{K}_{2(3)}^{[3]} \quad \bar{K}_{2(7)}^{[3]} \quad \bar{K}_{2(8)}^{[3]} \quad 0 \quad 0 \quad \bar{K}_{2(4)}^{[3]} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \bar{K}_{2(2)}^{[3]} \quad \bar{K}_{2(6)}^{[3]} \quad \bar{K}_{2(5)}^{[3]} \quad 0 \quad 0 \quad \bar{K}_{2(1)}^{[3]} \right\|_* = \\ &= \left\| 0 \quad 0 \quad 0 \quad 93,75 \quad 83,33 \quad 83,33 \quad 0 \quad 0 \quad 93,75 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 72,92 \quad 62,50 \quad 62,50 \quad 0 \quad 0 \quad 72,92 \right\|_*; \\ \bar{K}_{2p}^{[4]} &= \left\| 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \bar{K}_{2(7)}^{[4]} \quad \bar{K}_{2(8)}^{[4]} \quad \bar{K}_{2(4)}^{[4]} \quad \bar{K}_{2(3)}^{[4]} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \bar{K}_{2(6)}^{[4]} \quad \bar{K}_{2(5)}^{[4]} \quad \bar{K}_{2(1)}^{[4]} \quad \bar{K}_{2(2)}^{[4]} \right\|_* = \\ &= \left\| 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 125 \quad 125 \quad 125 \quad 125 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 125 \quad 125 \quad 125 \quad 125 \right\|_*; \end{aligned}$$

Повний вектор правих частин

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \sum_{e=1}^4 \bar{K}_{2p}^{[e]} = \left\| 125 \quad 229,2 \quad 104,2 \quad 197,9 \quad 83,33 \quad 208,3 \quad 125 \quad 250 \quad 447,9 \right. \\ &\quad \left. 125 \quad 208,3 \quad 83,33 \quad 156,3 \quad 62,5 \quad 187,5 \quad 125 \quad 250 \quad 406,3 \right\|_*. \end{aligned}$$

Вилучимо з матриці \mathbf{K} та вектора \bar{Q} стрічки з номерами, що відповідають номерам вузлів із заданою температурою. У стрічках матриці \mathbf{K} , що залишилися, перенесемо у праві частини, у вектор \bar{Q} , добутки відповідних коефіцієнтів на ці відомі значення температур.

Отже, отримуємо

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0,681 & 0 & 0,028 & 0,04 & 0 & -0,126 \\ 0 & 0,677 & 0,049 & 0 & 0,08 & -0,102 \\ 0,028 & 0,049 & 1,37 & -0,126 & -0,102 & 0,098 \\ 0,04 & 0 & -0,126 & 0,655 & 0 & 0,057 \\ 0 & 0,08 & -0,102 & 0 & 0,707 & 0,094 \\ -0,126 & -0,102 & 0,098 & 0,057 & 0,094 & 1,333 \end{pmatrix};$$

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} Q_2 - T_1(K_{2,1} + K_{2,7} + K_{2,8} + K_{2,10} + K_{2,16} + K_{2,17}) - \\ Q_6 - T_1(K_{6,1} + K_{6,7} + K_{6,8} + K_{6,10} + K_{6,16} + K_{6,17}) - \\ Q_9 - T_1(K_{9,1} + K_{9,7} + K_{9,8} + K_{9,10} + K_{9,16} + K_{9,17}) - \\ Q_{11} - T_1(K_{11,1} + K_{11,7} + K_{11,8} + K_{11,10} + K_{11,16} + K_{11,17}) - \\ Q_{15} - T_1(K_{15,1} + K_{15,7} + K_{15,8} + K_{15,10} + K_{15,16} + K_{15,17}) - \\ Q_{18} - T_1(K_{18,1} + K_{18,7} + K_{18,8} + K_{18,10} + K_{18,16} + K_{18,17}) - \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -T_2(K_{2,3} + K_{2,4} + K_{2,5} + K_{2,12} + K_{2,13} + K_{2,14}) \\ -T_2(K_{6,3} + K_{6,4} + K_{6,5} + K_{6,12} + K_{6,13} + K_{6,14}) \\ -T_2(K_{9,3} + K_{9,4} + K_{9,5} + K_{9,12} + K_{9,13} + K_{9,14}) \\ -T_2(K_{11,3} + K_{11,4} + K_{11,5} + K_{11,12} + K_{11,13} + K_{11,14}) \\ -T_2(K_{15,3} + K_{15,4} + K_{15,5} + K_{15,12} + K_{15,13} + K_{15,14}) \\ -T_2(K_{18,3} + K_{18,4} + K_{18,5} + K_{18,12} + K_{18,13} + K_{18,14}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 285,3 \\ 276,5 \\ 570,6 \\ 264,9 \\ 266,9 \\ 534,4 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо отриману САР, як

$$\vec{T} = \mathbf{K}^{-1}\vec{Q}.$$

Шуканий розв'язок $\vec{T} = \begin{pmatrix} 449,7 \\ 397,1 \\ 428,6 \\ 423,9 \\ 340,9 \\ 399,9 \end{pmatrix}$, зображений на рисунку.

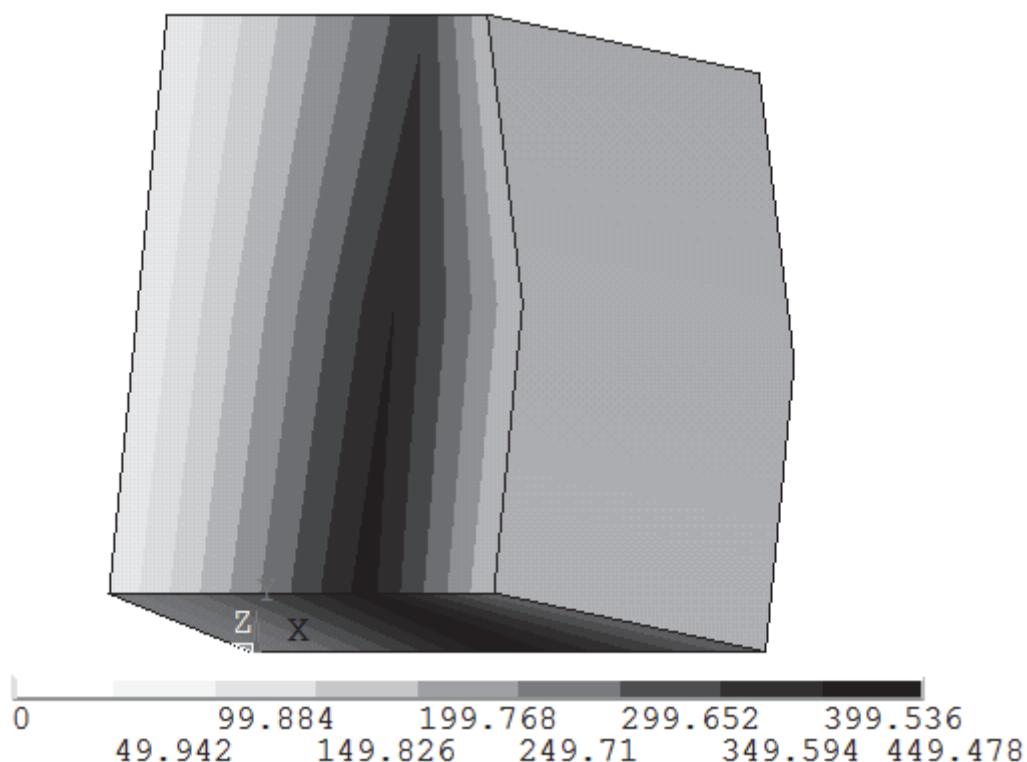


Рис. Д3.2 Температурне поле моделі

ДОДАТОК 4.

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Потовщеними літерами позначено матриці (\mathbf{B} , μ_{∂}); векторні величини з евклідового простору — рисками (\bar{P} , \bar{n}_y); наближені значення (інтерполянти) векторних величини з евклідового простору та скалярів — хвилястими рисками (\tilde{T}_L , $\tilde{\varepsilon}$); векторні величини з лінійного простору — стрілками (\vec{F}_Q , $\vec{N}[s,t,r]$); вектори у комплексній площині — крапками (\dot{A}_z , \dot{H}_y); приналежність до СЕ з номером e — верхнім індексом $[e]$ ($\vec{A}_z^{[e]}$, $\vec{z}^{[e]}$). Миттєві значення величин, що залежать від часу, позначено малими літерами; амплітудні, діючі, середні тощо — великими.

A — лінійне навантаження;
 \bar{A} , \vec{A} — векторний магнітний потенціал;
 A_z , \dot{A}_z — z -проекція векторного магнітного потенціалу;
 \vec{A}_z — вектор вузлових значень функції A_z ;
 \tilde{A}_z — інтерпольоване (наближене) значення проекції A_z ;
 $A_z[x,t]$, $A_z[t]$ — крайові умови;
 a — кількість паралельних гілок обмотки;
 a_1 , a_2 — розрахункові коефіцієнти;
 a_{cj} — розмір полюсної системи;

\mathbf{B} — матриця деформацій;
 \bar{B} — вектор індукції магнітного поля;
 B_n — амплітуда нормуючої магнітної індукції;
 $B_{a\max}$ — допустиме значення індукції у ярмі;
 B_{av} — середнє значення індукції у повітряному проміжку;
 B_h — робоча довжина підшипника ковзання;
 B_{\min} — мінімальне значення індукції у полюсі;
 B_n , B_{τ} — нормальна та тангенціальна проекції вектора індукції;
 B_r — залишкова індукція ПМ;
 B_{sm} — амплітуда зубцевої пульсації поля;
 B_x , B_y — проекції вектора магнітної індукції;
 B_{zi} — індукція в i -му перетині зубця;
 B_{δ} — амплітуда магнітної індукції у робочому повітряному проміжку;
 \vec{B}_{δ} — вектор розміру N індукцій в проміжку;
 $B_{\delta 1}, \dots, B_{\delta N}$ — вузлові індукції у робочому проміжку;

b_1, \dots, b_5 — осьові розміри вала;
 b_{iz} , b_p — розміри прямокутного провідника ізолюваного та ні, відповідно;
 b_k — ширина радіального вентиляційного каналу осердя; ширина каналу системи охолодження; ширина канавки підшипника ковзання;
 b_m — ширина полюса за зовнішньою дугою;
 b_s — ширина паза конструкційна;
 b_{sh} , b_{sz} — ширина шліца паза, ширина зубця, відповідно;

C — коефіцієнт демпфування або опору системи;
 \mathbf{C} — глобальна матриця демпфування;
 \vec{C} — одиничний вектор розміру N ;
 C_1 , C_2 — сталі інтегрування;
 C_A — «машинна стала» Арнольда;
 C_e — «електрична» стала двигуна;
 \mathbf{C}_f , \mathbf{C}_I — матричні коефіцієнти векторних рівнянь;
 C_{f1} , C_{f2} — коефіцієнти тертя циліндричної та торцевих поверхонь ротора, відповідно;
 C_H , C_{ϕ} , C_{ψ} — розрахункові коефіцієнти;
 C_L — ємність навантаження;
 C_m — «машинна» стала;
 \mathbf{C}_m — матриця з координатами вузлів СЕ у базисі (x, y, z) ;
 C_r — динамічна вантажність підшипника;
 c , c_{iz} — розрахункові розміри прямокутного провідника;
 \vec{c} — стовпець коефіцієнтів (похідних) ряду Тейлора;

c_0, c_1, c_2, \dots – коефіцієнти степеневого многочлена;
 $\cos \varphi$ – коефіцієнт потужності;
 c_p – питома теплоємність речовини;

D – внутрішній діаметр осердя статора або діаметр зовнішнього кільця підшипника;
 \mathbf{D} – матриця пружності;
 D_a – зовнішній діаметр осердя статора;
 D_{ai} – внутрішній діаметр ярма статора;
 D_{bm} – зовнішній діаметр станини; зовнішній діаметр підшипникового щита;
 D_{fri} – внутрішній діаметр станини;
 D_h – нормалізований внутрішній діаметр вкладки підшипника ковзання;
 D_j, D_r – зовнішні діаметри поверхні полюсів, конструкційний ротора, відповідно;
 D_k – гідравлічний діаметр каналу;
 D_{rv} – діаметр внутрішнього отвору у валу;
 $\mathbf{D}_s, \mathbf{D}_t, \mathbf{D}_r$ – матриці диференціювання рядка базисних функцій за змінними s, t, r , відповідно;
 D_{sh} – діаметр цапфи підшипника ковзання; діаметр шийки вала;
 D_{x_1} – матриця диференціювання рядка Тейлора за змінною x_1 ;
 d – поздовжня вісь рухомої СК; діаметр внутрішнього кільця підшипника;
 d_1, \dots, d_4 – діаметральні розміри вала;
 d_{cj} – розмір полюсної системи;
 d_{iz}, d_p – діаметри ізолюваного провідника обмотки та ні, відповідно;
 d_k – діаметр отвору у вкладці підшипника ковзання;
 $d\bar{l}$ – елементарна ділянка, довжина елементарної ділянки;
 d_m – середній діаметр підшипника кочення;
 dP – відцентрова сила для малого об'єму;
 dQ – тепловий потік через елементарну площадку;
 $d\bar{S}, dS$ – елементарна поверхня, площа елементарної поверхні;
 $d\varphi$ – кутовий розмір для малого об'єму;

E – модуль Юнга; загальна кількість СЕ;

\bar{E} – вектор напруженості електричного поля;
 \mathbf{E}_L – матричний коефіцієнт векторних рівнянь;
 E_x, E_y, E_z – значення модуля Юнга в напрямі осей x, y, z відповідно;
 E_Z – сумарна ЕРС двох, одночасно працюючих фаз;
 e – поточний номер СЕ; абсолютний ексцентриситет вала;
 \bar{F}, \vec{F} – вектор сили;
 $F_a, F_j, F_m, F_z, F_\delta$ – магнітні напруги ярма статора, ярма ротора, полюса, зубця осердя статора, повітряного проміжку, відповідно;
 F_{la} – сила осьового натягу підшипника;
 F_{\max} – розрахункова МРС полюса за повного розмагнічування;
 \vec{F}_N, \vec{F}_n – вектори зовнішніх сил; сили натягу, відповідно;
 \vec{F}_P, \vec{F}_Q – вектори сил гідростатичного тиску, сил інерції, відповідно;
 F_{pr}, F_{pa} – радіальне та аксіальне навантаження на підшипник;
 \bar{F}_s – вектор сили, що діє в напрямі s ;
 F_w – МРС реакції якоря на один полюс;
 $F_x^{[e]}, F_y^{[e]}$ – проекції сили \bar{F}_s на осі x та y , відповідно;
 \vec{F}_z – вектор розміру N магнітних напруг зубцевої зони;
 F_{z1}, \dots, F_{zN} – магнітні напруги зубців в околі вузлів розрахункової сітки;
 $F_{\delta n}$ – магнітна напруга повітряного проміжку у вузлі з номером n ;
 \vec{F}_{ε_n} – вектор сил зумовлених початковими деформаціями;
 \vec{F}_{σ_n} – вектор сил зумовлених початковими напруженнями;
 $F_\tau^{[e]}$ – тангенціальна проекція сили \bar{F}_s для e -го СЕ;
 f, f_n, f_n – частоти струму якоря, поточна, номінальна та нормуюча, за якої визначені питомі втрати в матеріалі, відповідно;

G – коефіцієнт демпфування зумовлений силою Коріоліса; кількість вузлів із заданою температурою; магнітно-механічний параметр;
 G_r – число Грасгофа;

G_{xy}, G_{yz}, G_{zx} – модулі зсуву у відповідних площинах;

g – прискорення вільного падіння;

\vec{H} – вектор напруженості магнітного поля;

H_c – коерцитивна сила ПМ;

H_n, H_τ – нормальна та тангенціальна проекції вектора напруженості поля;

\dot{H}_x, \dot{H}_y – проекції вектора напруженості магнітного поля;

h – один з розмірів елементарного об'єму;

h_0 – мінімальна товщина масляного шару в підшипнику ковзання;

h_{iz}, h_p – розміри прямокутного провідника ізольованого та ні, відповідно;

h_k – радіальна висота каналу на станині; між осердям статора та станиною;

h_{pm} – радіальна товщина ПМ;

h_s – висота пазової частини обмотки статора;

h_{sh}, h_{sz} – висоти шліца паза та повна паза;

h_v – глибина паза для кріплення полюса;

I – момент інерції перерізу вала;

\vec{I} – вектор струмів;

I_d, I_q – амплітуди проекцій фазного струму;

I_{jn}, i_{jn} – діюче та миттєве значення струмів

n -го елементарного провідника, що належить j -му ефективному;

I_p, I_n – діючі значення фазного струму, номінального фазного струму, відповідно;

I_{max} – максимально допустиме значення струму;

I_k – струм фази для $\gamma = \gamma_k$;

I_{lim} – характерний струм ключа в режимі насичення;

\vec{i} – вектор-стовпець струмів електричних контурів статора;

i, j – поточні номери стрічки та стовпця компоненти, відповідно;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні орти, за координатними осями x, y, z , відповідно;

i_1, i_2, i_3 – струми у контурах статора;

i_B – струм керування;

\vec{i}_D – вектор струмів діодів;

$i_{D1}, \dots, i_{D6}, i_{T1}, \dots, i_{T6}$ – струми зворотних діодів та транзисторів комутатора;

\vec{i}_L – вектор струмів навантаження;

i_{LR}, i_{LC} – струми навантаження та через конденсатор фільтра, відповідно;

\vec{i}_T – вектор струмів силових ключів;

i_Σ – струм ефективного провідника;

J – момент інерції обертової частини;

\mathbf{J} – матриця Якобі;

\vec{J} – результуючий вектор густини струму;

$\mathbf{J}_{11}, \mathbf{J}_{12}, \mathbf{J}_{13}, \mathbf{J}_{21}, \mathbf{J}_{23}$ – блоки матриці Якобі;

$\vec{J}_e, \vec{J}_s, \vec{J}_v$ – складові вектора \vec{J} ;

J_{ij} – елементи матриці Якобі;

J_k – модуль вузлового значення вектора густини струму;

\vec{J}_z – проекція вектора густини струму;

$|J_z|$ – модуль вектора густини струму;

$J_z^{[e]}$ – вузлове значення z -проекції вектора густини струму для e -го СЕ;

j – поточний номер ефективного провідника; поточний номер стовпця компоненти матриці; уявна одиниця;

\vec{j} – одиничний орт за віссю y ;

K – комплексна стала; кількість вузлів СЕ; жорсткість системи;

\mathbf{K} – глобальна матриця коефіцієнтів;

\mathbf{K}, \mathbf{K}' – матриці магнітно-механічних параметрів;

$\mathbf{K}^{[e]}$ – елементна матриця коефіцієнтів;

K_1, K_2, K_3 – розрахункові коефіцієнти ВАХ;

\mathbf{K}_1 – характеристична матриця СЕ;

\vec{K}_2 – вектор правих частин СЕ;

\vec{K}_3, \vec{K}_{31} – міжелементні вектори;

\mathbf{K}_{32} – елементна матриця крайових умов;

\vec{K}_{3e} – внесок похідних за зовнішньою границею СЕ;

\bar{K}_{3i} – внесок похідних за внутрішньою границею СЕ;
 $\mathbf{K}_{d\Theta}$, $\mathbf{K}_{d\alpha}$ – матриці-стовпці диференційних параметрів;
 \mathbf{K}_f , \mathbf{K}_L – матричні коефіцієнти векторних рівнянь;
 K_R – коефіцієнт Фільда;
 K_r – жорсткість системи, зумовлена відцентровими навантаженнями;
 \mathbf{K}_α , \mathbf{K}_Θ – матриці-стовпці перетворення;
 k – поточний номер кроку інтегрування;
 k – поточний номер вузла СЕ;
 \bar{k} – одиничний орт за віссю z ;
 $k1$ – номер кроку інтегрування, що відповідає початку розрахункового періоду;
 k_1 , k_2 – розрахункові коефіцієнти;
 k_a , k_z – технологічні коефіцієнти;
 k_f – коефіцієнт форми поля;
 k_{fr} – коефіцієнт тертя цапфи;
 k_{im} – коефіцієнт, що залежить від якості просочування обмотки;
 k_L – коефіцієнт перевантаження за струмом;
 k_{rs} – коефіцієнт запасу;
 k_{w1} – обмотковий коефіцієнт для 1-ї гармоніки;
 k_{zc} – коефіцієнт заповнення осердя статора сталлю;
 $k_{z\tau}$, k_{zr} – коефіцієнти заповнення паза в тангенціальному та радіальному напрямках, відповідно;
 k_δ , k_ξ – коефіцієнти повітряного проміжку та врахування впливу ефекту витіснення струму, відповідно;
 L , l – характерний розмір системи (довжина, діаметр тощо);
 \mathbf{L} – матриця вузлових значень базисних функцій; матриця магнітно-механічних параметрів;
 L_{10} – розрахунковий ресурс підшипника;
 L_k – визначальний розмір каналу системи охолодження;
 L_L – індуктивність навантаження;
 L_{na} – скорегований розрахунковий ресурс підшипника;

L_p – статична власна індуктивність фази двигуна;
 $\bar{L}[s, t]$, $\bar{L}[s, t, r]$ – рядки базисних функцій у природній СК;
 \mathbf{L}_σ – матриця індуктивностей розсіювання обмотки статора; матриця індуктивностей лобового розсіювання;
 $L_{\sigma a}$, $L_{\sigma e}$ – індуктивності розсіювання обмотки статора, лобового розсіювання, відповідно;
 $L_{\sigma ii}$, $L_{\sigma ij}$ – власні та взаємні індуктивності лобового розсіювання, відповідно;
 l_1 , l_δ – довжини осердя статора повна конструкційна, розрахункова, відповідно;
 l_{bm} – осьова віддаль між підшипниковими опорами;
 l_{bpm} – сумарна розрахункова довжина бокової поверхні охолодження підшипникових щитів;
 l_{frm} – довжина орбреної частини станини;
 l_m , l_{wo} , l_{wz} – довжини осьова ротора, вильоту лобової частини, середня витка обмотки, відповідно;
 $l_{\Sigma wo}$ – сумарна довжина лобових частин обмотки статора;
 M – вагова функція або маса системи або маса СЕ; момент на валу;
 \mathbf{M} – глобальна матриця маси системи;
 \bar{M}_0 – вектор залишкового внутрішнього намагнічування;
 M_e , M_s – моменти електромагнітний, статичного навантаження, відповідно;
 M_f – момент опору (тертя) підшипника;
 M_p – статична взаємна індуктивність фаз двигуна;
 M_{ix} , M_{iy} – моменти сил інерції СЕ;
 M_x , M_y – згинаючі моменти пружних сил;
 m – кількість фаз;
 m_a , m_z – маси ярма та зубців, відповідно.
 m_c , m_r – кількість елементарних провідників за шириною та висотою паза, відповідно;
 N – кількість вузлів розрахункової сітки у проміжку; кількість шарів у багат шаровій стінці;
 \mathbf{N} – функція форми СЕ;

\vec{N} , $\vec{N}[s,t,r]$ – вектор-рядок, функції форми СЕ;
 $\mathbf{N}^{<s,t,r>}$, $\mathbf{N}^{<x,y,z>}$ – матриці з похідними функції форми у базисах (s,t,r) та (x,y,z) , відповідно;

$\vec{N}^{<s>}$, $\vec{N}^{<t>}$, $\vec{N}^{<r>}$ – вектори частинних похідних функції форми за змінними s , t , r , відповідно;

$\vec{N}_i^{<s,t,r>}$, $\vec{N}_i^{<x,y,z>}$ – вектори частинних похідних i -ої компоненти функції форми за змінними s,t,r та x,y,z ;

N_r – радіальне навантаження на підшипникову опору; несуча здатність масляного шару;

Nu , Nu_s – числа Нуссельта;

n – поточний номер елементарного провідника; номер форми коливань; кількість шарів у багат шаровій структурі;

n , n_n – частота обертання ротора, номінальна частота обертання, відповідно;

\vec{n} – одиничний вектор (орт) нормалі до $d\vec{l}$; нормаль до $d\vec{S}$;

n_{el} – кількість елементарних провідників у ефективному;

n_k – кількість каналів на станині; між осердям статора та станиною;

n_{kb} – кількість каналів у підшипникових щитах;

n_x, n_y, n_z – проекції вектора нормалі на осі СК;

n_{max} – максимально допустима частота обертання;

n_w – кількість площин розташування лобових частин обмотки;

$n_{кр}$ – критична частота обертання ротора;

P – загальна кількість вузлів СЕ у розрахунковій області;

\vec{P} , \vec{P} – вектор гідростатичного тиску;

P_1 , P_2 – споживана та корисна потужності, відповідно;

P_{2n} – номінальна потужність (корисна);

P_b , P_j – втрати в підшипникових опорах, в полюсах індуктора, відповідно;

P_{Cu} , $P_{Cu|a}$ – основні та додаткові втрати в обмотці статора, відповідно;

P_{Fe} , P_a , P_z – основні втрати в магнітопроводі, в матеріалі ярма та зубців статора, відповідно;
 \mathbf{P}_f , \mathbf{P}_L – матричні коефіцієнти векторних рівнянь;

P_f – втрати потужності у підшипнику;

P_{jn} , p_{jn} – діюче та миттєве значення електричних втрат у n -му елементарному провіднику, що належить j -му ефективному;

P_k – «змочений» периметр каналу;

P_{mec} – повні механічні втрати ВБПМ;

P_{PM} – додаткові втрати в роторі;

P_r , P_{r1} , P_{r2} – втрати зумовлені газодинамічним тертям поверхонь ротора: повні, циліндричною та торцевими поверхнями, відповідно;

P_s , P_w – втрати в пазовій частині обмотки статора, в лобових частинах, відповідно;

P_T – внутрішнє тепловиділення (втрати);

P_{ts} – втрати потужності на одиницю довжини розрахункової області;

P_r – число Прандтля;

p – кількість пар полюсів; тиск на поверхні ковзання;

P_{hn} , P_{en} , P_{dn} – частини питомих втрат у матеріалі магнітопроводу за нормованих значень частоти, індукції та товщини листа, зумовлені гістерезисом, вихровими струмами та додатковими чинниками, відповідно;

p_n – питомі втрати у матеріалі, визначені за нормованих значень частоти, індукції та товщини листа;

p_t – тиск змащувальної рідини;

p_v – питоме тепловиділення, на одиницю об'єму;

Q – тепловий потік;

\vec{Q} – вектор правих частин;

\vec{Q}_a , \vec{Q}_a – вектори сил прискорення;

Q_t – об'ємна витрата оливи;

Q_{t1} , Q_{t2} – складові об'ємної витрати оливи;

Q_x , Q_y – проекції на осі перерізаючої сили;

q – кількість пазів на полюс і фазу; назва осі рухомої СК;

\bar{q} – густина теплового потоку;

q_t – розрахунковий коефіцієнт;

\mathbf{R} – діагональна матриця активних опорів фаз;
 R_1, R_2, R_3 – активні опори електричних контурів ВБІМ; теплові опори тепловому потоку між пазовою частиною обмотки та ярмом статора; між пазовою частиною обмотки та зубцями статора; між зубцями та ярмом статора, відповідно;
 R_4, R_5, R_6 – теплові опори тепловому потоку між ярмом статора, станиною та довкіллям; між пазовою частиною обмотки статора та лобовими; між лобовими частинами обмотки статора, внутрішнім повітрям, корпусом та довкіллям, відповідно;
 R_7, R_8, R_9 – теплові опори тепловому потоку між статором та ротором; між полюсами індуктора та бандажем; між полюсами індуктора, валом та підшипниками, відповідно;
 $R_{10}, R_{11}, R_{12}, R_{13}$ – теплові опори тепловому потоку між підшипниками, підшипниковими щитами та довкіллям; між зубцями осердя статора та довкіллям; між бандажем ротора та довкіллям; між ярмом осердя статора, станиною, підшипниковими щитами та підшипниками, відповідно;
 Ra_h, Ra_s – висоти мікронерівностей вкладки та цапфи, відповідно;
 R_a, R_j, R_m – диференційні магнітні опори ярма статора, ярма ротора та полюса, відповідно;
 $\mathbf{R}_D, \mathbf{R}_T$ – діагональні матриці диференційних опорів діодів та транзисторів;
 R_{DC} – електричний опір елементарного провідника постійному струму;
 R_{DO}, R_{DC} – прямий і зворотний опори діода;
 $Re, Re_a, Re_r, Re_\omega$ – числа Рейнольдса;
 \mathbf{R}_f – матричні коефіцієнти векторних рівнянь;
 R_n – ортонормований базис;
 R_p – активний опір фази за робочої температури;
 R_T – тепловий опір;
 R_{TO}, R_{TC} – опори транзистора у “відкритому” та “закритому” станах, відповідно;
 r – радіус інерції вала; поточне значення координати; орт природної СК; радіальний розмір;
 \bar{r}, \bar{r}' – радіус-вектори довільної точки;

$r^{[e]}$ – довжина радіус-вектора, проведеного до центру мас e -го СЕ;
 r_1, r_2 – радіальні розміри порожнистого циліндра;
 r_p – “радіус” нелінійної ділянки ВАХ;
 r_{xy}, r_{dq} – радіус-вектори у нерухомій та рухомій СК, відповідно;
 S, S_{2H} – площа бокової поверхні стінки, номінальна повна електрична потужність, відповідно;
 \mathbf{S} – матричний коефіцієнт векторних рівнянь;
 $S^{[e]}$ – площа СЕ з номером e ;
 S_c – розрахункова площа поверхні охолодження станини; Z-подібного каналу у станині;
 $S_{Cu}, S_{iz}, S_{im}, S_{si}$ – сумарні площі поперечних перерізів міді провідників, власної ізоляції провідників, просочувальної речовини, пазової ізоляції, відповідно;
 S_j – елементарна поверхня, площа елементарної поверхні;
 S_k – площа поперечного перерізу каналу;
 So – число Зоммерфельда;
 S_m – площа нейтрального перетину полюса;
 S_s – запас міцності;
 S_{wo} – площа поверхні охолодження лобової частини;
 S_{w1}, S_{w2}, S_{w3} – складові площі поверхні охолодження лобової частини;
 s – віртуальне переміщення вузлових координат;
 s, t, r – орти природної СК;
 T – температура, як залежна змінна або температурне поле як функція просторових координат;
 $T, \Delta t$ – часовий період та величина кроку інтегрування по часу, відповідно;
 \mathbf{T} – матриця Тейлора; матриця перетворення;
 \vec{T}, \tilde{T} – вектор абсолютних температур, інтерпольоване (наближене) значення температури, відповідно;
 $\vec{T}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ – рядок Тейлора n незалежних змінних;
 T_0 – абсолютна температура довкілля;

T_1, \dots, T_{n+1} – температури на границях багатощарової стінки;
 T_a, T_b, T_j, T_r – середні температури ярма осердя статора, підшипникових опор, полюсів індуктора, поверхні ротора (бандажа), відповідно;
 T_b – величина пропорційна до сталої часу обмотки статора;
 T_f – сила в'язкого зсуву (сила тертя);
 T_k – поточне вузлове значення температури СЕ;
 \tilde{T}_L, T_L – значення температури на границі області;
 T_m – середнє значення температури;
 \mathbf{T}_m – тензор натягу Максвелла;
 T_s, T_w, T_z – середні температури пазової частини обмотки статора, лобових частин обмотки статора, температури зубців осердя статора, відповідно;
 T_{wd} – робоча температура обмотки;
 t – час, як незалежна змінна; орт природної СК;
 t_b, t_{kt} – односторонні товщини бандажного кільця, пазової ізоляції, відповідно;
 t_{brs}, t_{frm} – середні конструкційні товщини підшипникових щитів, станини, відповідно;
 t_l, t_{nl} – товщини листів шихтованого осердя дійсна та нормуюча, відповідно;
 t_s – зубцева поділлка;
 U – скалярний електричний потенціал зовнішнього поля; сумарна енергія деформації;
 U, V, W – позначення фаз обмотки статора;
 \vec{U} – вектор-стовпець x -дискрет зміщення;
 \vec{U}, \vec{u} – вектори напруг живлення;
 U_{DC} – напруга постійного струму живлення двигуна;
 U_d, U_q – амплітуди проєкцій фазної напруги на осі рухомої СК d, q ;
 U_p – діюче значення фазної напруги;
 U_n – номінальне діюче значення фазної напруги;
 u – розрахунковий коефіцієнт; зміщення;
 u, v, w – компоненти зміщення точки в напрямі осей x, y, z відповідно;
 \vec{u}_D – вектор напруг на діодах;

$u_{D1}, \dots, u_{D6}, u_{T1}, \dots, u_{T6}$ – спади напруг зворотних діодів та транзисторів комутатора;
 u_{LC} – напруга на конденсаторі фільтра;
 u_s, u_{se} – кількості ефективних та елементарних провідників у пазу, відповідно;
 \vec{u}_T – вектор напруг на ключах;
 V – об'єм розрахункової області, СЕ; позначення фази обмотки статора;
 \vec{V} – вектор-стовпець y -дискрет зміщення;
 V_m – характерна, середня швидкість руху рідини або газу;
 V_T – об'єм тіла;
 V_x, V_y – проєкції лінійної швидкості руху центру вала;
 v – компонент зміщення точки в напрямі осі y ;
 \vec{v} – вектор швидкості руху середовища;
 V_a – осьова складова лінійної швидкості руху газу; витратна (лінійна) швидкість течії;
 v_s – лінійна швидкість на поверхні цапфи підшипника ковзання;
 v_x, v_y, v_z – проєкції вектора лінійної швидкості;
 W, W_1, W_2, W_3 – сумарна робота зовнішніх сил та її складові, відповідно;
 W – позначення фази обмотки статора;
 \vec{W} – вектор-стовпець z -дискрет зміщення;
 w – компонент зміщення точки в напрямі осі z ;
 w_p, w_{sj} – кількість витків у фазі якоря; кількість витків, що належать площині S_j , відповідно;
 X – коефіцієнт динамічного радіального навантаження;
 x – поточне значення координати; координата геометричного центра перерізу вала;
 $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ – вектор-стовпці вузлових значень функцій x, y, z ;
 x_i, y_j, z_k – координати точок інтегрування;
 Y – коефіцієнт динамічного осьового навантаження;
 Y_1, Y_2, y_5 – нев'язки САР;
 $\vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \vec{y}_4$ – вектори нев'язки САР;

y – інтерпольоване значення функції;
 координата геометричного центра перерізу
 вала;
 \vec{y} – вектор-стовпець вузлових значень функції;
 y_b – відносне скошування пазів у частинах
 зубцевої поділки;

Z – кількість зубців на статорі;
 \mathbf{Z}_L – матричний коефіцієнт векторних рівнянь;
 \vec{z} – одиничний вектор вздовж осі $+z$;
 \vec{z} – вектор-стовпець вузлових значень функції;

α – кут між струмом та віссю $-q$; кут нахилу
 радіус-вектора, проведеного до центру мас e -го
 СЕ; комплексна стала; коефіцієнт теплового
 розширення; коефіцієнт тепловіддачі;
 контактний кут підшипника кочення;
 α_δ – коефіцієнт полюсного перекриття;
 $\alpha_d, \alpha_f, \alpha_h$ – показники степенів за
 розрахунку втрат в сталі;
 α_{fr} – коефіцієнти тепловіддачі за вільної
 конвекції з вертикальних нерухомих поверхонь
 охолодження;
 α_{w1}, α_{w2} – коефіцієнти тепловіддачі за
 вимушеної конвекції в каналах між осердям
 статора та станиною або з нерухомих
 поверхонь розташованих вздовж до напрямку
 повітряної течії; з нерухомих поверхонь
 розташованих перпендикулярно до напрямку
 повітряної течії, відповідно;
 α_{w3}, α_{w4} – коефіцієнти тепловіддачі за
 вимушеної конвекції з зовнішніх поверхонь
 лобових частин обмотки та внутрішніх
 станини; з внутрішніх поверхонь лобових
 частин обмотки та вільних поверхонь вала,
 відповідно;
 α_{w5}, α_{w6} – коефіцієнти тепловіддачі за
 вимушеної конвекції з поверхонь, що
 обмежують повітряний проміжок між статором
 та ротором; в каналах підшипникових щитів,
 відповідно;

β – коефіцієнт пропорційності між
 координатою точки у кутових та лінійних
 одиницях; дійсна стала; температурний
 коефіцієнт об'ємного розширення середовища;
 β_h – відносний вміст втрат на гістерезис у
 загальних втратах;

β_s – співвідношення амплітуд першої та
 зубцевої гармонік поля;

γ – поточне кутове положення ротора;
 γ_{air} – густина газу;
 γ_k – кутова тривалість міжкомутаційного
 етапу;
 γ_m – густина матеріалу, речовини;
 γ_{m15} – густина речовини за температури $15^\circ C$;
 $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ – деформації зсуву у відповідних
 площинах;

Δ_{iz} – одностороння товщина ізоляційного
 покриття провідника;
 $\Delta_{sit}, \Delta_{sir}$ – сумарні товщини пазової ізоляції за
 шириною та висотою паза, відповідно;
 ΔT – температурний напір або перевищення
 температури;
 $\Delta \vec{T}$ – вектор перевищень температур;
 $\Delta T_a, \Delta T_b, \Delta T_j, \Delta T_r$ – перевищення
 температури ярма осердя статора,
 підшипникових опор, полюсів індуктора,
 поверхні ротора (бандажа), відповідно;
 $\Delta T_s, \Delta T_w, \Delta T_z$ – перевищення температури
 пазової частини обмотки статора, лобових
 частин обмотки статора, зубців осердя статора,
 відповідно;
 δ – величина робочого повітряного проміжку;
 $\vec{\delta}, \tilde{\delta}, \bar{\delta}$ – вектори зміщення;
 $\delta_1, \dots, \delta_N$ – вузлові розміри робочого
 повітряного проміжку;
 δ_{Cu} – глибина проникнення поля у мідь;
 δ_f – конструкційна величина робочого
 повітряного проміжку;
 δ_{min} – мінімальна величина робочого
 проміжку;
 δ_r – діагональна матриця вузлових розмірів
 проміжку;

ε – відносний ексцентриситети вала;
 $\vec{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}$ – вектори деформацій;
 ε_k – відносна ширина каналу на станині; між
 осердям статора та станиною;
 ε_{kb} – відносна ширина каналу в
 підшипникових щитах;

$\bar{\varepsilon}_n$ – початковий вектор деформації;
 $\varepsilon_r, \varepsilon_\tau$ – нормальні радіальна та тангенціальна деформації;

ε_s – деформація вала на довжині підшипника в абсолютних одиницях;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – нормальні проекції вектора деформацій розтягу/стискання або проекції кутових прискорень;

$\zeta, \zeta(x, y, z)$ – довільні функції положення точки;

ζ – власна частота коливань у нерухомій хуз СК;

η – коефіцієнт корисної дії машини;

η_1, \dots, η_N – кутові координати вузлів розрахункової сітки;

η_m – коефіцієнт динамічної в'язкості речовини;

η_{m40} – коефіцієнт динамічної в'язкості речовини за температури 40°C;

Θ – кут вибігу;

$\vartheta_k, \vartheta_j, \vartheta_i$ – вагові коефіцієнти;

\mathbf{k} – обернена матриця магнітної проникності середовища;

κ_e – безрозмірний поправочний коефіцієнт, який вказує на вплив конвекції;

Λ_i – теплові провідності;

λ – коефіцієнт теплопровідності;

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – коефіцієнти теплопровідності

окремих шарів багат шарової стінки;

$\lambda_{\sigma f}$ – магнітна провідність розсіювання

полюса;

$\lambda_{air}, \lambda_{Cu}, \lambda_{Fe}, \lambda_{frm}, \lambda_{iz}$ – коефіцієнти

теплопровідності газу, матеріалу провідників, матеріалу осердя, матеріалу підшипникових щитів та станини, ізоляційного прошарку або ізоляційного покриття провідника, відповідно;
 λ_{cm} – коефіцієнт теплопровідності матеріалу теплопровідного компаунду для лобових частин;

$\lambda_e, \lambda_{e1}, \lambda_{e2r}, \lambda_{e2\tau}$ – еквівалентні коефіцієнти теплопровідності багат шарової стінки, ізольованого провідника в поперечному напрямі, ізольованих провідників обмотки

разом з просочувальним компаундом в радіальному та тангенціальному напрямках, відповідно;

$\lambda_{ea}, \lambda_{eaa}, \lambda_{er\tau}, \lambda_{eb}$ – еквівалентні коефіцієнти теплопровідності газу з урахуванням впливу конвекції, осердя статора в аксіальному та радіальному/ тангенціальному напрямках, бандажа індуктора відповідно;

$\lambda_{ewa}, \lambda_{ewr}, \lambda_{ew\tau}$ – еквівалентні коефіцієнти теплопровідності пазової частини обмотки статора в аксіальному, радіальному та тангенціальному напрямках, відповідно;

$\lambda_{im}, \lambda_j, \lambda_{sh}, \lambda_{si}$ – коефіцієнти

теплопровідності просочувальної речовини, матеріалу полюсів індуктора, матеріалу вала, пазової ізоляції, відповідно;

$\lambda_s, \lambda_{sz}, \lambda_{se}, \lambda_{sd}$ – коефіцієнти магнітної провідності пазового розсіювання, розсіювання голівок зубців, лобового та диференційного розсіювання, відповідно;

$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ – коефіцієнти теплопровідності середовища в напрямках осей СК;

μ – матриця статичної магнітної проникності середовища;

μ – абсолютна магнітна проникність середовища;

μ_0 – абсолютна магнітна проникність вакууму;

μ_r – матриця статичної відносної магнітної проникності середовища;

μ_r – відносна магнітна проникність середовища;

μ_d – матриця диференційної магнітної проникності середовища;

ν – поточний номер гармоніки;

ν_{air} – кінематичний коефіцієнт в'язкості газу;

ν_m – кінематичний коефіцієнт в'язкості речовини;

ξ – зведена висота елементарного провідника; зведена товщина листа шихтованого магнітопроводу; величина обернена до глибини проникнення поля; деяка функція або диференційний оператор n -го порядку; власна частота коливань у обертовій dq СК;

$\bar{\xi}$ – стовпець вузлових значень функції;

$\xi(x, y, z)$ – довільна функція положення точки;

ρ – віддаль між двома точками; маса одиниці довжини вала;

ρ_{Cu} , ρ_m – питомі електричні опори провідника та матеріалу, відповідно;

ρ_z – матриця диференційних питомих магнітних опорів зубцевої зони;

σ – питома електрична провідність;

σ – матриця питомої електричної провідності середовища;

$\vec{\sigma}$ – вектор напружень;

$\vec{\sigma}_n$, $\vec{\sigma}_n$ – вектори початкових залишкових напружень;

σ_e – еквівалентне за Мізесом напруження;

$\sigma_{e\max}$ – допустиме еквівалентне напруження;

σ_{el} – межа пружності;

σ_s – межа плинності за одноосного розтягу;

σ_r , σ_τ , σ_z – механічні напруження в радіальному, тангенціальному та осьовому напрямках, відповідно;

σ_x , σ_y , σ_z – нормальні проекції вектора напружень;

σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} – електропровідності у напрямках x , y , z відповідно;

τ – полюсна поділка;

τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} – напруження зсуву у відповідних площинах;

Φ_δ – магнітний потік через повітряний проміжок;

Φ_m – магнітний потік полюса;

Φ_{\max} – магнітний потік полюса за відсутності МРС;

φ – кут навантаження;

$\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$ – функції Емде;

φ_x , φ_y – кутові зміщення торцевих поверхонь;

ν – фазовий зсув; коефіцієнт Пуассона;

ν_{xy} , ν_{yz} , ν_{zx} , ν_{yx} , ν_{zy} , ν_{xz} – коефіцієнти Пуассона для відповідних площин;

ψ – відносний діаметральний проміжок підшипника ковзання;

$\vec{\psi}$ – вектор-стовпець повних потокозчеплень електричних контурів статора;

ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 – повні потокозчеплення контурів статора;

ψ_d , ψ_q – проекції повного потокозчеплення контурів статора;

$\vec{\psi}_\delta$ – вектор-стовпець робочих потокозчеплень;

ψ_δ – робоче потокозчеплення котушки зумовлене потоком в пазовій частині ВБПМ;

$\psi_{\delta m}$ – робоче потокозчеплення m -го контуру;

Ω – діагональна матриця кутових частот;

ω – кутові частоти обертання; струму в обмотці статора;

ω – матриця з проекціями кутової швидкості на осі нерухомої СК;

ω_k – критична кутова швидкість;

ω_r – кутова швидкість пружної лінії ротора;

ω_s – колова частота зубцевої пульсації поля;

ω_x , ω_y , ω_z – проекції вектора кутової швидкості;

∇ – диференційний оператор Гамільтона;

D – матриця – диференційний оператор;

P_k – повна потенціальна енергія конструкції.

ДОДАТОК 5.

АКТ ПРО ВИКОРИСТАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РОБОТИ

Затверджую

Проректор



з науково-педагогічної роботи
Національного університету
"Львівська політехніка"

О.Р. Давидчак
2017 р.

А К Т

про використання результатів дисертаційної роботи

Макарчука Олександра Володимировича

на тему: «Методи і засади створення високошвидкісних
безконтактних електричних машин з постійними магнітами»

Комісія в складі:

Голова: директор Інституту енергетики та систем керування
д.т.н., проф. Лозинський А.О.

Члени: завідувач кафедри електричних машин та апаратів (ЕМА)
д.т.н., проф. Ткачук О.Ю.,
доцент кафедри ЕМА к.т.н., доц. Біляковський І.Є.,
доцент кафедри ЕМА к.т.н., доц. Хай М.В.

склала цей акт про те, що результати дисертаційної роботи Макарчука О.В.
впроваджені в навчальний процес Національного університету «Львівська
політехніка», зокрема:

1. Запропонований спосіб визначення параметрів та характеристик
електричної машини з постійними магнітами, використовується за підготовки
бакалаврів, спеціальність 141 — «Електроенергетика, електротехніка та
електромеханіка», у лекційному курсі «Основи моделювання
електромеханотронних перетворювачів» (тема 5. Моделювання перехідних
процесів узагальненого електромеханічного перетворювача енергії; тема 7.
Математичні моделі перехідних процесів електричних машин у фізичних
координатах) та в магістерських кваліфікаційних роботах захищених у 2012 та
2014 роках.

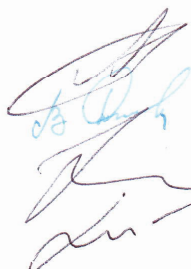
2. Розроблені алгоритми розрахунку явної магнітно-механічної
характеристики та магнітно-механічних параметрів електричних машин
використовуються за підготовки спеціалістів спеціальності 7.05070206
«Електропобутова техніка» у дисципліні «Програмні засоби моделювання
електричних машин та апаратів» (тема 7. Особливості моделювання

явнополюсних машин. Неявна магнітно-механічна характеристика).

3. Розглянуті в роботі теоретичні засади методу скінченних елементів та особливості його застосування для розрахунку полів різної фізичної природи використовуватимуться для підготовки здобувачів вищої освіти ступеня доктора філософії, галузь знань 14. Електрична інженерія у дисципліні «FEM-аналіз в задачах електромеханіки» (тема 3. Теоретичні засади методу скінченних елементів. Функції форми; тема 6. Математичне формулювання задачі магнітостатики; тема 7. Алгоритм розв'язання задачі магнітостатики на основі методу Галеркіна; тема 8. Формулювання задач електродинаміки; тема 9. Варіаційне формулювання задачі розрахунку напружено-деформованого стану тіла довільної форми в межах теорії пружності; тема 10. Алгоритм розрахунку поля механічних напружень; тема 11. Математичне формулювання задачі стаціонарної теплопровідності; тема 12. Алгоритм розв'язання задачі розрахунку поля температур в тілах довільної форми)

Голова

Члени:



А. О. Лозинський

В. І. Ткачук

І. Є. Біляковський

М. В. Хай

01.03.2017 р.