ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 601, 2007, с. 28–39

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 601, 2007, p. 28–39

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Г.Р. Торган[a]

[a] *Львівський національний університет імені Івана Франка*
вул. Університетська, 1, 79001, Львів, Україна

(Отримано 5 листопада 2007 р.)

Розглянуто мішану задачу для нелінійного параболічного рівняння в необмеженій за просторовими змінними області. Одержано достатні умови існування та єдиності узагальненого розв'язку незалежно від його поведінки на нескінченності.

Ключові слова: нелінійне рівняння, мішана задача

2000 MSC: 60J10

УДК: 517.95

Вступ

У праці [1] розглянуто рівняння з другою похідною за часом і четвертими похідними за просторовими змінними вигляду

$$\rho u_{tt} = \operatorname{div} \sigma(\nabla u) + \nu \triangle u_t - \delta^2 \triangle^2 u, \qquad (1)$$

де ρ, ν, δ – додатні константи. Зокрема, такі рівняння присутні у працях Слемрода, Трускіновського, Абеяранте і Новлеса. Це рівняння моделює фази динамічного переходу в рідинах Ван-дер-Ваальса [2], [3] і в русі взаємодії твердих тіл [4], [5]. Багато робіт присвячено частковому випадку рівняння (1), коли присутня одна просторова змінна (див. [6], [7]).

У цій роботі розглянуто нелінійне рівняння з другою похідною за часом, четвертими похідними за однією групою просторових змінних і другими похідними за другою групою просторових змінних у необмеженій області за просторовими змінними. Це рівняння є випадком виродження рівняння типу (1) за однією групою просторових змінних. Такі рівняння називаються $\overrightarrow{2b}$-параболічними рівняннями або еволюційними рівняннями типу Ейдельмана. Зокрема, задачі для лінійних систем рівнянь вигляду (1) досліджено в працях [8]–[22].

I. Формулювання задачі та деякі допоміжні факти

Нехай Ω_x – необмежена область в просторі $\mathbb{R}^k$ з межею $\partial\Omega_x \in C^1$, Ω_y – необмежена область в просторі $\mathbb{R}^m$ з межею $\partial\Omega_y \in C^1$, $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, де $T < \infty$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$, $k+m=n$, $z=(x,y)$, $x \in \Omega_x$, $y \in \Omega_y$.

Розглянемо обмежені області $\Omega_x^R = \Omega_x \cap B_x^R$, $\Omega_y^R = \Omega_y \cap B_y^R$, де $B_x^R = \{x \in \mathbb{R}^k : \ |x| < R\}$ і $B_y^R = \{y \in \mathbb{R}^m : \ |y| < R\}$, $\Omega^R = \Omega_x^R \times \Omega_y^R$, $Q_T^R = \Omega^R \times (0,T)$, $\Omega_\tau^R = Q_T^R \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$.

У необмеженій області Q_T розглянемо задачу для рівняння з дійснозначними коефіцієнтами і вільним членом

$$A(u) \equiv u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{k} (a_{ij}^{sl}(z,t) u_{x_i x_j})_{x_s x_l} -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{k} (a_{ij}(z,t) u_{x_i})_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} (b_i(z,t) |u_{tz_i}|^{p-2} u_{tz_i})_{z_i} +$$

$$+ a_0(z,t) u - \sum_{i,j=1}^{m} (c_{ij}(z,t) u_{y_i})_{y_j} + b_0(z,t) |u_t|^{q-2} u_t =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{k} (f_{ij}(z,t))_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{k} (f_i(z,t))_{x_i} +$$

$$+ f_0(z,t) - \sum_{i=1}^{m} (g_i(z,t))_{y_i} \qquad (2)$$

з початковими умовами

$$u(z,0) = u_0(z), \qquad (3)$$

$$u_t(z,0) = u_1(z) \qquad (4)$$

і крайовими умовами

$$u\big|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega_x \times \Omega_y \times (0,T)} = 0, \qquad (5)$$

де ν – зовнішня нормаль до поверхні $\partial\Omega_x \times \Omega_y \times (0,T)$.

Введемо простори:

$$L^p((0,T);B) = \left\{ u : \int_0^T ||u(\cdot,t)||_B^p dt < \infty \right\},$$

$$||u||_{L^p((0,T);B)} = \left(\int_0^T ||u(\cdot,t)||_B^p dt \right)^{1/p},$$

де $p \in (1,+\infty)$, B – деякий банахів простір;

$$L^p_{loc}(\overline{\Omega}) = \Big\{ u:\ u \in L^p(K)\ \forall K - \text{компактної множини з } \overline{\Omega},\ p \in (1, +\infty] \Big\};$$

$$V^{1,p}_0(\Omega^R) = \Big\{ u:\ u_{z_i} \in L^p(\Omega^R),\ i \in \{1,...,n\},\ u\big|_{\partial\Omega^R} = 0 \Big\};$$

$$V^{1,p}_{0,loc}(\overline{\Omega}) = \Big\{ u:\ u,\ u_{z_i} \in L^p_{loc}(\overline{\Omega}),\ i \in \{1,...,n\},\ u|_{\partial\Omega} = 0 \Big\};$$

$$V^{2,1}_0(\Omega^R) = \Big\{ u:\ u,\ u_{x_i},\ u_{x_ix_j}, u_{y_l} \in L^2(\Omega^R),\ i,j \in \{1,...,k\},\ l \in \{1,...,m\},\ u\big|_{\partial\Omega^R} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\big|_{\partial\Omega^R_x\times\Omega^R_y} = 0 \Big\};$$

$$V^{2,1}_{0,loc}(\overline{\Omega}) = \Big\{ u:\ u,\ u_{x_i},\ u_{x_ix_j},\ u_{y_l} \in L^2_{loc}(\overline{\Omega}),\ i,j \in \{1,...,k\},\ l \in \{1,...,m\},\ u|_{\partial\Omega} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega_x\times\Omega_y} = 0 \Big\};$$

$$W_0(\Omega^R) = V^{2,1}_0(\Omega^R) \cap L^2(\Omega^R_y; H^4(\Omega^R_x)) \cap \cap L^2(\Omega^R_x; H^2(\Omega^R_y)) \cap L^{2p-2}(\Omega^R) \cap V^{1,2(q-1)}_0(\Omega^R).$$

Припустимо виконання таких умов:

(A)

$$a^{sl}_{ij},\ a^{sl}_{ijt},\ a^{sl}_{ijtt},\ a_{ij},\ a_{ijt},\ a_{ijtt},\ a_0,\ a_{0t} \in L^\infty(Q_T),$$

$$D^2_x a^{sl}_{ij}(\cdot,0),\ D^1_x a_{ij}(\cdot,0) \in L^\infty(\Omega),$$

де $D^\alpha_x = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_k^{\alpha_k}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_k$,

$$\sum_{i,j,s,l=i}^{k} a^{sl}_{ij}(z,t)\xi_{ij}\xi_{sl} \geq A_0 \sum_{i,j=1}^{k} |\xi_{ij}|^2,\ A_0 > 0,$$

для майже всіх $(z,t) \in Q_T$ і всіх $\xi_{ij} \in \mathbb{R}$ таких, що $\xi_{ij} = \xi_{ji}$,

$$a^{sl}_{ij}(z,t) = a^{ij}_{sl}(z,t),\ a_{ij}(z,t) = a_{ji}(z,t)$$

майже для всіх

$$(z,t) \in Q_T,\ i,j,s,l \in \{1,...,k\};$$

$$\sum_{i,j=i}^{k} a_{ij}(z,t)\xi_i\xi_j \geq A_1 \sum_{i=1}^{k} |\xi_i|^2,\ A_1 > 0,$$

для майже всіх $(z,t) \in Q_T$ і всіх $\xi_i \in \mathbb{R}$;

$$a_0(z,t) \geq A_2 > 0;$$

(B)

$$b_i,\ b_{it},\ b_0,\ b_{0t} \in L^\infty(Q_T),$$

$$D^1_z b_i(\cdot,0) \in L^\infty(\Omega),\ b_i(z,t) \geq B_0 > 0,\ i \in \{1,...,k\},$$

$$b_0(z,t) \geq \beta_0 > 0;$$

(C)

$$c_{ij},\ c_{ijt},\ c_{ijtt} \in L^\infty(Q_T),\ i,j =\in \{1,...,m\},$$

$$D^1_y c_{ij}(\cdot,0) \in L^\infty(\Omega),\ i,j \in \{1,...,m\},$$

де

$$D^\beta_y = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y_1^{\beta_1}...\partial y_m^{\beta_m}},\ |\beta| = \beta_1 + ... + \beta_m,$$

$$\sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}(z,t)\xi_i\xi_j \geq C_0 \sum_{i=1}^{m} |\xi_i|^2,\ C_0 > 0,$$

для всіх $\xi \in \mathbb{R}^m$ і майже всіх $(z,t) \in Q_T$,

$$c_{ij}(z,t) = c_{ji}(z,t),\ i,j \in \{1,...,m\}.$$

Означення 1. Функцію $u \in L^2((0,T); V^{2,1}_{0,loc}(\overline{\Omega}))$ таку, що $u_t \in L^p((0,T); V^{1,p}_{0,loc}(\overline{\Omega})) \cap L^q((0,T); L^q_{loc}(\overline{\Omega}))$ і u задовольняє початкову умову (3) і рівність

$$\int_{\Omega_\tau} u_t v dz + \int_{Q_\tau} \Big[-u_t v_t + \sum_{i,j,s,l=1}^{k} a^{sl}_{ij}(z,t) u_{x_ix_j} v_{x_sx_l} + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t) u_{x_i} v_{x_j} + a_0(z,t)uv + \sum_{i=1}^{n} b_i(z,t)|u_{tz_i}|^{p-2} u_{tz_i} v_{z_i} + \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}(z,t) u_{y_i} v_{y_j} + b_0(z,t)|u_t|^{q-2}u_t v - \sum_{i,j=1}^{k} f_{ij}(z,t) v_{x_ix_j} - f_0(z,t)v - \sum_{i=1}^{k} f_i(z,t) v_{x_i} - \sum_{i=1}^{m} g_i(z,t) v_{y_i} \Big] dzdt = \int_{\Omega} u_1(z) v dz \tag{6}$$

для довільних $\tau \in (0,T]$ і $v \in L^2((0,T); V^{2,1}_{0,loc}(\overline{\Omega})) \cap L^q((0,T); L^q_{loc}(\overline{\Omega})) \cap L^p((0,T); V^{1,p}_{0,loc}(\overline{\Omega}))$, яка має обмежений носій в Q_T, називаємо узагальненим розв'язком задачі (2)–(5).

Розглянемо спочатку задачу в обмеженій області Q^R_T для рівняння

$$A(u) = \sum_{i,j=1}^{k} (f^R_{ij}(z,t))_{x_ix_j} - \sum_{i=1}^{k} (f^R_i(z,t))_{x_i} + f^R_0(z,t) - \sum_{i=1}^{m} (g^R_i(z,t))_{y_i} \tag{7}$$

з початковими умовами

$$u(z,0) = u^R_0(z), \tag{8}$$

$$u_t(z,0)=u_1^R(z) \quad (9)$$

і крайовими умовами

$$u\big|_{\partial\Omega^R\times(0,T)}=0,\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\partial\Omega_x^R\times\Omega_y^R\times(0,T)}=0. \quad (10)$$

Накладемо на вільний член умову **(F):**

$$f_{ij}^R,\ f_{ijt}^R,\ f_{ijtt}^R,\ f_i^R,\ f_{it}^R,\ f_0^R,\ f_{0t}^R\in L^2(Q_T^R),$$

$$g_l^R,\ g_{lt}^R,\ g_{ltt}^R\in L^2(Q_T^R),\ f_i^R\in L^{p'}(Q_T^R),$$

$$(f_{ij}^R(\cdot,0))_{x_ix_j},\ (f_i^R(\cdot,0))_{x_i},\ (g_l^R(\cdot,0))_{y_l}\in L^2(\Omega^R),$$

$$l\in\{1,...,m\},\ i,j\in\{1,...,k\}.$$

Означення 2. Функцію $u\in L^2((0,T);V_0^{2,1}(\Omega^R))$ таку, що $u_t\in L^p((0,T);V_0^{1,p}(\Omega^R))\cap L^q((0,T);L^q(\Omega^R))$, $u_{tt}\in L^2((0,T);L^2(\Omega^R))$ і u задовольняє початкові умови (8), (9) і рівність

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\Bigg[u_{tt}v+\sum_{i,j,s,l=1}^k a_{ij}^{sl}(z,t)u_{x_ix_j}v_{x_sx_l}+\sum_{i,j=1}^k a_{ij}(z,t)u_{x_i}v_{x_j}+$$

$$+\sum_{i=1}^n b_i(z,t)|u_{tz_i}|^{p-2}u_{tz_i}v_{z_i}+\sum_{i,j=1}^m c_{ij}(z,t)u_{y_i}v_{y_j}+$$

$$+a_0(z,t)uv+b_0(z,t)|u_t|^{q-2}u_tv-\sum_{i,j=1}^k f_{ij}^R(z,t)v_{x_ix_j}-$$

$$-\sum_{i=1}^k f_i^R(z,t)v_{x_i}-f_0^R(z,t)v-\sum_{i=1}^m g_i^R(z,t)v_{y_i}\Bigg]dzdt=0 \quad (11)$$

для довільних $\tau\in(0,T]$ і $v\in L^2((0,T);V_0^{2,1}(\Omega^R))\cap L^q((0,T);L^q(\Omega^R))\cap L^2((0,T);V_0^{1,p}(\Omega^R))$, називаємо узагальненим розв'язком задачі (7)–(10).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (A), (B), (C), (F) *і* $u_0^R\in V_0^{2,1}(\Omega^R)\cap L^2(\Omega_y^R;H^4(\Omega_x^R))\cap L^2(\Omega_x^R;H^2(\Omega_y^R))$, $u_1^R\in V_0^{2,1}(\Omega^R)\cap L^{2q-2}(\Omega^R)$, $|u_{1z_i}^R|^{p-2}u_{1z_i}^R\in L^2(\Omega^R)$, $i\in\{1,...,n\}$, $p>1$, $q>1$. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (7)–(10).*

Доведення цієї теореми можна провести повністю аналогічно до доведення теореми 1 [23], тому його наводити не будемо.

II. Основні результати

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (A), (B), (C), $u_0\in V_{0,loc}^{2,1}(\overline{\Omega})\cap L_{loc}^2(\overline{\Omega}_y;H_{loc}^4(\overline{\Omega}_x))\cap L_{loc}^2(\overline{\Omega}_x;H_{loc}^2(\overline{\Omega}_y))$, $u_1\in V_{0,loc}^{2,1}(\overline{\Omega})\cap L_{loc}^{2q-2}(\overline{\Omega})$, $|u_{1z_i}|^{p-2}u_{1z_i}\in L_{loc}^2(\overline{\Omega})$, $i\in\{1,...,n\}$, f_{ij}, f_{ijt}, f_i, f_0, $g_l\in L^2((0,T);L_{loc}^2(\overline{\Omega}))$, $i,j\in\{1,...,k\}$, $l\in\{1,...,m\}$. *Тоді при* $n>2$, $2<p<q$, $q<\frac{2n}{n-2}$, *а також у випадку, коли* $n=2$, $2<p<q$, *існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (2)–(5).*

□ *Доведення.*

Розглянемо в обмеженій області Q_T^R, де R приймає значення $h\in\mathbb{N}$ (для спрощення запису цю область позначимо через Q_T^h) допоміжну задачу:

$$A(u)=F^{h,h},\ (z,t)\in Q_T^h,$$

$$u|_{\partial\Omega^h\times(0,T)}=0,\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\partial\Omega_x^h\times\Omega_y^h\times(0,T)}=0, \quad (12)$$

$$u(z,0)=u_0^{h,h}(z),\ u_t(z,0)=u_1^{h,h}(z),\ z\in\Omega^h,$$

де

$$F^{h,h}(z,t)=\sum_{i,j=1}^k(f_{ij}^{h,h})_{x_ix_j}-$$

$$-\sum_{i=1}^k(f_i^{h,h})_{x_i}+f_0^{h,h}-\sum_{i=1}^m(g_i^{h,h})_{y_i},$$

$$f_{ij}^{h,h}(z,t)=\begin{cases} f_{ij}^h(z,t), & (z,t)\in Q_T^h\\ 0, & (z,t)\in Q_T\setminus Q_T^h,\end{cases}$$

$$f_i^{h,h}(z,t)=\begin{cases} f_i^h(z,t), & (z,t)\in Q_T^h\\ 0, & (z,t)\in Q_T\setminus Q_T^h,\end{cases}$$

$$f_0^{h,h}(z,t)=\begin{cases} f_0^h(z,t), & (z,t)\in Q_T^h\\ 0, & (z,t)\in Q_T\setminus Q_T^h,\end{cases}$$

$$g_i^{h,h}(z,t)=\begin{cases} g_i^h(z,t), & (z,t)\in Q_T^h\\ 0, & (z,t)\in Q_T\setminus Q_T^h.\end{cases}$$

Початкові умови мають такий вигляд: $u_0^{h,h}(z)=u_0^h(z)\chi^h(z)$, $u_1^{h,h}(z)=u_1^h(z)\chi^h(z)$, де

$$\chi^h(z)=\begin{cases} 1, & z\in\{(x,y):\ |x|<h-1,\ |y|<h-1\}\\ 0, & z\in\{(x,y):\ |x|\ge h,\ |y|\ge h\},\end{cases}$$

$0\le\chi^h(z)\le 1$, $z\in\mathbb{R}^n$, $\chi^h\in C^2(\mathbb{R}^n)$. Послідовності $\{f_{ij}^h\}$, $\{f_i^h\}$, $\{f_0^h\}$, $\{g_i^h\}$, $\{u_0^h\}$, $\{u_1^h\}$ такі, що

$$f_{ij}^h\in C^2([0,T];C_0^2(\Omega)),\ f_i^h,f_0^h,g_l^h\in C^1([0,T];C_0^1(\Omega)),$$

$$i,j\in\{1,...,k\},\ l\in\{1,...,m\},$$

$$u_0^h\in C_0^4(\Omega),\ u_1^h\in C_0^1(\Omega)$$

і

$$f_{ij}^h\to f_{ij},\ f_{ijt}^h\to f_{ijt},\ f_i^h\to f_i \quad (13)$$

в $L^2((0,T);L_{loc}^2(\overline{\Omega}))$, $i,j\in\{1,...,k\}$, $f_i^h\to f_i$ в $L^{p'}((0,T);L_{loc}^{p'}(\overline{\Omega}))$, $i\in\{1,...,k\}$, $f_0^h\to f_0$ в $L^2((0,T);L_{loc}^2(\overline{\Omega}))$, $g_i^h\to g_i$, $g_{it}^h\to g_{it}$ в $L^2((0,T);L_{loc}^2(\overline{\Omega}))$, $i\in\{1,...,m\}$, $u_0^h\to u_0$ в $V_{0,loc}^{2,1}(\overline{\Omega})$, $u_1^h\to u_1$ в $L_{loc}^2(\overline{\Omega})$ при $h\to\infty$.

Розглянемо u^h – розв'язок задачі (12). З попередньої теореми випливає, що ця задача має узагальнений розв'язок в сенсі означення 2. Підставимо u^h замість u в рівність (11) і приймемо

$$v=u_t^h\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t},$$

де

$$\varphi(x)=[h_R(x)]^\gamma,\ \psi(y)=[\widehat{h}_R(y)]^\gamma,\ \gamma>2,$$

$$h_R(x)=\begin{cases}\frac{R^2-|x|^2}{R}, & |x|\le R\\ 0, & |x|>R,\end{cases}\quad \widehat{h}_R(x)=\begin{cases}\frac{R^2-|y|^2}{R}, & |y|\le R\\ 0, & |y|>R.\end{cases}$$

Отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[u_t^h u_{tt}^h \varphi_R(x)\psi_R(y)+$$

$$+\sum_{i,j,s,l=1}^{k} a_{ij}^{sl}(z,t)u_{x_ix_j}^h\left(u_{tx_sx_l}^h\varphi_R(x)\psi_R(y)+\right.$$

$$+u_{tx_s}^h(\varphi_R(x))_{x_l}\psi_R(y)+u_{tx_l}^h(\varphi_R(x))_{x_s}\psi_R(y)+$$

$$\left.+u_t^h(\varphi_R(x))_{x_sx_l}\psi_R(y)\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)u_{x_i}^h\Big(u_{tx_j}^h\varphi_R(x)\psi_R(y)+$$

$$+u_t^h(\varphi_R(x))_{x_j}\psi_R(y)\Big)+a_0(z,t)u^h u_t^h\varphi_R(x)\psi_R(y)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} b_i(z,t)|u_{tz_i}^h|^p\varphi_R(x)\psi_R(y)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k} b_i(z,t)|u_{tx_i}^h|^{p-2}u_{tx_i}^h u_t^h(\varphi_R(x))_{x_i}\psi_R(y)+$$

$$+\sum_{i=k+1}^{n} b_i(z,t)|u_{ty_i}^h|^{p-2}u_{ty_i}^h u_t^h\varphi_R(x)(\psi_R(y))_{y_i}+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}(z,t)u_{y_i}^h\Big(u_{ty_j}^h\varphi_R(x)\psi_R(y)+$$

$$+u_t^h\varphi_R(x)(\psi_R(y))_{y_j}\Big)+$$

$$+b_0(x,t)|u_t^h|^{q-2}u_t^h u_t^h\varphi_R(x)\psi_R(y)\Big]e^{-\mu t}dzdt=$$

$$=\int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{i,j=1}^{k} f_{ij}^{h,h}\Big(u_{tx_ix_j}^h\varphi_R(x)\psi_R(y)+$$

$$+u_{tx_i}^h(\varphi_R(x))_{x_j}\psi_R(y)+$$

$$+u_{tx_j}^h(\varphi_R(x))_{x_i}\psi_R(y)+u_t^h(\varphi_R(x))_{x_ix_j}\psi_R(y)\Big)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k} f_i^{h,h}\left(u_{tx_i}^h\varphi_R(x)\psi_R(y)+u_t^h(\varphi_R(x))_{x_i}\psi_R(y)\right)+$$

$$+f_0^{h,h}u_t^h\varphi_R(x)\psi_R(y)+\sum_{i=1}^{m} g_i^{h,h}\left(u_{ty_i}^h\varphi_R(x)\psi_R(y)+\right.$$

$$\left.+u_t^h\varphi_R(x)(\psi_R(y))_{y_i}\right)\Big]e^{-\mu t}dzdt,\ \tau\in(0,T]. \qquad (14)$$

Оцінимо доданки останньої рівності. Очевидно,

$$J_1:=\int\limits_{Q_\tau} u_t^h u_{tt}^h\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|u_t^h|^2\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dz-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}|u_1^{h,h}|^2\varphi_R(x)\psi_R(y)dz+$$

$$+\frac{\mu}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u_t^h|^2\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt.$$

На підставі умови (A)

$$J_2:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j,s,l=1}^{k} a_{ij}^{sl}(z,t)u_{x_ix_j}^h u_{tx_sx_l}^h\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\geq$$

$$\geq\frac{A_0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^h|^2\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dz-$$

$$-\frac{A^0}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i,j=1}^{k}|u_{0x_ix_j}^{h,h}|^2\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dz+$$

$$+\left(\frac{\mu A_0}{2}-\frac{A_3}{2}\right)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^h|^2\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt,$$

де $\sum\limits_{i,j,s,l=1}^{k} a_{ij}^{sl}(z,t)\xi_{ij}\xi_{sl}\leq A^0\sum\limits_{i,j=1}^{k}|\xi_{ij}|^2$, $A^0>0$, $\sum\limits_{i,j,s,l=1}^{k} a_{ijt}^{sl}(z,t)\xi_{ij}\xi_{sl}\leq A_3\sum\limits_{i,j=1}^{k}|\xi_{ij}|^2$, $A_3\geq 0$ для майже всіх $(z,t)\in Q_T$ і всіх $\xi_{ij}\in\mathbb{R}$ таких, що $\xi_{ij}=\xi_{ji}$;

$$J_3:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j,s,l=1}^{k} a_{ij}^{sl}(z,t)u_{x_ix_j}^h u_{tx_s}^h(\varphi_R(x))_{x_l}\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\geq$$

$$\geq-\frac{\delta A_4}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^h|^2\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt-$$

$$-\frac{\delta}{p}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u_{tz_i}^h|^p\varphi_R(x)\psi_R(y)(y)e^{-\mu t}dzdt-$$

$$-C_1(\delta,p)\int\limits_{Q_T}\sum_{i=1}^{k}\left|\frac{(\varphi_R(x))_{x_i}}{(\varphi_R(x))^{1/2+1/p}}\right|^{\frac{2p}{p-2}}\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt,$$

де δ – довільна мала додатна константа, $A_4=\operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T}\sum\limits_{i,j,s,l=1}^{k}|a_{ij}^{sl}(z,t)|^2$, $C_1(\delta,p)$ – деяка додатна константа, яка залежить від δ і p.
Інтеграл

$$J_4:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j,s,l=1}^{k} a_{ij}^{sl}(z,t)u_{x_ix_j}^h u_{tx_l}^h(\varphi_R(x))_{x_s}\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt$$

оцінюється аналогічно.
Далі

$$J_5:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j,s,l=1}^{k} a_{ij}^{sl}(z,t)u_{x_ix_j}^h u_t^h(\varphi_R(x))_{x_sx_l}\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\geq$$

$$\geq-\frac{\delta A_4}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^h|^2\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt-$$

$$-\frac{\delta}{q}\int\limits_{Q_\tau}|u_t^h|^q\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt-$$

$$-C_2(\delta,q)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}\left|\frac{(\varphi_R(x))_{x_ix_j}}{(\varphi_R(x))^{1/2+1/q}}\right|^{\frac{2q}{q-2}}\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt,$$

де $C_2(\delta,q)$ – деяка додатна константа, яка залежить від δ і q;

$$J_6:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}(z,t)u_{x_i}^h u_{tx_j}^h\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\geq$$

$$\geq\frac{A_1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{k}|u_{x_i}^h|^2\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dz-$$

$$-\frac{A^2}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{k}|u_{0x_i}^{h,h}|^2\varphi_R(x)\psi_R(y)dz+$$

$$+\left(\frac{\mu A^2}{2}-\frac{A_5}{2}\right)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{k}|u_{x_i}^h|^2\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt,$$

де $\sum\limits_{i,j=1}^{k}a_{ij}(z,t)\xi_i\xi_j\leq A^2\sum\limits_{i=1}^{k}|\xi_i|^2$, $A^2>0$, $\sum\limits_{i,j=1}^{k}a_{ijt}(z,t)\xi_i\xi_j\leq A_5\sum\limits_{i=1}^{k}|\xi_i|^2$, $A_5\geq 0$ для майже всіх $(z,t)\in Q_T$ і всіх $\xi_i\in\mathbb{R}$;

$$J_7:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}(z,t)u_{x_i}^h u_t^h(\varphi_R(x))_{x_j}\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\geq$$

$$\geq-\frac{\delta A_6}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{k}|u_{x_i}^h|^2\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt-$$

$$-\frac{\delta}{q}\int\limits_{Q_\tau}|u_t^h|^q\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt-$$

$$-C_2(\delta,q)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{k}\left|\frac{(\varphi_R(x))_{x_i}}{(\varphi_R(x))^{1/2+1/q}}\right|^{\frac{2q}{q-2}}\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt,$$

де $A_6=\operatorname{ess\,sup}\limits_{Q_T}\sum\limits_{i,j=1}^{k}|a_{ij}(z,t)|^2$;

$$J_8:=\int\limits_{Q_\tau}a_0(z,t)u^h u_t^h\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\geq$$

$$\geq-A_2T\int\limits_{\Omega_0}|u_0^{h,h}|^2\varphi_R(x)\psi_R(y)dz+$$

$$+\frac{A_2(1+T^2)}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u_t^h|^2\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt.$$

З умови (B) маємо

$$J_9:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}b_i(z,t)|u_{tz_i}^h|^p\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\geq$$

$$\geq B_0\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u_{tz_i}^h|^p\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt;$$

$$J_{10}:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{k}b_i(z,t)|u_{tx_i}^h|^{p-2}u_{tx_i}^h u_t^h\times$$

$$\times(\varphi_R(x))_{x_i}\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\geq$$

$$\geq-\frac{B_1\delta}{p'}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{k}|u_{tx_i}^h|^p\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt-$$

$$-\frac{\delta}{q}\int\limits_{Q_\tau}|u_t^h|^q\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt-$$

$$-C_3(\delta,p,q)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{k}\left|\frac{(\varphi_R(x))_{x_i}}{(\varphi_R(x))^{1/p'+1/q}}\right|^{\frac{qp}{q-p}}\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt,$$

де $B_1=\operatorname{ess\,sup}\limits_{Q_T}\sum\limits_{i=1}^{n}|b_i(z,t)|^{p'}$, $C_3(\delta,p,q)$ – деяка додатна константа, яка залежить від δ, p і q;

$$J_{11}:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=k+1}^{n}b_i(z,t)|u_{ty_i}^h|^{p-2}u_{ty_i}^h u_t^h\times$$

$$\times\varphi_R(x)(\psi_R(y))_{y_i}e^{-\mu t}dzdt\geq$$

$$\geq-\frac{B_1\delta}{p'}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=k+1}^{n}|u_{ty_i}^h|^p\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt-$$

$$-\frac{\delta}{q}\int\limits_{Q_\tau}|u_t^h|^q\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt-$$

$$-C_3(\delta,p,q)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{(\psi_R(y))_{y_i}}{(\psi_R(y))^{1/p'+1/q}}\right|^{\frac{qp}{q-p}}\varphi_R(x)e^{-\mu t}dzdt;$$

$$J_{12}:=\int\limits_{Q_\tau}b_0(z,t)|u_t^h|^{q-2}u_t^h u_t^h\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\geq$$

$$\geq\beta_0\int\limits_{Q_\tau}|u_t^h|^q\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt.$$

З умови (C) будемо мати

$$J_{13}:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{m}c_{ij}(z,t)u_{y_i}^h u_{ty_j}^h\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\geq$$

$$\geq\frac{C_0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{m}|u_{y_i}^h|^2\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dz-$$

$$-\frac{C^0}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{m}|u_{0y_i}^{h,h}|^2\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dz+$$

$$+\frac{\mu C_0-C_1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{m}|u_{y_i}^h|^2\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt,$$

де $\sum\limits_{i,j=1}^{m} c_{ij}(z,t)\xi_i\xi_j \leq C^0 \sum\limits_{i=1}^{m} |\xi_i|^2$, $C^0 > 0$, $\sum\limits_{i,j=1}^{m} c_{ijt}(z,t)\xi_i\xi_j \leq C_1 \sum\limits_{i=1}^{m} |\xi_i|^2$, $C_1 \geq 0$ для майже всіх $(z,t) \in Q_T$ і всіх $\xi_i \in \mathbb{R}$;

$$J_{14} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}(z,t) u^h_{y_i} u^h_t \varphi_R(x)(\psi_R(y))_{y_j} e^{-\mu t} dzdt \geq$$

$$\geq -\frac{C_2\delta}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{m} |u^h_{y_i}|^2 \varphi_R(x)\psi_R(y) e^{-\mu t} dzdt -$$

$$-\frac{\delta}{q} \int\limits_{Q_\tau} |u^h_t|^q \varphi_R(x)\psi_R(y) e^{-\mu t} dzdt -$$

$$-C_2(\delta,q) \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{(\psi_R(y))_{y_i}}{(\psi_R(y))^{1/2+1/q}} \right|^{\frac{2q}{q-2}} \varphi_R(x) e^{-\mu t} dzdt,$$

де $C_2 = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q_T} \sum\limits_{i,j=1}^{m} |c_{ij}(z,t)|^2$.

Крім того,

$$J_{15} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} f^{h,h}_{ij} u^h_{tx_ix_j} \varphi_R(x)\psi_R(y) e^{-\mu t} dzdt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\delta} \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} |f^{h,h}_{ij}|^2 \varphi_R(x)\psi_R(y) e^{-\mu t} dz +$$

$$+\frac{\delta}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} |u^h_{x_ix_j}|^2 \varphi_R(x)\psi_R(y) e^{-\mu t} dz +$$

$$+\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} \sum_{i,j=1}^{k} |f^{h,h}_{ij}|^2 \varphi_R(x)\psi_R(y) e^{-\mu t} dz +$$

$$+\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} \sum_{i,j=1}^{k} |u^{h,h}_{0x_ix_j}|^2 \varphi_R(x)\psi_R(y) e^{-\mu t} dz +$$

$$+\frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} \left(\frac{\mu}{\delta} |f^{h,h}_{ij}|^2 + |f^{h,h}_{ijt}|^2 \right) dzdt +$$

$$+\frac{(\delta\mu+1)}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} |u^h_{x_ix_j}|^2 \varphi_R(x)\psi_R(y) e^{-\mu t} dzdt;$$

$$J_{16} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} f^{h,h}_{ij} u^h_{tx_i} (\varphi_R(x))_{x_j} \psi_R(y) e^{-\mu t} dzdt \leq$$

$$\leq \frac{\delta}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} |f^{h,h}_{ij}|^2 \varphi_R(x)\psi_R(y) e^{-\mu t} dzdt +$$

$$+\frac{\delta}{p} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u^h_{tz_i}|^p \varphi_R(x)\psi_R(y) e^{-\mu t} dzdt +$$

$$+C_1(\delta,p) \int\limits_{Q_\tau} \left| \frac{(\varphi_R(x))_{x_i}}{(\varphi_R(x))^{1/2+1/p}} \right|^{\frac{2p}{p-2}} \psi_R(y) e^{-\mu t} dzdt;$$

$$J_{17} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} f^{h,h}_{ij} u^h_t (\varphi_R(x))_{x_ix_j} \psi_R(y) e^{-\mu t} dzdt \leq$$

$$\leq \frac{\delta}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} |f^{h,h}_{ij}|^2 \varphi_R(x)\psi_R(y) e^{-\mu t} dzdt +$$

$$+\frac{\delta}{q} \int\limits_{Q_\tau} |u^h_t|^q \varphi_R(x)\psi_R(y) e^{-\mu t} dzdt +$$

$$+C_2(\delta,q) \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} \left| \frac{(\varphi_R(x))_{x_ix_j}}{(\varphi_R(x))^{1/2+1/q}} \right|^{\frac{2q}{q-2}} \psi_R(y) e^{-\mu t} dzdt;$$

$$J_{18} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{k} f^{h,h}_{i} u^h_{tx_i} \varphi_R(x)\psi_R(y) e^{-\mu t} dzdt \leq$$

$$\leq \frac{1}{p'\delta^{p'/p}} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{k} |f^{h,h}_{i}|^{p'} \varphi_R(x)\psi_R(y) e^{-\mu t} dzdt +$$

$$+\frac{\delta}{p} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u^h_{tz_i}|^p \varphi_R(x)\psi_R)(y) e^{-\mu t} dzdt;$$

$$J_{19} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{k} f^{h,h}_{i} u^h_t (\varphi_R(x))_{x_i} \psi_R(y) e^{-\mu t} dzdt \leq$$

$$\leq \frac{\delta}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{k} |f^{h,h}_{i}|^2 \varphi_R(x)\psi_R(y) e^{-\mu t} dzdt +$$

$$+\frac{\delta}{q} \int\limits_{Q_\tau} |u^h_t|^q \varphi_R(x)\psi_R(y) e^{-\mu t} dzdt +$$

$$+C_2(\delta,q) \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{k} \left| \frac{(\varphi_R(x))_{x_i}}{(\varphi_R(x))^{1/2+1/q}} \right|^{\frac{2q}{q-2}} \psi_R(y) e^{-\mu t} dzdt;$$

$$J_{20} := \int\limits_{Q_\tau} f^{h,h}_0 u^h_t \varphi_R(x)\psi_R(y) e^{-\mu t} dzdt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} |f^{h,h}_0|^2 \varphi_R(x)\psi_R(y) e^{-\mu t} dzdt +$$

$$+\frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u^h_t|^2 \varphi_R(x)\psi_R(y) e^{-\mu t} dzdt;$$

$$J_{21} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{m} g^{h,h}_{i} u^h_{ty_i} \varphi_R(x)\psi_R(y) e^{-\mu t} dzdt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\delta} \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{m} |g^{h,h}_{i}|^2 \varphi_R(x)\psi_R(y) e^{-\mu t} dz +$$

$$+\frac{\delta}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{m} |u^h_{y_i}|^2 \varphi_R(x)\psi_R(y) e^{-\mu t} dz +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{m}|g_i^{h,h}|^2\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dz+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{m}|u_{0y_i}^{h,h}|^2\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dz+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{m}(\mu|g_i^{h,h}|^2+|g_{it}^{h,h}|^2)\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{m}|u_{y_i}^h|^2\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt;$$

$$J_{22}:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{m}g_i^{h,h}u_t^h\varphi_R(x)(\psi_R(y))_{y_i}e^{-\mu t}dzdt\le$$

$$\le\frac{\delta}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{m}|g_i^{h,h}|^2\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt+$$

$$+\frac{\delta}{q}\int\limits_{Q_\tau}|u_t^h|^q\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt+$$

$$+C_2(\delta,q)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{(\psi_R(y))_{y_i}}{(\psi_R(y))^{1/2+1/q}}\right|^{\frac{2q}{q-2}}\varphi_R(x)e^{-\mu t}dzdt.$$

Використовуючи отримані оцінки, з (14) маємо

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Bigg[|u_t^h|^2+(A_0-\delta)\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^h|^2+(C_0-2\delta)\sum_{i=1}^{m}|u_{y_i}^h|^2+$$

$$+A_2\sum_{i=1}^{k}|u_{x_i}^h|^2\Bigg]\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dz+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[|u_t^h|^2\left(\mu-A_4-A_4\tau^2-1\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^h|^2\left(\mu A_0-A_1-\delta\mu-1-3\delta A_3\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}|u_{y_i}^h|^2\left(\mu C_0-C_1-C_2\delta-1\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}|u_{tz_i}^h|^p\left(2B_0-\frac{2B_1\delta}{p'}-\frac{8\delta}{p}\right)+$$

$$+|u_t^h|^q\left(2\beta_0-\frac{16\delta}{q}\right)+\sum_{i=1}^{k}|u_{x_i}^h|^2\left(\mu A^2-A_5-\delta A_6\right)\Bigg]\times$$

$$\times\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\le\int\limits_{\Omega_0}\Bigg[2TA_4|u_0^{h,h}|^2+$$

$$+|u_1^{h,h}|^2+\sum_{i,j=1}^{k}|u_{0x_ix_j}^{h,h}|^2(A^0+1)+\sum_{i=1}^{m}|u_{0y_i}^{h,h}|^2(C^0+1)+$$

$$+A^2\sum_{i=1}^{k}|u_{0x_i}^{h,h}|^2\Bigg]\varphi_R(x)\psi_R(y)dz+$$

$$+\int\limits_{\Omega_0}\left(\sum_{i,j=1}^{k}|f_{ij}^{h,h}|^2+\sum_{i=1}^{m}|g_i^{h,h}|^2\right)\varphi_R(x)\psi_R(y)dz+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\sum_{i=1}^{m}\Big((\mu+\delta)|g_i^{h,h}|^2+|g_{it}^{h,h}|^2\Big)+|f_0^{h,h}|^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\Big(\delta|f_i^{h,h}|^2+\frac{1}{p'\delta^{p'/p}}|f_i^{h,h}|^{p'}\Big)+\sum_{i,j=1}^{k}\Big(\big(2\delta+\frac{\mu}{\delta}\big)|f_{ij}^{h,h}|^2+$$

$$+|f_{ijt}^{h,h}|^2\Big)\Bigg]\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt+$$

$$+\int\limits_{\Omega_\tau}\left[\frac{1}{\delta}\sum_{i,j=1}^{k}|f_{ij}^{h,h}|^2+\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{m}|g_i^{h,h}|^2\right]\varphi_R(x)\psi_R(y)dz+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\sum_{i,j=1}^{k}\left|\frac{(\varphi_R(x))_{x_ix_j}}{(\varphi_R(x))^{1/2+1/q}}\right|^{\frac{2q}{q-2}}\psi_R(y)C_2(\delta,q)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\Bigg(\left|\frac{(\psi_R(y))_{y_i}}{(\psi_R(y))^{1/q+1/p'}}\right|^{\frac{pq}{q-p}}C_3(\delta,p,q)+$$

$$+\left|\frac{(\psi_R(y))_{y_i}}{(\psi_R(y))^{1/2+1/q}}\right|^{\frac{2q}{q-2}}C_2(\delta,q)\Bigg)\varphi_R(x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\Bigg(\left|\frac{(\varphi_R(x))_{x_i}}{(\varphi_R(x))^{1/2+1/p}}\right|^{\frac{2p}{p-2}}C_1(\delta,p)+$$

$$+\left|\frac{(\varphi_R(x))_{x_i}}{(\varphi_R(x))^{1/2+1/q}}\right|^{\frac{2q}{q-2}}C_2(\delta,q)+$$

$$+\left|\frac{(\varphi_R(x))_{x_i}}{(\varphi_R(x))^{1/q+1/p'}}\right|^{\frac{pq}{q-p}}C_3(\delta,p,q)\Bigg)\psi_R(y)\Bigg]e^{-\mu t}dzdt.$$

Приймемо $\mu=\max\Big\{A_4(1+T^2)+1;\ \frac{A_1+1+3\delta A_{15}}{A_0-\delta}+1;\ \frac{A^3+\delta A_{16}+A_7}{A^3}+1;\ \frac{C_1+C_6\delta+1}{C_0}+1\Big\}$, де δ – довільна мала додатна константа, яка задовільняє таку умову: $\delta<\min\left\{A_0;\frac{C_0}{2};\frac{\beta_0 q}{8};\frac{B_0pp'}{B_5p+4M_1p'}\right\}$. Тоді підінтегральний вираз лівої частини останньої нерівності додатний, а права частина обмежена додатною константою.

Візьмемо $R_0<R$, тоді з останньої нерівності матимемо

$$\int\limits_{\Omega_T^{R_0}}\left[|u_t^h|^2+\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^h|^2+\sum_{i=1}^{m}|u_{y_i}^h|^2+\sum_{i=1}^{k}|u_{x_i}^h|^2\right]dz+$$

$$+\int\limits_{Q_T^{R_0}}\Bigg[|u_t^h|^2+\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^h|^2+\sum_{i=1}^{m}|u_{y_i}^h|^2+\sum_{i=1}^{n}|u_{tz_i}^h|^p+|u_t^h|^q+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}|u_{x_i}^h|^2\Bigg]dzdt\le\frac{e^{\mu T}R^2}{\mu(R^2-R_0^2)^2}\int\limits_{\Omega_0}\Bigg[|u_0^{h,h}|^2+|u_1^{h,h}|^2+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{k}|u_{0x_ix_j}^{h,h}|^2+\sum_{i=1}^{m}|u_{0y_i}^{h,h}|^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}|u_{0x_i}^{h,h}|^2\Big]\varphi_R(x)\psi_R(y)dz+\int_{\Omega_0}\left(\sum_{i,j=1}^{k}|f_{ij}^{h,h}|^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{m}|g_i^{h,h}|^2\right)\varphi_R(x)\psi_R(y)dz+\int_{Q_\tau}\Big[\sum_{i=1}^{m}\big(|g_i^{h,h}|^2+$$

$$+|g_{it}^{h,h}|^2\big)+|f_0^{h,h}|^2+\sum_{i=1}^{k}\big(|f_i^{h,h}|^2+|f_i^{h,h}|^{p'}\big)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{k}\big(|f_{ij}^{h,h}|^2+|f_{ijt}^{h,h}|^2\big)\Big]\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt+$$

$$+\int_{\Omega_\tau}\Big[\sum_{i,j=1}^{k}|f_{ij}^{h,h}|^2+\sum_{i=1}^{m}|g_i^{h,h}|^2\Big]\varphi_R(x)\psi_R(y)dz+$$

$$+\int_{Q_\tau}\left[\sum_{i,j=1}^{k}\left|\frac{(\varphi_R(x))_{x_ix_j}}{(\varphi_R(x))^{1/2+1/q}}\right|^{\frac{2q}{q-2}}\psi_R(y)+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left(\left|\frac{(\psi_R(y))_{y_i}}{(\psi_R(y))^{1/q+1/p'}}\right|^{\frac{pq}{q-p}}+\right.$$

$$\left.+\left|\frac{(\psi_R(y))_{y_i}}{(\psi_R(y))^{1/2+1/q}}\right|^{\frac{2q}{q-2}}\right)\varphi_R(x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\left(\left|\frac{(\varphi_R(x))_{x_i}}{(\varphi_R(x))^{1/2+1/p}}\right|^{\frac{2p}{p-2}}+\left|\frac{(\varphi_R(x))_{x_i}}{(\varphi_R(x))^{1/2+1/q}}\right|^{\frac{2q}{q-2}}+\right.$$

$$\left.\left.+\left|\frac{(\varphi_R(x))_{x_i}}{(\varphi_R(x))^{1/q+1/p'}}\right|^{\frac{pq}{q-p}}\right)\psi_R(y)\right]e^{-\mu t}dzdt.$$

З вибору φ, ψ і умов теореми випливає, що права частина останньої нерівності обмежена. Отже,

$$||u^h||_{V_0^{2,1}(Q_T^{R_0})}\le M_1,\ ||u_t^h||_{L^q(Q_T^{R_0})\cap V_0^{1,p}(Q_T^{R_0})}\le M_1, \tag{15}$$

де M_1 – деяка додатна константа, яка залежить від коефіцієнтів рівняння і початкових умов.

На підставі (15), з послідовності $\{u^h\}$ можна вибрати таку підпослідовність $\{u^{h_k}\}$, що

$$u^{h_k}\to u \tag{16}$$

*-слабко в $L^\infty((0,T);V_0^{2,1}(\Omega^{R_0}))$,

$$u_t^{h_k}\to u_t$$

слабко в $L^q((0,T);L^q(\Omega^{R_0}))\cap L^p((0,T);V_0^{1,p}(\Omega^{R_0}))$ при $h_k\to\infty$.

З рівняння (2) випливає, що $u_{tt}^h\in L^{q'}((0,T);W^{-2,p'}(\Omega^{R_0}))$, з (16) маємо, що $u_t^h\in V_0^{1,p}(Q_T^{R_0})$, але $V_0^{1,p}(\Omega^{R_0})\subset L^q(\Omega^{R_0})\subset W^{-2,p'}(\Omega^{R_0})$ при $2<q<\frac{np}{n-p}$, причому $V_0^{1,p}(\Omega^{R_0})\subset L^q(\Omega^{R_0})$ компактно, тому з послідовності $\{u^h\}$ можна вибрати таку підпослідовність $\{u^{h_k}\}$, що $u_t^{h_k}\to u_t$ сильно в $L^q(Q_T^{R_0})$.

Нехай u^α, u^β – розв'язки задачі (2)-(4) при $R<\alpha+1$ і $R<\beta+1$ відповідно. Підставимо u^α, u^β в рівність (11), отримані рівності віднімемо і приймемо $v=\big(u_t^\alpha-u_t^\beta\big)\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}=u_t^{\alpha\beta}\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}$. Одержимо

$$\int_{Q_\tau}\Big[u_t^{\alpha\beta}u_{tt}^{\alpha\beta}\varphi_R(x)\psi_R(y)+$$

$$+\sum_{i,j,s,l=1}^{k}a_{ij}^{sl}(z,t)u_{x_ix_j}^{\alpha\beta}\Big(u_{tx_sx_l}^{\alpha\beta}\varphi_R(x)\psi_R(y)+$$

$$+u_{tx_s}^{\alpha\beta}(\varphi_R(x))_{x_l}\psi_R(y)+u_{tx_l}^{\alpha\beta}(\varphi_R(x))_{x_s}\psi_R(y)+$$

$$+u_t^{\alpha\beta}(\varphi_R(x))_{x_sx_l}\psi_R(y)\Big)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}(z,t)u_{x_i}^{\alpha\beta}\Big(u_{tx_i}^{\alpha\beta}\varphi_R(x)\psi_R(y)+$$

$$+u_t^{\alpha\beta}(\varphi_R(x))_{x_j}\psi_R(y)\Big)+a_0(z,t)u^{\alpha\beta}u_t^{\alpha\beta}\varphi_R(x)\psi_R(y)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}b_i(z,t)\big(|u_{tz_i}^\alpha|^{p-2}u_{tz_i}^\alpha-|u_{tz_i}^\beta|^{p-2}u_{tz_i}^\beta\big)u_{tz_i}^{\alpha\beta}\times$$

$$\times\varphi_R(x)\psi_R(y)+\sum_{i=1}^{k}b_i(z,t)\big(|u_{tx_i}^\alpha|^{p-2}u_{tx_i}^\alpha-$$

$$-|u_{tx_i}^\beta|^{p-2}u_{tx_i}^\beta\big)u_t^{\alpha\beta}(\varphi_R(x))_{x_i}\psi_R(y)+$$

$$+\sum_{i=k+1}^{n}b_i(z,t)\big(|u_{ty_i}^\alpha|^{p-2}u_{ty_i}^\alpha-|u_{ty_i}^\beta|^{p-2}u_{ty_i}^\beta\big)u_t^{\alpha\beta}\times$$

$$\times\varphi_R(x)(\psi_R(y))_{y_i}+\sum_{i,j=1}^{m}c_{ij}(z,t)u_{y_i}^{\alpha\beta}\Big(u_{ty_j}^{\alpha\beta}\varphi_R(x)\psi_R(y)+$$

$$+u_t^{\alpha\beta}\varphi_R(x)(\psi_R(y))_{y_j}\Big)+b(z,t)\big(|u_t^\alpha|^{q-2}u_t^\alpha- \tag{17}$$

$$-|u_t^\beta|^{q-2}u_t^\beta\big)u_t^{\alpha\beta}\varphi_R(x)\psi_R(y)\Big]e^{-\mu t}dzdt=$$

$$=\int_{Q_\tau^R}\Big[\sum_{i,j=1}^{k}f_{ij}^{\alpha\beta}u_{tx_ix_j}^{\alpha\beta}+\sum_{i=1}^{k}f_i^{\alpha\beta}u_{tx_i}^{\alpha\beta}+$$

$$+f_0^{\alpha\beta}u_t^{\alpha\beta}+\sum_{i=1}^{m}g_i^{\alpha\beta}u_{ty_i}^{\alpha\beta}\Big]\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt,$$

де $\tau\in(0,T]$, $F^{\alpha,\beta}=F^{\alpha,\alpha}-F^{\beta,\beta}$.

Оцінимо доданки останньої рівності

$$J_{23}=\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}b_i(z,t)\big(|u_{tz_i}^\alpha|^{p-2}u_{tz_i}^\alpha-|u_{tz_i}^\beta|^{p-2}u_{tz_i}^\beta\big)\times$$

$$\times u_{tz_i}^{\alpha\beta}\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\ge$$

$$\ge B_0 2^{2-p}\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u_{tz_i}^{\alpha\beta}|^p\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt;$$

$$J_{24}=\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{k}b_i(z,t)\big(|u_{tx_i}^\alpha|^{p-2}u_{tx_i}^\alpha-|u_{tx_i}^\beta|^{p-2}u_{tx_i}^\beta\big)\times$$

$$\times u_t^{\alpha\beta}(\varphi_R(x))_{x_i}\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\ge$$

$$\geq -B_0\Big(\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{k}\big(|u^\alpha_{tx_i}|^{p-2}u^\alpha_{tx_i}-|u^\beta_{tx_i}|^{p-2}u^\beta_{tx_i}\big)^{p'}\times$$

$$\times\left|\frac{(\varphi_R(x))_{x_i}}{(\varphi_R(x))^{1/p}}\right|^{p'}\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\Big)^{1/p'}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{Q_\tau}|u^{\alpha\beta}_t|^p\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\Big)^{1/p};$$

$$J_{25}=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=k+1}^{n}b_i(z,t)\big(|u^\alpha_{ty_i}|^{p-2}u^\alpha_{ty_i}-|u^\beta_{ty_i}|^{p-2}u^\beta_{ty_i}\big)\times$$

$$\times u^{\alpha\beta}_t\varphi_R(x)(\psi_R(y))_{y_i}e^{-\mu t}dzdt\geq$$

$$\geq -B_0\Big(\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=k+1}^{n}\big(|u^\alpha_{ty_i}|^{p-2}u^\alpha_{ty_i}-|u^\beta_{ty_i}|^{p-2}u^\beta_{ty_i}\big)^{p'}\times$$

$$\times\left|\frac{(\psi_R(y))_{y_i}}{(\psi_R(y))^{1/p}}\right|^{p'}\varphi_R(x)e^{-\mu t}dzdt\Big)^{1/p'}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{Q_\tau}|u^{\alpha\beta}_t|^p\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\Big)^{1/p};$$

$$J_{26}=\int\limits_{Q_\tau}b(x,t)\big(|u^\alpha_t|^{q-2}u^\alpha_t-|u^\beta_t|^{q-2}u^\beta_t\big)\times$$

$$\times u^{\alpha\beta}_t\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\geq$$

$$\geq\beta_0 2^{2-q}\int\limits_{Q_\tau}|u^{\alpha\beta}_t|^q\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt.$$

Використаємо отримані оцінки інтегралів J_1-J_{26}, з (17) маємо

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u^{\alpha\beta}_t|^2+\sum_{i,j=1}^{k}|u^{\alpha\beta}_{x_ix_j}|^2+\sum_{i=1}^{m}|u^{\alpha\beta}_{y_i}|^2+\sum_{i=1}^{k}|u^{\alpha\beta}_{x_i}|^2\Big]\times$$

$$\times\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dz+\int\limits_{Q_\tau}\Big[|u^{\alpha\beta}_t|^2+\sum_{i,j=1}^{k}|u^{\alpha\beta}_{x_ix_j}|^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}|u^{\alpha\beta}_{y_i}|^2+\sum_{i=1}^{n}|u^{\alpha\beta}_{tz_i}|^p+|u^{\alpha\beta}_t|^q+\sum_{i=1}^{k}|u^{\alpha\beta}_{x_i}|^2\Big]\times$$

$$\times\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\leq$$

$$\leq M_2\int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{i,j=1}^{k}\left|\frac{(\varphi_R(x))_{x_ix_j}}{(\varphi_R(x))^{1/2+1/p}}\right|^{\frac{2p}{p-2}}\psi_R(y)C_1(\delta,p)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{(\psi_R(y))_{y_i}}{(\psi_R(y))^{1/2+1/q}}\right|^{\frac{2q}{q-2}}\varphi_R(x)C_2(\delta,q)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\left(\left|\frac{(\varphi_R(x))_{x_i}}{(\varphi_R(x))^{1/2+1/p}}\right|^{\frac{2p}{p-2}}C_1(\delta,p)+\right.$$

$$\left.+\left|\frac{(\varphi_R(x))_{x_i}}{(\varphi_R(x))^{1/2+1/q}}\right|^{\frac{2q}{q-2}}\right)\psi_R(y)C_2(\delta,q)\Big]\times$$

$$\times e^{-\mu t}dzdt+M_2\Big(\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{k}\big(|u^\alpha_{tx_i}|^{p-2}u^\alpha_{tx_i}-$$

$$-|u^\beta_{tx_i}|^{p-2}u^\beta_{tx_i}\big)^{p'}\left|\frac{(\varphi_R(x))_{x_i}}{(\varphi_R(x))^{1/p}}\right|^{p'}\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\Big)^{1/p'}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{Q_\tau}|u^{\alpha\beta}_t|^p\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\Big)^{1/p}+$$

$$+M_2\Big(\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=k+1}^{n}\big(|u^\alpha_{ty_i}|^{p-2}u^\alpha_{ty_i}-|u^\beta_{ty_i}|^{p-2}u^\beta_{ty_i}\big)^{p'}\times$$

$$\times\left|\frac{(\psi_R(y))_{y_i}}{(\psi_R(y))^{1/p}}\right|^{p'}\varphi_R(x)e^{-\mu t}dzdt\Big)^{1/p'}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{Q_\tau}|u^{\alpha\beta}_t|^p\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\Big)^{1/p}+$$

$$+M_2\int\limits_{\Omega_0}\left(\sum_{i,j=1}^{k}|f^{\alpha\beta}_{ij}|^2+\sum_{i=1}^{m}|g^{\alpha\beta}_i|^2\right)\varphi_R(x)\psi_R(y)dz+$$

$$+M_2\int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{i=1}^{m}\big(|g^{\alpha\beta}_i|^2+|g^{\alpha\beta}_{it}|^2\big)+|f^{\alpha\beta}_0|^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\big(|f^{\alpha\beta}_i|^2+|f^{\alpha\beta}_i|^{p'}\big)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{k}\big(|f^{\alpha\beta}_{ij}|^2+|f^{\alpha\beta}_{ijt}|^2\big)\Big]\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt+$$

$$+M_2\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[\sum_{i,j=1}^{k}|f^{\alpha\beta}_{ij}|^2+\sum_{i=1}^{m}|g^{\alpha\beta}_i|^2\Big]\varphi_R(x)\psi_R(y)dz,$$

де M_2 – додатна константа, яка залежить від коефіцієнтів рівняння.

Оскільки існує таке $R_1>0$, що для довільного $R_0<R_1,\ R_0>0$, виконуються такі оцінки:

$$(R_1-R_0)^\gamma\leq\varphi_R(x)\leq(2R_1)^\gamma,$$

$$(R_1-R_0)^\gamma\leq\psi_R(y)\leq(2R_1)^\gamma,$$

$$\left|\frac{(\varphi_R(x))_{x_i}}{(\varphi_R(x))^{1/2+1/p}}\right|^{\frac{2p}{p-2}}\leq(2R_1)^{\gamma-\frac{2p}{p-2}},$$

$$\left|\frac{(\varphi_R(x))_{x_i}}{(\varphi_R(x))^{1/2+1/q}}\right|^{\frac{2q}{q-2}}\leq(2R_1)^{\gamma-\frac{2q}{q-2}},$$

$$\left|\frac{(\psi_R(y))_{y_i}}{(\psi_R(y))^{1/2+1/q}}\right|^{\frac{2q}{q-2}}\leq(2R_1)^{\gamma-\frac{2q}{q-2}},$$

$$\left|\frac{(\varphi_R(x))_{x_ix_j}}{(\varphi_R(x))^{1/2+1/p}}\right|^{\frac{2p}{p-2}}\leq(2R_1)^{\gamma-\frac{4p}{p-2}},\qquad(18)$$

то останню нерівність можна записати у такому вигляді:

$$\int\limits_{\Omega^{R_0}_\tau}\Big[|u^{\alpha\beta}_t|^2+\sum_{i,j=1}^{k}|u^{\alpha\beta}_{x_ix_j}|^2+\sum_{i=1}^{m}|u^{\alpha\beta}_{y_i}|^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}|u_{x_i}^{\alpha\beta}|^2\Big]dz+\int\limits_{Q_\tau^{R_0}}\Big[|u_t^{\alpha\beta}|^2+\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^{\alpha\beta}|^2+\sum_{i=1}^{m}|u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}|u_{tz_i}^{\alpha\beta}|^p+|u_t^{\alpha\beta}|^q+\sum_{i=1}^{k}|u_{x_i}^{\alpha\beta}|^2\Big]dzdt\le$$

$$\le\frac{M_2R_1^n}{(R_1-R_0)^{2\gamma}}\left(R_1^{2\gamma-\frac{2p}{p-2}}+R_1^{2\gamma-\frac{2q}{q-2}}+R_1^{2\gamma-\frac{4p}{p-2}}\right)+$$

$$+\frac{M_2}{(R_1-R_0)^{2\gamma}}\Big(\int\limits_{Q_\tau^{R_1}}\sum_{i=1}^{k}\left(|u_{tx_i}^{\alpha}|^{p-2}u_{tx_i}^{\alpha}-|u_{tx_i}^{\beta}|^{p-2}u_{tx_i}^{\beta}\right)^{p'}\times$$

$$\times\left|\frac{(\varphi_R(x))_{x_i}}{(\varphi_R(x))^{1/p}}\right|^{p'}\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\Big)^{1/p'}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{Q_\tau^{R_1}}|u_t^{\alpha\beta}|^p\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\Big)^{1/p}+$$

$$+\frac{M_2}{(R_1-R_0)^{2\gamma}}\Big(\int\limits_{Q_\tau^{R_1}}\sum_{i=k+1}^{n}\left(|u_{ty_i}^{\alpha}|^{p-2}u_{ty_i}^{\alpha}-\right.$$

$$\left.-|u_{ty_i}^{\beta}|^{p-2}u_{ty_i}^{\beta}\right)^{p'}\left|\frac{(\psi_R(y))_{y_i}}{(\psi_R(y))^{1/p}}\right|^{p'}\varphi_R(x)e^{-\mu t}dzdt\Big)^{1/p'}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{Q_\tau^{R_1}}|u_t^{\alpha\beta}|^p\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\Big)^{1/p}+$$

$$+\frac{M_2}{(R_1-R_0)^{2\gamma}}\int\limits_{Q_\tau^{R_1}}\Big[\sum_{i=1}^{m}\left(|g_i^{\alpha\beta}|^2+|g_{it}^{\alpha\beta}|^2\right)+$$

$$+|f_0^{\alpha\beta}|^2+\sum_{i=1}^{k}\left(|f_i^{\alpha\beta}|^2+|f_i^{\alpha\beta}|^{p'}\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{k}\left(|f_{ij}^{\alpha\beta}|^2+|f_{ijt}^{\alpha\beta}|^2\right)\Big]\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt+$$

$$+\frac{M_2}{(R_1-R_0)^{2\gamma}}\int\limits_{\Omega_\tau^{R_1}}\Big[\sum_{i,j=1}^{k}|f_{ij}^{\alpha\beta}|^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}|g_i^{\alpha\beta}|^2\Big]\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu\tau}dz. \qquad (19)$$

Оцінимо доданки правої частини останньої нерівності

$$J_{27}=I_1I_2=\Big(\int\limits_{Q_\tau^{R_1}}\sum_{i=1}^{k}\left(|u_{tx_i}^{\alpha}|^{p-2}u_{tx_i}^{\alpha}-|u_{tx_i}^{\beta}|^{p-2}u_{tx_i}^{\beta}\right)^{p'}\times$$

$$\times\left|\frac{(\varphi_R(x))_{x_i}}{(\varphi_R(x))^{1/p}}\right|^{p'}\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\Big)^{1/p'}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{Q_\tau^{R_1}}|u_t^{\alpha\beta}|^p\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\Big)^{1/p},$$

де I_1 – обмежена при фіксованому R_1, $I_2\to 0$, бо $u_t^h\to u_t$ сильно в $L^p(Q_T)$, тому $J_{27}\to 0$.

Аналогічно показуємо, що

$$J_{28}=\Big(\int\limits_{Q_\tau^{R_1}}\sum_{i=k+1}^{n}\left(|u_{ty_i}^{\alpha}|^{p-2}u_{ty_i}^{\alpha}-|u_{ty_i}^{\beta}|^{p-2}u_{ty_i}^{\beta}\right)^{p'}\times$$

$$\times\left|\frac{(\psi_R(y))_{y_i}}{(\psi_R(y))^{1/p}}\right|^{p'}\varphi_R(x)e^{-\mu t}dzdt\Big)^{1/p'}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{Q_\tau^{R_1}}|u_t^{\alpha\beta}|^p\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}dzdt\Big)^{1/p}\to 0.$$

З (13) випливає, що для довільного $\varepsilon>0$ існує таке натуральне h, що для всіх $\alpha>h,\ \beta>h$ виконуються такі оцінки:

$$||g_i^{\alpha\beta}||_{L^2(Q_T^{R_1})}<\varepsilon,\ i\in\{1,...,m\},$$

$$||g_{it}^{\alpha\beta}||_{L^2(Q_T^{R_1})}<\varepsilon,\ i\in\{1,...,m\},\ ||f_0^{\alpha\beta}||_{L^2(Q_T^{R_1})}<\varepsilon,$$

$$||f_i^{\alpha\beta}||_{L^2(Q_T^{R_1})}<\varepsilon,\ ||f_i^{\alpha\beta}||_{L^{p'}(Q_T^{R_1})}<\varepsilon,\ ||f_{ij}^{\alpha\beta}||_{L^2(Q_T^{R_1})}<\varepsilon,$$

$$||f_{ijt}^{\alpha\beta}||_{L^2(Q_T^{R_1})}<\varepsilon,\ i,j\in\{1,...,k\}.$$

Отже, з нерівності (19) одержимо

$$\int\limits_{\Omega_\tau^{R_0}}\Big[|u_t^{\alpha\beta}|^2+\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^{\alpha\beta}|^2+\sum_{i=1}^{m}|u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2+\sum_{i=1}^{k}|u_{x_i}^{\alpha\beta}|^2\Big]dz+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^{R_0}}\Big[|u_t^{\alpha\beta}|^2+\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^{\alpha\beta}|^2+\sum_{i=1}^{m}|u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}|u_{tz_i}^{\alpha\beta}|^p+|u_t^{\alpha\beta}|^q+\sum_{i=1}^{k}|u_{x_i}^{\alpha\beta}|^2\Big]dzdt\le$$

$$\le\frac{M_3R_1^{2\gamma}}{(R_1-R_0)^{2\gamma}}(R_1)^{n-\frac{2q}{q-2}}, \qquad (20)$$

де M_3 – деяка додатна константа, яка залежить від коефіцієнтів рівняння.

При $R_1\to\infty$, $n<\frac{2q}{q-2}$ права частина останньої нерівності прямує до нуля. Тоді послідовність $\{u^h\}$ фундаментальна в просторі $L^2((0,T);V_{0,loc}^{2,1}(\overline{\Omega}))$ і $\{u_t^h\}$ фундаментальна в просторі $L^2((0,T);V_{0,loc}^{1,p}(\overline{\Omega}))\cap L^q((0,T);L_{loc}^q(\overline{\Omega}))$. Отже, ці послідовності сильно збіжні у відповідних просторах.

Єдиність розв'язку будемо доводити методом від супротивного. Припустимо, що u^1, u^2 – два різні розв'язки задачі (2)-(5). Підставимо їх в (6), отримані рівності віднімемо і приймемо $v=(u_t^1-u_t^2)\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}=u_t^{1,2}\varphi_R(x)\psi_R(y)e^{-\mu t}$. Одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[u_t^{1,2}u_{tt}^{1,2}\varphi_R(x)\psi_R(y)+$$

$$+\sum_{i,j,s,l=1}^{k}a_{ij}^{sl}(z,t)u_{x_ix_j}^{1,2}\left(u_{tx_sx_l}^{1,2}\varphi_R(x)\psi_R(y)+\right.$$

$$+u_{tx_s}^{1,2}(\varphi_R(x))_{x_l}\psi_R(y)+u_{tx_l}^{1,2}(\varphi_R(x))_{x_s}\psi_R(y)+$$
$$+u_t^{1,2}(\varphi_R(x))_{x_s x_l}\psi_R(y)\Big)+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}(z,t)u_{x_i}^{1,2}\Big(u_{tx_i}^{1,2}\varphi_R(x)\psi_R(y)+$$
$$+u_t^{1,2}(\varphi_R(x))_{x_j}\psi_R(y)\Big)+a_0(z,t)u^{1,2}u_t^{1,2}\varphi_R(x)\psi_R(y)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}b_i(z,t)\big(|u_{tz_i}^1|^{p-2}u_{tz_i}^1-|u_{tz_i}^2|^{p-2}u_{tz_i}^2\big)u_{tz_i}^{1,2}\times$$
$$\times\varphi_R(x)\psi_R(y)+\sum_{i=1}^{k}b_i(z,t)\big(|u_{tx_i}^1|^{p-2}u_{tx_i}^1-$$
$$-|u_{tx_i}^2|^{p-2}u_{tx_i}^2\big)u_t^{1,2}(\varphi_R(x))_{x_i}\psi_R(y)+$$
$$+\sum_{i=k+1}^{n}b_i(z,t)\big(|u_{ty_i}^1|^{p-2}u_{ty_i}^1-|u_{ty_i}^2|^{p-2}u_{ty_i}^2\big)u_t^{1,2}\times$$
$$\times\varphi_R(x)(\psi_R(y))_{y_i}+\sum_{i,j=1}^{m}c_{ij}(z,t)u_{y_i}^{1,2}\Big(u_{ty_j}^{1,2}\varphi_R(x)\psi_R(y)+$$
$$+u_t^{1,2}\varphi_R(x)(\psi_R(y))_{y_j}\Big)+b(z,t)\big(|u_t^1|^{q-2}u_t^1-$$
$$-|u_t^2|^{q-2}u_t^2\big)u_t^{1,2}\varphi_R(x)\psi_R(y)\Big]e^{-\mu t}dzdt=0,$$

де $\tau\in(0,T]$.

Використовуючи оцінки інтегралів $J_1 - J_{26}$, з останньої рівності будемо мати

$$\int\limits_{\Omega_\tau^{R_0}}\Big[|u_t^{1,2}|^2+\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^{1,2}|^2+\sum_{i=1}^{m}|u_{y_i}^{1,2}|^2+\sum_{i=1}^{k}|u_{x_i}^{1,2}|^2\Big]dz+$$
$$+\int\limits_{Q_\tau^{R_0}}\Big[|u_t^{1,2}|^2+\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^{1,2}|^2+\sum_{i=1}^{m}|u_{y_i}^{1,2}|^2+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}|u_{tz_i}^{1,2}|^p+|u_t^{1,2}|^q+\sum_{i=1}^{k}|u_{x_i}^{1,2}|^2\Big]dzdt\to 0$$

при $R_1\to\infty,\ n<\frac{2q}{q-2},\ R_0<R_1$.

Отож,
$$u^1=u^2$$
майже всюди в Q_T.

Отже, теорему доведено. ■

Висновки

Отже, у праці одержано достатні умови існування та єдиності розв'язку мішаної задачі для рівняння типу Ейдельмана в необмеженій за просторовими змінними області, які не залежать від поведінки початкових даних і правої частини на нескінченності. Це рівняння ми трактуємо як вироджене параболічне рівняння з другою похідною за часовою змінною, тобто рівняння, в якому відсутні похідні четвертого порядку за частиною просторових змінних.

Література

[1] *G. Andrews, J.M. Ball,* Asymptotic behavior and changes of phase in one-dimensional nonlinear viscoelasticity, J.Differential Equations, 44, (1982), 316–341.

[2] *M. Slemrod,* Admissibility criteria for propagating phase boundaries in a one der Waals fluid, Arch. Rational Mech. Analysis, 81, (1983), 301-315

[3] *L.Truskinovsky,* Equilibrium phase boundaries, Docl. Akad. Nauk SSSR, 275, (1982), 306–310.

[4] *R. Abeyaratne, J.K. Knowles,* Kinetic relations and the propagation of phase boundaries in solids, Arch. Rational Mech. Analysis, 114, (1991), 119–154.

[5] *R. Abeyaratne, J.K. Knowles,* Implications of viscosity and strain gradient effects for the kinetics of propagating phase boundaries in solids, SIAM J. Appl. Math., 51, (1991), 1205–1221.

[6] *W.D. Kallies, P,J. Holmes,* On a dynamical model for phase transformation in nonlinear elasticity, in: J.Chadam, M.Golubitsky, W.Langford, B.Wetton (eds.), Pattern formation: symmetry methods and applications, Fields Institute Communications 5, AMS, Providence, 1996.

[7] *W.D. Kallies,* Regularized models of phase transformation in one-dimensional nonlinear elasticity, Ph.D. Thesis, Cornell University, 1994. 1.

[8] *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.

[9] *Матийчук М.И., Эйдельман С.Д.* О фундаментальных решениях и задаче Коши для параболических систем, коэффициенты которых удовлетворяют условию Дини// Труды семинара по функциональному анализу. – Воронеж, 1967. – Вып. 9. – С. 54-83.

[10] *Івасишен С.Д., Кондур О.С.* Про матрицю Гріна задачі Коші та характеризацію деяких класів розв'язків для $2\vec{b}$-параболічних систем довільного порядку// Мат. студії. – 2000. – Т. 14. – N 1. – С. 73–84.

[11] *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – К.: Ін-тут математики НАН України, 1999. – 176 с.

[12] *Мартыненко М.Д., Бойко Д.Ф.* $2\vec{b}$-параболические граничные задачи // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14. – N 12. – С. 2212–2222.

[13] *Балабушенко Т.М.* Оцінки фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем у необмежених відносно часової змінної областях та їх застосування// Вісник національного ун-ту "Львівська політехніка". – N 411. Прикладна математика. – 2000. – С. 6–11.

[14] *Балабушенко Т.М.* Про оцінки в необмежених відносно часової змінної областях фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем// Мат. студії. – 2002. – Т. 17. – N 2. – С. 163–174.

[15] *Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д.* $2\vec{b}$-параболические системы // Труды семинара по функциональному анализу. – Киев. Ин-т математики АН УССР. – 1968. – Вып. 1. – С. 3–175, 271–273.

[16] *Ивасишен С.Д.* Интегральное представление и начальные значения решений $2\vec{b}$-параболических систем// Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42. – N 4. – С. 500–506.

[17] *Березан Л.П., Івасишен С.Д.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині// Доп. НАН України. – 1998. – N 12. – С. 7–12.

[18] *Березан Л.П., Івасишен С.Д.* Про сильно вироджені на початковій гіперплощині $2\vec{b}$-параболічні системи// Вісник держ. ун-ту "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 1998. – N 337. – С. 73–76.

[19] *Березан Л.П.* Інтегральне зображення розв'язків узагальненої задачі Коші для сильно виродженої на початковій гіперплощині $2\vec{b}$-параболічної системи // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наук. праць. Вип. 46. Математика. – Чернівці, ЧДУ. – 1999. – С. 13–18.

[20] *Березан Л.П.* Деякі властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині// Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наук. праць. Вип. 76. Математика. – Чернівці, Рута. – 2000. – С. 5–10.

[21] *Івасишен С.Д., Пасічник Г.С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $2\vec{b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. – 1999. – N 6. – С. 18–22.

[22] *Пасічник Г.С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $2\vec{b}$-параболічних систем // Вісник Львівського ун-ту. Сер. мех-мат. – 1999. – Вип 54. – С. 140–151.

[23] *Ж.-Л. Лионс* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир.– 1972.

THE INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EVOLUTION EQUATION OF THE FORTH ORDER IN THE UNBOUNDED DOMAIN

H.R. Torhan[a]

[a] *Ivan Franko National University of Lviv*
1 Universytetska Str., 79001, Lviv, Ukraine

The initial boundary value problem for nonlinear parabolic equation in an unbounded domain with respect to space variable is considered. The existence and uniqueness of the generalized solution are obtained without any conditions at infinity.

Keywords: nonlinear parabolic equation, initial boundary value problem

2000 MSC: 60J10

UDK: 517.95