УДК 62.519

Богдан Рицар
Національний університет ”Львівська політехніка”,
кафедра радіоелектронних пристроїв та систем

РЕДУКЦІЯ НЕСУТТЄВИХ ЗМІННИХ СИСТЕМИ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

Запропоновано простий метод виявлення несуттєвих змінних системи булевих функцій, що ґрунтується на процедурі декомпозиційного клонування *q*-розбитих мінтермів. Редукцію несуттєвих змінних проілюстровано на прикладі системи часткових булевих функцій.

A simple detection method of inessential variables of Boolean functions system has been suggested. This method is based on the procedure of decompositional cloning of *q*-partition of the minterms. The reduce method of inessential variables is illusrtrated by the example of Boolean partial functions system.

Декомпозиція логікових (булевих) функцій n змінних є основною оптимізаційною задачею сучасного синтезу цифрових пристроїв. Головною метою цієї задачі є, з одного боку, мінімізація кількості утворених (внаслідок декомпозиції) функцій, кожна з яких має меншу кількість змінних, ніж задана функція, а з іншого боку, – мінімізація кількості власних змінних цих функцій. Якщо перша проблема розв’язується за рахунок оптимального вибору розбиття n змінних, то друга – за рахунок вилучення (редукції) з розгляду деякої підмножини несуттєвих змінних (очевидно, якщо вони існують у цій функції). Остання проблема набуває особливої ваги для оптимального синтезу n,m-полюсних цифрових пристроїв (над)високого рівня інтеграції, що описуються системою m функцій n змінних. У цьому випадку для реалізації сумісної декомпозиції системи важливо попередньо знайти і зредукувати несуттєві змінні.

Несуттєві змінні заданої функції чи системи функцій переважно виявляють і редукують з таблиці істинності шляхом перебору або за допомогою складних евристичних методів [1 - 3]. У цій роботі пропонується метод виявлення несуттєвих змінних за допомогою q-розбиття мінтермів [4, 5] і використання декомпозиційних клонів [6]. Порівняно з відомими методами пропонований підхід ефективніший, бо для розв’язання поставленої мети використані прості теоретико-множинні операції та процедури.

Згідно з [7] функція $f(x_1, x_2, ... x_n)$ суттєво залежить від змінної x_i, якщо існують такі значення $\sigma_1,...,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},...,\sigma_n$ змінних $x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n$, що

$$f(\sigma_1,...,\sigma_{i-1},0,\sigma_{i+1},...,\sigma_n) \neq f(\sigma_1,...,\sigma_{i-1},1,\sigma_{i+1},...,\sigma_n) \quad (1)$$

Якщо (1) виконується, то змінна x_i називається *суттєвою* (чи *дійсною*), а у протилежному випадку – *несуттєвою* (чи *фіктивною*). Інакше кажучи, суттєвою змінною функції f є та змінна множини $X = \{x_1, x_2,..., x_n\}$, вилучення якої призводить до зміни функції. Вилучення несуттєвої змінної не змінює функцію, але відповідно скорочує розмірність області означення функції, а отже, спрощує остаточний результат.

Несуттєвою змінною системи функцій вважатимемо змінну, яка несуттєва для всіх її функцій. В загальному випадку частка несуттєвості у системі функцій з несуттєвими змінними є різною. Якщо у такій системі m функцій $\Phi = \{f_1, f_2, ..., f_m\}$, де $f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, зредукувати несуттєві змінні та згрупувати функції за однаковою кількістю $n_1, n_2, ..., n_k$ ($n_i < n$) суттєвих змінних, то одержана нова система складатиметься з k підсистем функцій $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_k$ цих змінних:

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} \Phi_1(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, ..., x_{\lambda_{n_1}}) \\ \Phi_2(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, ..., x_{\lambda_{n_2}}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi_k(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, ..., x_{\lambda_{n_k}}) \end{cases} \quad (2)$$

Перетворення системи функцій несуттєвих змінних у систему (2) підсистем функцій суттєвих змінних називатимемо *розпаралеленою декомпозицією* системи.

Якщо функція f повна, тобто $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$, то множину X можна однозначно розбити на два класи, а саме: на клас суттєвих змінних, від яких функція дійсно залежить, і несуттєвих змінних, зміна значень яких не призводить до зміни значень функції. Виявити ці класи змінних у часткових функціях, тобто $f:\{0,1\}^n \to \{0,1,\sim\}$ (знак "~" символізує неозначеність функції), значно складніше. Порівняно з повними, часткові функції частіше трапляються на практиці, причому частка несуттєвості у них зростає пропорційно неозначеності. Крім того, певні змінні для одного випадку доозначення часткової функції можуть виявитися несуттєвими, а для іншого – суттєвими. Саме такі (можливі) змінні переважно мають слабкоозначені (часткові) функції, у яких сильно обмежена потужність множин наборів, на яких функція набуває значення 0 і 1.

Виявити (не)суттєвість деякої змінної x_i булової функції f можна за допомогою розкладу Шеннона щодо цієї змінної

$$f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = \bar{x}_i f(x_1, ..., 0, ..., x_n) \vee x_i f(x_1, ..., 1, ..., x_n) = \bar{x}_i f_{\bar{x}_i} \vee x_i f_{x_i}, \quad (3)$$

де $f_{\bar{x}_i}$, f_{x_i} – це підфункції від $(n-1)$ змінної функції f, які називаються коефіцієнтами Шеннона.

Якщо змінна x_i повної функції (3) – несуттєва, то виявити її (і вилучити з розгляду) можна тоді, коли функції $f_{\bar{x}_i}$ і f_{x_i} однакові, тобто $f_{\bar{x}_i} = f_{x_i}$, що відповідає рівності $f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$. Функція $f = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3$, наприклад, має несуттєву змінну x_3, бо $f_{\bar{x}_3} = f_{x_3} = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$.

Відповідно, підмножину несуттєвих змінних функції можна виявити шляхом почергового шеннонівського розкладу (3) щодо кожної змінної. Взагалі кажучи, підмножину несуттєвих змінних можна також виявити й одноразовим шеннонівським розкладом щодо цих змінних. Проте такий гіпотетичний випадок має сенс лише тоді, коли потрібно перевірити чи змінні шуканої підмножини належать до несуттєвих, чи ні. У кожному разі метод виявлення несуттєвих змінних за розкладом Шеннона досить громіздкий (що, зрештою, характерно для будь-яких аналітичних чи табличних методів), бо для кожного розкладу необхідно визначати умову несуттєвості. У разі системи (особливо часткових) функцій багатьох змінних шукати несуттєві змінні таким методом досить складно.

Покажемо, що (не)суттєві змінні функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ простіше виявляти за допомогою методу q-розбиття мінтермів [4,5]. Нехай функція f задана у теоретико-множинній формі (ТМФ) як множина (десяткових чи двійкових) номерів наборів змінних $\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$, тобто як множина (десяткових чи двійкових) мінтермів. Якщо функція f повна, тобто $f : \mathbf{E}_2^n \to \mathbf{E}_2$, де $\mathbf{E}_2^n = \underbrace{\mathbf{E}_2 \times \mathbf{E}_2 \times ... \times \mathbf{E}_2}_{n \text{ р€Ќµ‰}}$ – Декартів добуток, $\mathbf{E}_2 = \{0,1\}$, то досить розглядати ТМФ для істинних її значень як множину r мінтермів – $Y^1 = \{m_1, m_2, ..., m_r\}^1$; хибні значення Y^0 функції визначаються як доповнення $Y^0 = \mathbf{E}_2^n \setminus Y^1$. Якщо ж функція f часткова (недоозначена чи слабоокреслена), тобто $f : \{0,1\}^n \to \{0,1,\sim\}$, де знак “~” символізує неозначеність функції, то її ТМФ – це пара множин мінтермів для Y^1 і Y^0: $\begin{cases} Y^1 = \{m_1, m_2, ..., m_r\}^1 \\ Y^0 = \{m_{r+1}, m_{r+2}, ..., m_{2^n - r - h}\}^0 \end{cases}$, де $0 < h < 2^n - r$; у разі повної функції $h = 0$.

Суть процедури q-розбиття (оператор $\overset{P^q}{\Rightarrow}$, де $q \in \{1,2,...,n-1\}$) полягає у вибірці q разрядів з двійкових n-розрядних мінтермів функції f, що задана у ТМФ, і відокремлення їх символом розбиття “|“. Внаслідок цього кожний мінтерм m_i перетворюється у q-розбитий мінтерм $m_i^{n-q}|m_i^q$, складений з двох субмінтермів: $(n-q)$-розрядного субмінтерма $(n-q)$-класу – m_i^{n-q} і q-розрядного субмінтерма q-класу – m_i^q. Розряди субмінтермів обох класів розбиття зберігаються упорядкованими за мінтермом m_i. Множина розбитих мінтермів функції f – досконала теоретико-множинна декомпозиційна форма (досконала ТМДФ) – одержується шляхом ”накладання” на кожний мінтерм функції певної маски q-розбиття літералів $\{l_{\lambda_1} l_{\lambda_2} \cdots l_{\lambda_{n-q}} \mid l_{\lambda_{n-q+1}} l_{\lambda_{n-q+2}} \cdots l_{\lambda_n}\}$, $l_i \in \{\bar{x}_i, x_i\}$.

Наприклад, нехай для розглянутої вище функції, що задана ТМФ Y^1, потрібно знайти ТМДФ для маски 1-розбиття $\{l_1 l_2 | l_3\}$. Тоді, шляхом ”накладання” останньої на мінтерми функції Y^1 одержимо: $Y^1 = \{010, 011, 100, 101\}^1 \overset{P^1}{\Rightarrow} \{l_1 l_2 \mid l_3\} = \{01|0, 01|1, 10|0, 10|1\}^1$.

Алгоритм виявлення несуттєвих змінних повної чи часткової функції f методом q-розбиття такий. Якщо шукати несуттєву змінну x_i, то на задану множину мінтермів ”накладається” маска 1-розбиття $\{l_1 \cdots l_{i-1} l_{i+1} \cdots l_n \mid l_i\}$ (чи $(n-1)$-розбиття $\{l_i \mid l_1 \cdots l_{i-1} l_{i+1} \cdots l_n\}$), якщо ж шукати одночасно дві несуттєві змінні x_i і x_j, то – маска 2-розбиття $\{l_1 \cdots l_{i-1} l_{i+1} \cdots l_{j-1} l_{j+1} \cdots l_n \mid l_i l_j\}$ (чи $-(n-2)$-розбиття $\{l_i l_j \mid l_1 \cdots l_{i-1} l_{i+1} \cdots l_{j-1} l_{j+1} \cdots l_n\}$) і т.д.. Проте розглядатимемо лише 1-розбиття мінтермів – $(n-1)$-розбиття рівноцінне 1-розбиттю щодо (не)суттєвості конкретної змінної заданої функції; інші q-розбиття з практичного погляду розглядати недоцільно.

Для пошуку несуттєвих змінних повної чи часткової функції f використовується матриця-стовпець n різних масок 1-розбиття літералів. Кожний i-ий елемент (тобто маска) $\{l_{\lambda_1} \cdots l_{\lambda_{i-1}} l_{\lambda_{i+1}} \cdots l_{\lambda_{n-1}} | l_{\lambda_i}\}_i$ цієї матриці утворює відповідну досконалу ТМДФ, що формують матрицю-стовпець всіх 1-розбиттів r мінтермів. Виконуючи над множиною розбитих мінтермів досконалої ТМДФ процедуру клонування ($\overset{clo|}{\Rightarrow}$ – оператор клонування q-класу) [6], одержимо два, оскільки $l_i \in \{\bar{x}_i, x_i\}$, – декомпозиційних клони q-класу:

$$\overset{P^1}{\Rightarrow}\{l_{\lambda_1}\cdots l_{\lambda_{i-1}} l_{\lambda_{i+1}}\cdots l_{\lambda_{n-1}} \mid l_{\lambda_i}\}_i = \begin{cases}\{m_1^{n\text{-}1} \mid m_1^1, m_2^{n\text{-}1} \mid m_2^1,\ldots, m_r^{n\text{-}1} \mid m_r^1\}^1 \\ \{m_{r+1}^{n\text{-}1} \mid m_{r+1}^1, m_{r+2}^{n\text{-}1} \mid m_{r+2}^1,\ldots, m_{2^n\text{-}r\text{-}h}^{n\text{-}1} \mid m_{2^n\text{-}r\text{-}h}^1\}^0\end{cases} \overset{clo|}{\Rightarrow}\left\{\left(\begin{array}{c|c} R_1^1 & \\ & 0 \\ R_1^0 & \end{array}\right),\left(\begin{array}{c|c} R_2^1 & \\ & 1 \\ R_2^0 & \end{array}\right)\right\},(4)$$

де $R_i^1 = \{m_1^{n\text{-}1}, m_2^{n\text{-}1},\ldots, m_r^{n\text{-}1}\}^1$ і $R_i^0 = \{m_{r+1}^{n\text{-}1}, m_{r+2}^{n\text{-}1},\ldots, m_{2^n\text{-}r\text{-}h}^{n\text{-}1}\}^0$, $i \in \{1,2\}$ – множини нефіксованих субмінтермів $(n\text{-}1)$-класу, відповідно, істинних і хибних значень функції f; $R_i^1 \cup R_i^0 \subseteq \mathbf{E}_2^{n-1}$, $R_i^1 \cap R_i^0 = \varnothing$; у разі повної функції f об'єднання $R_i^1 \cup R_i^0 = \mathbf{E}_2^{n-1}$, – такі декомпозиційні клони (4) називаються повними, а у разі часткової функції f об'єднання $R_i^1 \cup R_i^0 \neq \mathbf{E}_2^{n-1}$, такі декомпозиційні клони (4) називаються частковими; $m_i^1 \in \{0,1\}$.

Якщо $R_1^1 = R_2^1$ і $R_1^0 = R_2^0$, то повні чи часткові декомпозиційні клони – однакові і їх можна об'єднати в один, так званий максимальний клон [6]. Наприклад, однакові часткові клони q-класу об'єднуються в один (частковий) максимальний клон q-класу так: $\left(\begin{array}{c|c} \varnothing & \\ & 0 \\ 0,3 & \end{array}\right) \cup \left(\begin{array}{c|c} \varnothing & \\ & 1 \\ 0,3 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \varnothing & \\ & 0,1 \\ 0,3 & \end{array}\right)$. Якщо $R_1^1 \neq R_2^1$ і $R_1^0 \neq R_2^0$, то повні неоднакові декомпозиційні клони (4) – максимальні, натомість в цьому випадку часткові неоднакові клони (4) можуть бути або несумісні, якщо $R_1^1 \cap R_2^0 \neq \varnothing$ чи/і $R_1^0 \cap R_2^1 \neq \varnothing$, або сумісні, якщо $R_1^1 \cap R_2^0 = \varnothing$ і $R_1^0 \cap R_2^1 = \varnothing$. Несумісні часткові декомпозиційні клони q– або $(n\text{-}q)$ – класу, на відміну від сумісних, – максимальні. Сумісні часткові клони перетворюються у максимальні (несумісні) процедурою доозначення [6]. Перетворення сумісних часткових клонів q-класу $\left(\begin{array}{c|c} \varnothing & \\ & 0 \\ 0,3 & \end{array}\right)$ і $\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ & 1 \\ 0,2 & \end{array}\right)$ у максимальний клон виглядає так: $\left\{\left(\begin{array}{c|c} \varnothing & \\ & 0 \\ 0,3 & \end{array}\right),\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ & 1 \\ 0,2 & \end{array}\right)\right\} \overset{add|}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ & 0,1 \\ 0,2,3 & \end{array}\right)$, де $\overset{add|}{\Rightarrow}$ – оператор доозначення.

Розглянуті вище операції та процедури для декомпозиційних клонів q–класу, очевидно, справедливі й для декомпозиційних клонів $(n\text{-}q)$–класу.

Теорема. Булева функція $f(x_1, x_2,\ldots x_n)$ містить несуттєву змінну x_i тоді і тільки тоді, якщо для маски 1-розбиття $\{l_{\lambda_1}\cdots l_{\lambda_{i-1}} l_{\lambda_{i+1}}\cdots l_{\lambda_{n-1}} | l_{\lambda_i}\}_i$ або для маски $(n\text{-}1)$-розбиття $\{l_{\lambda_i} | l_{\lambda_1}\cdots l_{\lambda_{i-1}} l_{\lambda_{i+1}}\cdots l_{\lambda_{n-1}}\}_i$ мінтермів одержується один максимальний клон, відповідно, q- або $(n\text{-}q)$-класу.

Доведення. Нехай всі n змінні повної або часткової булевої функції $f(x_1, x_2,\ldots x_n)$ – суттєві. Тоді для довільної маски 1-розбиття $\{l_{\lambda_1}\cdots l_{\lambda_{i-1}} l_{\lambda_{i+1}}\cdots l_{\lambda_{n-1}} | l_{\lambda_i}\}_i$ або $(n\text{-}1)$-розбиття $\{l_{\lambda_i} | l_{\lambda_1}\cdots l_{\lambda_{i-1}} l_{\lambda_{i+1}}\cdots l_{\lambda_{n-1}}\}_i$ утворюються два різних декомпозиційних клони, відповідно, q- або $(n\text{-}q)$-класу, які, за означенням [6], відповідають двом різним підфункціям функції f. Якщо ж функція f має несуттєву змінну x_i, то для маски 1-розбиття $\{l_1\cdots l_{i\text{-}1} l_{i+1}\cdots l_n | l_i\}$ або $(n\text{-}1)$-розбиття $\{l_i \mid l_1\cdots l_{i\text{-}1} l_{i+1}\cdots l_n\}$ утворюються два однакових декомпозиційних клони q- або $(n\text{-}q)$-класу, тобто дві однакові підфункції функції f, які можна об'єднати в один максимальний клон відповідного класу. Отже, на підставі розглянутого вище дана теорема доведена.

Виявлення несуттєвих змінних покажемо на прикладі розглянутої вище функції $f(x_1, x_2, x_3)$ за допомогою карт q-розбиття [4]. Для маски 1-розбиття $\{l_1 l_2 | l_3\}$ одержимо:

$$\{l_1 l_2 \mid l_3\} = \begin{cases} \{1 \mid 0,1 \mid 1,2 \mid 0,2 \mid 1\}^1 \\ \{0 \mid 0,0 \mid 1,3 \mid 0,3 \mid 1\}^0 \end{cases} \overset{clo|}{\Rightarrow} \left\{ \left(\begin{matrix}1,2\\0,3\end{matrix}\;\middle|\;0\right), \left(\begin{matrix}1,2\\0,3\end{matrix}\;\middle|\;1\right) \right\} = \left(\begin{matrix}1,2\\0,3\end{matrix}\;\middle|\;0,1\right)$$

, що підтверджує факт (див. вище) про несуттєвість змінної x_3 на підставі рівності $f_{\bar{x}_3} = f_{x_3}$ (див.рисунок). Натомість для 1-розбиття $\{l_2 l_3 | l_1\}$ маємо:

$l_1 l_2$ \ l_3	0	1
0	○	○
1	●	●
2	●	●
3	○	○

$\Rightarrow$

$l_1 l_2$ \ l_3	(0,1)
0	○
1	●
2	●
3	○

Спрощення карти q-розбиття

$$\{l_2 l_3 \mid l_1\} = \begin{cases} \{2 \mid 0,3 \mid 0,0 \mid 1,1 \mid 1\}^1 \\ \{0 \mid 0,1 \mid 0,2 \mid 1,3 \mid 1\}^0 \end{cases} \overset{clo|}{\Rightarrow} \left\{ \left(\begin{matrix}2,3\\0,1\end{matrix}\;\middle|\;0\right), \left(\begin{matrix}0,1\\2,3\end{matrix}\;\middle|\;1\right) \right\},$$

що можливо тільки у разі суттєвої змінної x_1, бо тоді $f_{\bar{x}_1} \neq f_{x_1}$.

Запропонований метод редукції несуттєвих змінних проілюструємо на прикладі реалізації розпаралеленої декомпозиції системи часткових функцій.

Приклад.[1] Виконати розпаралелену декомпозицію системи 6-ти часткових функцій $\mathbf{Y} = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, що задана таблицею істинності:

	0	3	4	6	11	12	14	16	17	19	20	22
x_1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
x_2	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
x_3	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1
x_4	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
x_5	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
Y_1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
Y_2	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0
Y_3	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0
Y_4	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
Y_5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
Y_6	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

Розв'язання. Побудуємо спочатку матрицю 1-розбиття мінтермів часткових функцій заданої системи $\mathbf{Y}$:

$$\mathbf{Y} \overset{P^1}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} l_1 l_2 l_3 l_4 | l_5 \\ l_1 l_2 l_3 l_5 | l_4 \\ l_1 l_2 l_4 l_5 | l_3 \\ l_1 l_2 l_4 l_5 | l_2 \\ l_2 l_3 l_4 l_5 | l_1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 3 & 4 & 6 & 11 & 12 & 14 & 16 & 17 & 19 & 20 & 22 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0|0,1|1,2|0,3|0,5|1,6|0,7|0,8|0,8|1,9|1,10|0,11|0 \\ 0|0,1|1,2|0,2|1,5|1,6|0,6|1,8|0,9|0,9|1,10|0,10|1 \\ 0|0,3|0,0|1,2|1,7|0,4|1,6|1,8|0,9|0,11|0,8|1,10|1 \\ 0|0,3|0,4|0,6|0,3|1,4|1,6|1,8|0,9|0,11|0,12|0,14|0 \\ 0|0,3|0,4|0,6|0,11|0,12|0,14|0,0|1,1|1,3|1,4|1,6|1 \end{bmatrix} \end{array}$$

На підставі одержаних досконалих ТМДФ даної системи побудуємо досконалі ТМДФ для кожної функції та знайдемо для них максимальні клони. Оскільки функції часткові, то їх максимальні клони одержуються після процедури доозначення сумісних часткових декомпозиційних клонів цих функцій. Зокрема, для маски 1-розбиття $\{l_1 l_2 l_3 l_4 | l_5\}$ одержимо такі максимальні клони функцій:

$$Y_1 \overset{P^1}{\Rightarrow} \begin{cases} \{0|0,2|0,5|1,7|0,10|0,11|0\}^1 \\ \{1|1,3|0,6|0,8|0,8|1,9|1\}^0 \end{cases} \overset{clo|}{\Rightarrow} \left\{ \left(\begin{matrix}0,2,7,10,11\\3,6,8\end{matrix}\;\middle|\;0\right), \left(\begin{matrix}5\\1,8,9\end{matrix}\;\middle|\;0,1\right) \right\} \overset{add|}{\Rightarrow} \left(\begin{matrix}0,2,5,7,10,11\\1,3,6,8,9\end{matrix}\;\middle|\;0,1\right),$$

$$Y_2 \overset{P^1}{\Rightarrow} \begin{cases} \{2|0,3|0,6|0,7|0,8|1,9|1\}^1 \\ \{0|0,1|1,5|1,8|0,10|0,11|0\}^0 \end{cases} \overset{clo|}{\Rightarrow} \left\{ \left(\begin{matrix}2,3,6,7\\0,8,10,11\end{matrix}\;\middle|\;0\right), \left(\begin{matrix}8,9\\1,5\end{matrix}\;\middle|\;1\right) \right\},$$

$$Y_3 \overset{P^1}{\Rightarrow} \begin{cases} \{2|0,3|0,7|0,10|0\}^1 \\ \{0|0,1|1,5|1,6|0,8|0,8|1,9|1,11|0\}^0 \end{cases} \overset{clo|}{\Rightarrow} \left\{ \left(\begin{matrix}2,3,7,10\\0,6,8,11\end{matrix}\;\middle|\;0\right), \left(\begin{matrix}\varnothing\\1,5,9\end{matrix}\;\middle|\;1\right) \right\} \overset{add|}{\Rightarrow} \left(\begin{matrix}2,3,7,10\\0,1,5,6,8,9,11\end{matrix}\;\middle|\;0,1\right),$$

$$Y_4 \overset{P^1}{\Rightarrow} \begin{cases} \{0|0,1|1,5|1,8|1\}^1 \\ \{2|0,3|0,6|0,7|0,8|0,9|1,10|0,11|0\}^0 \end{cases} \overset{clo|}{\Rightarrow} \left\{ \left(\begin{matrix}0\\2,3,6,7,810,11\end{matrix}\;\middle|\;0\right), \left(\begin{matrix}1,5,8\\9\end{matrix}\;\middle|\;1\right) \right\},$$

$$Y_5 \overset{P^1}{\Rightarrow} \begin{cases} \{6|0,11|0\}^1 \\ \{0|0,1|1,2|0,3|0,5|1,7|0,8|0,8|1,9|1,10|0\}^0 \end{cases} \overset{clo|}{\Rightarrow} \left\{ \left(\begin{matrix}6,11\\0,2,3,7,8,10\end{matrix}\;\middle|\;0\right), \left(\begin{matrix}\varnothing\\1,5,8,9\end{matrix}\;\middle|\;1\right) \right\} \overset{add|}{\Rightarrow} \left(\begin{matrix}6,11\\0,1,2,3,5,7,8,9,10\end{matrix}\;\middle|\;0,1\right),$$

$$Y_6 \overset{P^1}{\Rightarrow} \begin{cases} \{8|0\}^1 \\ \{0|0,1|1,2|0,3|0,5|1,6|0,7|0,8|1,9|1,10|0,11|0\}^0 \end{cases} \overset{clo|}{\Rightarrow} \left\{ \left(\begin{matrix}8\\0,2,3,6,7,10\end{matrix}\;\middle|\;0\right), \left(\begin{matrix}\varnothing\\1,5,8,9\end{matrix}\;\middle|\;1\right) \right\}.$$

---

[1] Приклад запозичено в [3, с. 105.]

Оскільки для 1-розбиття $\{l_1 l_2 l_3 l_4 \mid l_5\}$ функції Y_1, Y_3, Y_5 утворюють по одному максимальному клону, то, згідно з теоремою, для них змінна x_5 є несуттєвою.

Визначивши аналогічно несуттєві змінні для решти масок 1-розбиття $\{l_1 l_2 l_3 l_5 \mid l_4\}$, $\{l_1 l_2 l_4 l_5 \mid l_3\}$, $\{l_1 l_3 l_4 l_5 \mid l_2\}$ і $\{l_2 l_3 l_4 l_5 \mid l_1\}$, побудуємо таблицю 1, де знак ”+” вказує на суттєву змінну для певної функції заданої системи. Отже, внаслідок редукції несуттєвих змінних задана система **Y** перетворюється на систему з 4-х (під)систем функцій від суттєвих змінних, що відображає табл. 2:

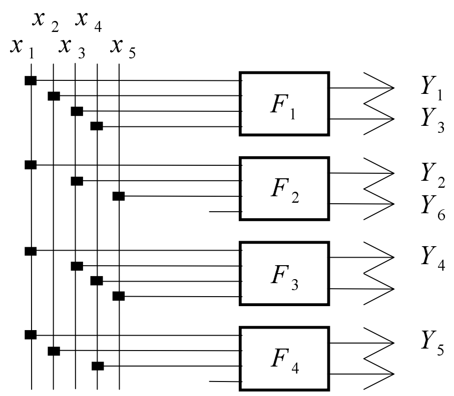
$$\mathbf{Y}_1 = \{Y_1, Y_3\} = F_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$$
$$\mathbf{Y}_2 = \{Y_2, Y_6\} = F_2(x_1, x_3, x_5)$$
$$\mathbf{Y}_3 = Y_4 = F_3(x_1, x_3, x_4, x_5)$$
$$\mathbf{Y}_4 = Y_5 = F_4(x_1, x_2, x_4)$$

Таблиця 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Y_1	+	+	+	+	
Y_2	+		+		+
Y_3	+	+	+	+	
Y_4	+		+	+	+
Y_5	+	+		+	
Y_6	+		+		+

Таблиця 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\mathbf{Y}_1$	+	+	+	+	
$\mathbf{Y}_2$	+		+		+
$\mathbf{Y}_3$	+		+	+	+
$\mathbf{Y}_4$	+	+		+	



Нижче проілюстрована реалізація розпаралеленої декомпозиції системи заданих булевих функцій 5-ти змінних на прикладі 4,2-полюсних логікових пристроїв.

1. Закревский А.Д. Логический синтез каскадных схем. – М., 1981. – 414 с. 2. Бибило П.Н., Енин С.В. Синтез комбинационных схем методами функциональной декомпозиции. – Минск: Наука и техника, 1987. – 190 с. 3. Majewski W. Uklady logiczne. Wybrane zagadnienia. – Warszawa.: Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej. – 1997. – 180 s. 4. Рицар Б.Є. Декомпозиція булевих функцій методом q-розбиття. 1 // Управляющие системы и машины, №6, 1999, с.29-42. 5. Рицар Б.Є. Декомпозиція булевих функцій методом q-розбиття. 2 // Управляющие системы и машины, №1, 2000, с.56-65. 7. Рицар Б.Є. Про декомпозиційні клони булевих функцій // Вісник НУ “Львівська політехніка“, 2000, №385, с. 105-111. 6. Яблонский С.В. Введение в дискретниу математику. – М.: Наука, 1986. – 384 с.