УДК 513.6

Андрійчук В.І.
Львівський національний університет ім. І. Франка

АЛГЕБРАЇЧНІ ГРУПИ НАД КВАЗІСКІНЧЕННИМИ ПОЛЯМИ

Let A be a commutative algebraic group over a pseudofinite field k. It is proved that the Galois cohomology of A vanish. Some properties of isogenies of abelian varieties over quasifinite field are proved. The abelian varieties over algebraic function fields with quasifinite or general local constant fields are also considered.

Нехай A – комутативна алгебраїчна група над псевдоскінченним полем k. Доведено, що когомології Галуа групи A є нульовими. Доведені деякі властивості ізогеній абельових многовидів над квазіскінченними полями. Розглядаються також абельові многовиди над полями алгебраїчних функцій з квазіскінченними або загальними локальними полями констант.

Нехай A – комутативна алгебраїчна група, визначена над полем k. Когомології Галуа групи A описують важливі властивості цієї групи. Особливо багато результатів, пов'язаних з обчисленням когомологій Галуа, одержано у випадках, коли поле k є скінченним, локальним або глобальним полем (див. [1]–[3]). У цій роботі розглядається випадок алгебраїчних груп, визначених над полями одного з таких типів:

1) k – квазіскінченне [2] поле, тобто досконале поле, що має точно одне розширення степеня n для кожного натурального числа n;

2) k – псевдоскінченне [4] поле, тобто поле k квазіскінченне і таке, що кожний непорожній, абсолютно незвідний алгебраїчний многовид, визначений над k, має k – раціональну точку;

3) k – загальне локальне поле, тобто повне дискретно нормоване поле з квазіскінченним полем лишків;

4) k – поле алгебраїчних функцій від n змінних з квазіскінченним або загальним локальним полем констант.

Для алгебраїчної групи A, визначеної над полем k, ми позначаємо через A(k) її групу k – раціональних точок. Якщо k_1/k – розширення Галуа поля k, $G = Gal(k_1/k)$, то $H^i(G, A(k_1))$, $i \in N$, означають когомології Галуа G – модуля $A(k_1)$ (модифіковані Тейтом у твердженні 1 та в наслідку 1). M_n означає ядро гомоморфізму множення на n в абельовій групі M.

Твердження 1. Нехай A комутативна, зв'язна алгебраїчна група, визначена над псевдоскінченним полем k, k_1/k – скінченне розширення Галуа з групою Галуа G. Тоді $H^i(G, A(k_1)) = 0$ для всіх $i \geq 0$.

Доведення. Група G – циклічна, тому досить довести, що

$$H^1(G, A(k_1)) = H^2(G, A(k_1)) = 0.$$

Розглянемо спектральну послідовність Хохшільда – Серра

$$0 \to H^1(G, A(k_1)) \to H^1(k, A) \to H^1(k, A)^G \to H^2(G, A(k_1)) \to H^2(k, A).$$

З псевдоскінченності поля k випливає, що $H^1(k, A) = 0$, а тому і $H^1(G, A(k_1)) = 0$. Крім того, точна послідовність Хохшільда - Серра показує, що ми маємо вкладення

$$0 \to H^2(G, A(k_1)) \to H^2(k, A) \ .$$

З іншого боку, оскільки когомологічна розмірність поля k дорівнює 1, то з точної послідовності Куммера $0 \to A_m \to A \xrightarrow{m} A \to 0$ випливає точна послідовність когомологій $0 \to H^2(k, A) \xrightarrow{m} H^2(k, A) \to 0$, тобто множення на m має нульове ядро для кожного натурального m. Але група $H^2(k, A)$ є групою кручення, тому звідси випливає, що $H^2(k, A) = 0$, а точна послідовність Хохшільда – Серра свідчить, що і $H^2(G, A(k_1)) = 0$.

Наслідок 1. Для кожного елемента $a \in A(k)$ існує елемент $b \in A(k_1)$ такий, що $b + \sigma b + \ldots + \sigma^{n-1} b = a$, де σ - твірна групи G, n = $[k_1 : k]$. Інакше кажучи, кожний елемент групи A(k) є слідом деякого елемента групи $A(k_1)$.

Доведення. $A(k) \big/ (1 + \sigma + \ldots + \sigma^{n-1}) A(k_1) = H^0(G, A(k_1)) = H^2(G, A(k_1)) = 0.$

Розглянемо тепер ізогенії абельових многовидів над квазіскінченним полем. Ізогенія абельових многовидів A і B над полем k – це сюр'єктивний гомоморфізм $\lambda : A(\bar{k}) \to B(\bar{k})$, визначений над k, який має скінченне ядро (тут $A(\bar{k})$ і $B(\bar{k})$ – групи $\bar{k}$ – раціональних точок многовидів A і B, $\bar{k}$ – алгебраїчне замикання поля k).

Твердження 2. *Нехай A і B – абельові многовиди, визначені над квазіскінченним полем k, причому* $H^1(k, A(\bar{k})) = 0$, *і нехай* $\lambda : A(\bar{k}) \to B(\bar{k})$ *ізогенія, визначена над k. Тоді група* $B(k)/\lambda A(k)$ *скінченна і її порядок збігається з порядком групи* $(\mathrm{Ker}\,\lambda) \bigcap A(k)$.

Доведення. З точної послідовності когомологій Галуа, відповідної точній послідовності алгебраїчних груп

$$0 \to \mathrm{Ker}\,\lambda \to A(\bar{k}) \xrightarrow{\lambda} B(\bar{k}) \to 0 \ , \tag{1}$$

випливає, що $B(k)/\lambda A(k) \cong H^1(k, \mathrm{Ker}\,\lambda)$. Оскільки $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ ізоморфна проскінченному поповненню групи цілих чисел, то (див. напр. [5], ст.322)

$$| H^1(k, \mathrm{Ker}\,\lambda) | = | H^0(k, \mathrm{Ker}\,\lambda) | = | (\mathrm{Ker}\,\lambda)^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} | = | (\mathrm{Ker}\,\lambda) \bigcap A(k) | .$$

Наслідок 2 (Ленг [6], Шмідт [7]). Нехай A і B – абельові многовиди, визначені над скінченним полем k. Якщо існує ізогенія $\lambda : A \to B$, то $| A(k) | = | B(k) |$.

***Зауваження*.** Враховуючи цей наслідок, твердження 1 можна вважати узагальненням теорем Шмідта та Ленга про ізогенії алгебраїчних груп над скінченним полем.

Доведення наслідку 2. Скінченне поле є квазіскінченним. Крім того, для абельового многовиду, визначеного над скінченним полем k, маємо $H^1(k, A(\bar{k})) = 0$. Тому з точної послідовності (1) одержуємо точну послідовність

$$0 \to (\mathrm{Ker}\,\lambda) \bigcap A(k) \to A(k) \to \lambda A(k) \to 0 \ ,$$

з якої випливає $| (A(k) | = | \lambda A(k) | \cdot | (\mathrm{Ker}\,\lambda) \bigcap A(k) | = | B(k) |$.

Наслідок 3. Нехай A і B – абельові многовиди, визначені над псевдоскінченним полем k, і $\lambda : A(k) \to B(k)$ – сюр'єктивний гомоморфізм. Тоді гомоморфізм λ ін'єктивний.

Наслідок 4. Нехай A – абельовий многовид, визначений над псевдоскінченним (або над скінченним) полем k і (n, char k) =1. Тоді $| A(k)_n | = | A(k)/nA(k) |$.

Доведення. Застосуємо твердження 2 до ізогенії $\lambda = n \cdot 1_A$.

У наслідку 5 Pic X та NS(X) означають, відповідно, групу Пікара многовиду X та його групу Нерона – Севері, $\overline{X}$ – многовид X, розглянутий над алгебраїчним замиканням $\overline{k}$ поля k.

Наслідок 5. Нехай X – проективний, абсолютно незвідний алгебраїчний многовид, визначений над псевдоскінченним полем k, (n, char k)=1. Тоді

$$NS(X)_n |\ | PicX / n\, PicX | = |(Pic\, X)_n |\ | NS(X) / n\, NS(X) |.$$

Доведення. З точної послідовності когомологій Галуа, що відповідає точній послідовності

$$0 \to Pic^0 \overline{X} \to Pic\overline{X} \to NS(\overline{X}) \to 0,$$

одержуємо, враховуючи, що для псевдоскінченного поля k $H^1(k, Pic^0 \overline{X}) = 0$, точну послідовність

$$0 \to A(k) \to PicX \to NS(X) \to 0$$

де A(k) – група k – раціональних точок многовиду Пікара многовиду X. Для доведення наслідку потрібно застосувати "лему про змію" до комутативної діаграми з точними рядками

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A(k) & \to & PicX & \to & NS(X) & \to & 0 \\ & & \downarrow n & & \downarrow n & & \downarrow n & & \\ 0 & \to & A(k) & \to & PicX & \to & NS(X) & \to & 0 \end{array}$$

і використати наслідок 4.

На завершення відмітимо декілька властивостей скінченності когомологій Галуа абельових многовидів, визначених над полями типу 4), які випливають з простої властивості полів констант цих полів.

Лема. Якщо k – поле одного з типів 1) або 3) і (m, char k) = 1, m взаємно просте з характеристикою поля лишків поля k у випадку поля k типу 3), то група k^*/k^{*m} скінченна.

Доведення. Згідно з теоремою - 90 Гільберта з точної когомологічної послідовності, відповідної точній послідовності множення на m в k_S^* (k_S – сепарабельне замикання поля k), одержуємо ізоморфізм $H^1(k, \mu_m) \cong k^*/k^{*m}$, де μ_m - група коренів m-го степеня з 1 в полі k_S. Тепер $H^1(k, \mu_m)$ – скінченна група згідно з [5, с.322], якщо k – поле типу 1) і згідно з [2, ст.113, вправа 2], якщо k має тип 3).

Ленгом і Тейтом у роботі [8] було введено поняття m-глобального поля. Поле K з деякою фіксованою множиною його нееквівалентних дискретних нормувань називають m - глобальним, якщо кожне скінченне розширення K_1/K має такі дві властивості:

(i) кожний абельовий многовид над K_1 має невироджену редукцію у всіх, крім скінченного числа, нормуваннях поля K_1 ;

(ii) множина нормувань поля K_1, що ділять m, є скінченною, і для будь-якої скінченної множини нормувань S існує лише скінченна кількість абельових розширень показника m поля K_1, нерозгалужених поза множиною S.

Твердження 3. Нехай K – поле типу 4), A – абельовий многовид, визначений над K, (m, char K) = 1, і m взаємно просте з характеристикою поля лишків поля констант, якщо поле констант має тип 3). Тоді

1) Група A(K)/mA(K) скінченна.

2) Групи $H^i(\mathrm{Gal}(K_1/K), A(K_1))$ скінченні для всіх i>0 і всіх скінченних розширень Галуа K_1 поля K.

3) Нехай S – скінченна множина нормувань поля K, що містить всі нормування, в яких A має вироджену редукцію. Підгрупа m – кручення $Ш^1_S(A)_m$ групи $Ш^1_S(A) =$ $= \mathrm{Ker}\,(H^1(K,A) \to \prod_{v \notin S} H^1(K_v, A))$ є скінченною групою.

Доведення. Згідно з лемою та міркуваннями з п.5 у [8], поле K є m – глобальним полем для кожного натурального числа m, взаємно простого з характеристикою поля k. Тому властивості 1), 2), 3) з твердження 3 випливають, відповідно, з теорем 3, 4, 5 роботи [8].

1. Алгебраическая теория чисел / Под ред. Дж. Касселса и А. Фрелиха. М., 1969. 2. Серр Ж. – П. Когомологии Галуа., М., 1968. 3. Milne J. S. Arithmetic Duality Theorems., Academic Press, Inc., 1986. 4. Ax J. The elementary theory of finite fields // Ann.Math., 88, №2, 1968, p.239-272. 5. Платонов В.П., Рапинчук А.С. Алгебраические группы и теория чисел., М., 1991. 6. Lang S. Algebraic groups over finite fields // Amer. J.Math., 78, № 3. 1956. P.553–563. 7. Schmidt F.K. Analytische Zahlentheorie in der Characteristik p., Math.Zeitschit, 33, 1931. P.1–31. 8. Lang S., Tate J. Principal homogeneous spaces over abelian varieties. // Amer. J.Math., 80, № 3. 1958. P.659–684.

УДК 517.956.4

Балабушенко Т.М.
Чернівецький державний університет ім. Ю.Федьковича

ОЦІНКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ МАТРИЦІ РОЗВ’ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ $2\vec{b}$-ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ У НЕОБМЕЖЕНИХ ВІДНОСНО ЧАСОВОЇ ЗМІННОЇ ОБЛАСТЯХ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

It is introduced $\Lambda_l^{m,r}$-conditions which discriminate special classes of $2\vec{b}$– parabolic systems of equations. The fundamental matrixes of solutions of the Cauchy problem for these systems are defined in domains, unbounded with respect to the time variable, and for them estimates are fulfilled with evaluation functions which approach to zero as *t* tend to infinity. The examples and properties of solutions of the systems which obey the introduced conditions are given.