(ii) множина нормувань поля K_1, що ділять m, є скінченною, і для будь-якої скінченної множини нормувань S існує лише скінченна кількість абельових розширень показника m поля K_1, нерозгалужених поза множиною S.

Твердження 3. Нехай K – поле типу 4), A – абельовий многовид, визначений над K, (m, char K) = 1, і m взаємно просте з характеристикою поля лишків поля констант, якщо поле констант має тип 3). Тоді

1) Група A(K)/mA(K) скінченна.

2) Групи $H^i(\mathrm{Gal}(K_1/K), A(K_1))$ скінченні для всіх i>0 і всіх скінченних розширень Галуа K_1 поля K.

3) Нехай S – скінченна множина нормувань поля K, що містить всі нормування, в яких A має вироджену редукцію. Підгрупа m – кручення $Ш^1_S(A)_m$ групи $Ш^1_S(A) = \mathrm{Ker}\,(H^1(K,A) \to \prod_{v\notin S} H^1(K_v, A))$ є скінченною групою.

Доведення. Згідно з лемою та міркуваннями з п.5 у [8], поле K є m – глобальним полем для кожного натурального числа m, взаємно простого з характеристикою поля k. Тому властивості 1), 2), 3) з твердження 3 випливають, відповідно, з теорем 3, 4, 5 роботи [8].

1. Алгебраическая теория чисел / Под ред. Дж. Касселса и А. Фрелиха. М., 1969. 2. Серр Ж. – П. Когомологии Галуа., М., 1968. 3. Milne J. S. Arithmetic Duality Theorems., Academic Press, Inc., 1986. 4. Ax J. The elementary theory of finite fields // Ann.Math., 88, №2, 1968, p.239-272. 5. Платонов В.П., Рапинчук А.С. Алгебраические группы и теория чисел., М., 1991. 6. Lang S. Algebraic groups over finite fields // Amer. J.Math., 78, № 3. 1956. P.553–563. 7. Schmidt F.K. Analytische Zahlentheorie in der Characteristik p., Math.Zeitschit, 33, 1931. P.1–31. 8. Lang S., Tate J. Principal homogeneous spaces over abelian varieties. // Amer. J.Math., 80, № 3. 1958. P.659–684.

УДК 517.956.4

Балабушенко Т.М.
Чернівецький державний університет ім. Ю.Федьковича

ОЦІНКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ МАТРИЦІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ $2\vec{b}$-ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ У НЕОБМЕЖЕНИХ ВІДНОСНО ЧАСОВОЇ ЗМІННОЇ ОБЛАСТЯХ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

It is introduced $\Lambda_l^{m,r}$-conditions which discriminate special classes of $2\vec{b}$– parabolic systems of equations. The fundamental matrixes of solutions of the Cauchy problem for these systems are defined in domains, unbounded with respect to the time variable, and for them estimates are fulfilled with evaluation functions which approach to zero as *t* tend to infinity. The examples and properties of solutions of the systems which obey the introduced conditions are given.

Введені $\Lambda_l^{m,r}$-умови, які виділяють спеціальні класи $\vec{2b}$–параболічних систем рівнянь. Фундаментальні матриці розв'язків задачі Коші для цих систем визначені в необмежених відносно часової змінної t областях і для них справджуються оцінки з оцінними функціями, які прямують до нуля при прямуванні t до нескінченності. Наведені приклади і властивості розв'язків систем, які задовольняють введені умови.

Під час дослідження поведінки розв'язків параболічних за Петровським систем при великих значеннях часової змінної важливе значення мають оцінки фундаментальних матриць розв'язків (ф.м.р.) задачі Коші в необмежених відносно часової змінної областях. С.Д.Ейдельманом [1,с.116–128] виділені класи параболічних за Петровським систем, для ф.м.р. яких справджуються так звані Λ_1– і Λ_2–оцінки. У ці оцінки входять оцінні функції, які прямують до нуля, коли часова змінна прямує до нескінченності. Λ_l–оцінки $(l=1,2)$ застосовані в [1] до доведення теорем типу Ліувілля та теорем про стабілізацію і стійкість розв'язків, а також до встановлення зв'язку між ф.м.р. параболічних і відповідних еліптичних систем.

У цій статті для $\vec{2b}$–параболічних систем, в яких різні просторові змінні мають, узагалі кажучи, різні ваги відносно часової змінної, вводяться умови $\Lambda_l^{m,r}$ $(l,m=1,2; r\ge 0)$, аналогічні Λ_l–умовам С.Д.Ейдельмана. Наводяться приклади та деякі властивості розв'язків систем, які задовольняють уведені умови.

1. Нехай $n, N, b_1,\ldots,b_n$ – задані натуральні числа; $\vec{2b}\equiv(2b_1,\ldots,2b_n)$; s – найменше спільне кратне чисел $b_1,\ldots,b_n$; $m_j\equiv s/b_j$, $q_j\equiv 2b_j/(2b_j-1)$, $j\in\{1,\ldots,n\}$; $\mathbf{Z}_+^n$ – сукупність усіх n–вимірних мультиіндексів, $\mathbf{Z}_+\equiv\mathbf{Z}_+^1$; $\|k\|\equiv\sum_{j=1}^n m_j k_j$, якщо $k\equiv(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbf{Z}_+^n$; $M\equiv\sum_{j=1}^n m_j$; $\Pi_H\equiv\{(t,x)|t\in H, x\in\mathbf{R}^n\}$, якщо $H\subset\mathbf{R}$; $H_1\equiv(0,\infty)$, $H_2\equiv(-\infty,T]$, де T – задане число з $\mathbf{R}$; $\Pi_m\equiv\Pi_{H_m}$, $m\in\{1,2\}$.

Розглянемо $\vec{2b}$–параболічну [2] систему N рівнянь

$$\partial_t u(t,x)=\sum_{\|k\|\le 2s} a_k(t,x)\partial_x^k u(t,x),\quad (t,x)\in\Pi_m, \tag{1}$$

де $m\in\{1,2\}$.

Означення. Твердитимемо, що система (1) задовольняє умову $\Lambda_l^{m,r}, l\in\{1,2\}$, $m\in\{1,2\}$, $r\in\mathbf{Z}_+\cup\{\infty\}$, якщо існує ф.м.р. $Z(t,x;\tau,\xi)$, $\{t,\tau\}\subset H_m$, $\tau<t$, $\{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n$, задачі Коші для системи (1), яка має похідні $\partial_x^k Z, \|k\|\le r$, і для матриці Z та її похідних справджуються оцінки

$$\left|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)\right|\le C_k\prod_{j=1}^n\left(\alpha_j(t,\tau)\right)^{-1-k_j}E_l(t,\tau,x-\xi),\ \{t,\tau\}\subset H_m,\ \tau<t, \{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n, \tag{2}$$

де $k \equiv (k_1,\ldots,k_n) \in \mathbf{Z}_+^n$, $\|k\| \le r$; $C_k > 0$; $E_1(t,\tau,x) \equiv \exp\left\{-c\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha_j(t,\tau)\right)^{-q_j}\left|x_j\right|^{q_j}\right\}$,

$E_2(t,\tau,x) \equiv \exp\left\{-\beta(t,\tau) - c\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha_j(t,\tau)\right)^{-q_j}\left|x_j\right|^{q_j}\right\}$, $c>0$; α_j, $j \in \{1,\ldots,n\}$, β – неперервні невід'ємні функції такі, що $\alpha_j(\tau,\tau)=0$, $\beta(\tau,\tau)=0$, $\alpha_j(t,\tau)\to\infty$ і $\beta(t,\tau)\to\infty$ при $t-\tau\to\infty$.

2. Наведемо приклади класів $\vec{2b}$ –параболічних систем, які задовольняють $\Lambda_l^{m,r}$ –умови. Більшість з цих класів є узагальненням відповідних класів параболічних за Петровським систем, що наведені в [1,с.116–128]. Всюди далі N – кількість рівнянь у відповідній системі, $\sigma \equiv (\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \in \mathbf{R}^n$, i – уявна одиниця, I – одинична матриця порядку N.

Приклад 1. Нехай коефіцієнти системи

$$\partial_t u(t,x) = \sum_{\|k\|\le 2s} a_k(t)\partial_x^k u(t,x), \quad (t,x)\in \Pi_m, \tag{3}$$

є неперервними й обмеженими функціями в H_m та існує стала $\delta>0$ така, що для довільних $t\in H_m$, $\sigma\in\mathbf{R}^n$ і $\eta\in\mathbf{C}^N$ справджується нерівність

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{\|k\|=2s} a_k(t)(i\sigma)^k\eta,\eta\right) \le -\delta\left(\sigma_1^{2b}+\ldots+\sigma_n^{2b}\right)|\eta|^2,$$

де $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток у просторі $\mathbf{C}^N$. Тоді система (3) задовольняє $\Lambda_1^{m,\infty}$ –умову з $\alpha_j(t,\tau)=(t-\tau)^{1/(2b_j)}$, $j\in\{1,\ldots,n\}$.

Приклад 2. Якщо для системи зі сталими коефіцієнтами

$$\partial_t u(t,x) = \sum_{2p\le\|k\|\le 2s} a_k \partial_x^k u(t,x), \quad (t,x)\in\Pi_m, \tag{4}$$

де $1\le p\le s$, виконуються такі припущення: дійсні частини λ –коренів рівняння $\det\left(\sum_{2p\le\|k\|\le 2s} a_k(i\sigma)^k - \lambda I\right)=0$ дорівнюють нулю тільки при $\sigma=0$, а дійсні частини власних чисел матриці $\sum_{\|k\|=2p} a_k(i\sigma)^k$ не дорівнюють нулю при $\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^{2/m_j}=1$, то система (4) задовольняє $\Lambda_1^{m,\infty}$ –умову з $m\in\{1,2\}$ і $\alpha_j(t,\tau)=\begin{cases}(t-\tau)^{1/(2b_j)}, & t-\tau\le 1,\\ (t-\tau)^{m_j/(2r)}, & t-\tau>1,\end{cases}$ $j\in\{1,\ldots,n\}$.

Приклад 3. Нехай коефіцієнти системи

$$\partial_t u(t,x) = \sum_{\|k\|\le 2s} a_k \partial_x^k u(t,x), \quad (t,x)\in\Pi_m, \tag{5}$$

є сталими і дійсні частини λ–коренів рівняння $\det\left(\sum_{\|k\|\le 2s} a_k(i\sigma)^k - \lambda I\right) = 0$ не дорівнюють нулеві ні при яких $\sigma \in \mathbf{R}^n$. Тоді система (5) задовольняє умову $\Lambda_2^{m,\infty}$ з $m \in \{1,2\}$, $\alpha_j(t,\tau) = (t-\tau)^{1/(2b_j)}$, $j \in \{1,\dots,n\}$ і $\beta(t,\tau) = \delta(t-\tau)$, де $\delta > 0$.

Приклад 4. Якщо коефіцієнти системи

$$\partial_t u(t,x) = \sum_{\|k\|\le 2s} a_k(t)\partial_x^k u(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_m, \tag{6}$$

є неперервними й обмеженими функціями в H_m та існує стала $\delta_0 > 0$ така, що для довільних $t \in H_m$, $\sigma \in \mathbf{R}^n$, $\sigma_{n+1} \in \mathbf{R}$ і $\eta \in \mathbf{C}^N$ справджується нерівність

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{\|k\|+k_{n+1}=2s} a_k(t)(i\sigma)^k \sigma_{n+1}^{k_{n+1}}\eta,\eta\right) \le -\delta_0\left(\sigma_1^{2b_1}+\dots+\sigma_n^{2b_n}+\sigma_{n+1}^{2s}\right)|\eta|^2,$$

то ця система задовольняє $\Lambda_2^{m,\infty}$–умову з $\alpha_j(t,\tau) = (t-\tau)^{1/(2b_j)}$, $j \in \{1,\dots,n\}$ і $\beta(t,\tau) = \delta(t-\tau)$, $\delta > 0$.

Приклад 5. Нехай для системи (6) з $m = 1$ виконуються такі умови:

а) коефіцієнти $a_k, \|k\| \le 2s$, є неперервними й обмеженими в H_1;

б) існують числа $\varepsilon > 0, \Delta > 0$ і $R > 0$ такі, що для будь-яких $k \in \mathbf{Z}_+^n$, $\|k\| \le 2s$, $t' \ge R$ і $t'' \ge R$, $|t' - t''| < \Delta$, справджуються нерівності $|a_k(t') - a_k(t'')| < \varepsilon$;

в) λ – корені рівняння $\det\left(\sum_{\|k\|+k_{n+1}=2s} a_k(t)(i\sigma)^k \sigma_{n+1}^{k_{n+1}} - \lambda I\right) = 0$ задовольняють умову $\operatorname{Re}\lambda < -\delta_0$, $\delta_0 > 0$, для довільних $t \in H_1$, $\sigma \in \mathbf{R}^n$ і $\sigma_{n+1} \in \mathbf{R}$ таких, що $\sigma_1^{2b_1}+\dots+\sigma_n^{2b_n}+\sigma_{n+1}^{2s} = 1$.

Тоді система (6) задовольняє $\Lambda_2^{1,\infty}$–умову з $\alpha_j(t,\tau) = (t-\tau)^{1/(2b_j)}$, $j \in \{1,\dots,n\}$ і $\beta(t,\tau) = \delta(t-\tau)$, $\delta > 0$.

Доведення наведених у прикладах 1–5 тверджень аналогічне доведенню відповідних тверджень в [1].

Приклад 6. Розглянемо систему (1) з коефіцієнтами, залежними від усіх змінних. Припускатимемо, що вона є рівномірно $\overrightarrow{2b}$–параболічною в Π_m та її коефіцієнти разом з похідними $\partial_x^m a_k, \|k\| \le 2s, \|m\| \le p$, в Π_m неперервні, обмежені і задовольняють рівномірну умову Гельдера за x. Згідно з результатами з [2], за таких умов існує ф.м.р. $Z_0(t,x;\tau,\xi)$, $\{t,\tau\} \subset H_m$, $\tau < t$, $\{x,\xi\} \subset \mathbf{R}^n$, задачі Коші для системи (1), яка має похідні $\partial_x^k Z_0, \|k\| \le 2s + p$. Для матриці Z_0 та її похідних у [2] одержані оцінки в шарі Π_H, де $H \subset H_m, H$ – будь-який обмежений відрізок. Якщо детально з'ясувати залежність сталих у цих оцінках від довжини відрізка H, то можна встановити для Z_0 такі оцінки:

$$\left|\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi)\right| \le C_k(t-\tau)^{-(M+\|k\|)/(2s)} \exp\left\{d(t-\tau) - c\sum_{j=1}^n (t-\tau)^{1-q_j}\left|x_j - \xi_j\right|^{q_j}\right\},$$

$$\{t,\tau\}\subset H_m,\ \tau<t,\quad \{x,\xi\}\subset \mathbf{R}^n, \tag{7}$$

де $\|k\|\le 2s+p$, $d>0, c>0$.

Зауважимо, що матриця

$$Z_0(t,x;\tau,\xi)\equiv Z_0(t,x;\tau,\xi)\exp\{-\lambda(t-\tau)\},\ \{t,\tau\}\subset H_m,\ \tau<t,\ \{x,\xi\}\subset \mathbf{R}^n,\quad \lambda\in\mathbf{C}, \tag{8}$$

є ф.м.р. задачі Коші для системи

$$\partial_t u(t,x)=\sum_{\|k\|\le 2s} a_k(t,x)\partial_x^k u(t,x)-\lambda u(t,x),\quad (t,x)\in\Pi_m. \tag{9}$$

З (7) і (8) випливає, що система (9) задовольняє $\Lambda_1^{m,2s+p}$– при $\operatorname{Re}\lambda=d$ і $\Lambda_2^{m,2s+p}$–умову при $\operatorname{Re}\lambda>d$ з $\alpha_j(t,\tau)=(t-\tau)^{1/(2b_j)}$, $j\in\{1,\dots,n\}$ і $\beta(t,\tau)=(\operatorname{Re}\lambda-d)(t-\tau)$.

3. Для систем, що задовольняють $\Lambda_l^{m,r}$–умови, можна довести цілу низку теорем про стійкість за Ляпуновим нульового розв'язку задачі Коші, теорем типу Ліувілля для визначених у Π_2 розв'язків, теорем про стабілізацію розв'язків задачі Коші, теорем про зв'язок між ф.м.р. $2\vec{b}$–параболічних і відповідних їм $2\vec{b}$–еліптичних систем. Наведемо тільки деякі з таких теорем.

Розглянемо в Π_1 систему (1) і визначимо для будь-яких $t\ge 0$ і $p\in[1,\infty]$ такі норми:

$$\|u(t,\cdot)\|_{p,\eta}\equiv\left(\int_{\mathbf{R}^n}|u(t,x)|^p\exp\left\{-p\sum_{j=1}^n\eta_j|x_j|\right\}dx\right)^{1/p},\quad 1\le p<\infty,$$

$$\|u(t,\cdot)\|_{\infty,\eta}\equiv\operatorname{ess\,sup}\left(|u(t,x)|\exp\left\{-\sum_{j=1}^n\eta_j|x_j|\right\}\right), \tag{10}$$

де $\eta\equiv(\eta_1,\dots,\eta_n),\eta_j\ge 0, j\in\{1,\dots,n\}$.

Позначимо через E клас розв'язків системи (1) в Π_1, які зображуються інтегралом Пуассона

$$u(t,x)=\int_{\mathbf{R}^n}Z(t,x;0,\xi)u(0,\xi)d\xi,\quad (t,x)\in\Pi_1. \tag{11}$$

Означення. Нульовий розв'язок системи (1) називається $E_{p,\eta}$–стійким, якщо для довільного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta>0$, що для всякого розв'язку $u\in E$ такого, що $\|u(0,\cdot)\|_{p,\eta}<\delta$, для всіх $t\ge 0$ справджується нерівність $\|u(t,\cdot)\|_{p,\eta}<\varepsilon$. Якщо додатково $\|u(t,\cdot)\|_{p,\eta}\to 0$ при $t\to\infty$, то нульовий розв'язок називається асимптотично $E_{p,\eta}$-стійким.

Теорема 1. Нехай система (1) задовольняє $\Lambda_1^{1,0}$–умову, тоді її нульовий розв'язок є $E_{p,0}$–стійким з $p\in[1,\infty]$. Якщо ж задовольняється $\Lambda_2^{1,0}$–умова, то нульовий розв'язок системи (1) є асимптотично $E_{p,\eta}$–стійким з $p\in[1,\infty]$ і $\eta_j, j\in\{1,\dots,n\}$, такими, що $0\le\eta_j<(2b_j)^{1/(2b_j)}(c_0q_j)^{1/q_j}\min\limits_{t>0}\left((\alpha_j(t,0))^{-1}(\beta(t,0))^{1/(2b_j)}\right)$, де $c_0\in(0,c)$, стала c і функції α_j,β з оцінок (2).

Для доведення теореми 1 використовується формула (11), оцінки (2) при $r=0$, означення норм (10) і нерівність Гельдера.

Наведемо ще дві теореми типу Ліувілля.

Теорема 2. Якщо система (1) в Π_2 задовольняє $\Lambda_1^{2,r}$ –умову, то всякий її розв'язок u, який визначений в Π_2 і справджує нерівність $\left|u(t,x)\right| \le C\prod_{j=1}^{n}\left(1+\left|x_j\right|\right)^{\gamma_j}$, $(t,x)\in\Pi_2$, з $\gamma_j < rm_j^{-1}, j\in\{1,\ldots,n\}$, як функція $x_j, j\in\{1,\ldots,n\}$, є многочленом степеня, не вищого за цілу частину числа γ_j.

Щоб сформулювати наступну теорему, розглянемо набір функцій

$$\zeta_j\left(t,d_j\right)\equiv c_0 d_j\left(c_0^{2b_j-1}-td_j^{2b_j-1}\right)^{1-q_j},\quad t\le T,\quad j\in\{1,\ldots,n\},$$

де $c_0\in(0,c), c$ – стала з оцінок (2), $d_j, j\in\{1,\ldots,n\}$, – невід'ємні числа такі, що $T<\min_{1\le j\le n}\left(c_0/d_j\right)^{2b_j-1}$. Як відомо [2], ці функції мають такі властивості:

$$-c_0(t-\tau)^{1-q_j}\left|x_j-\xi_j\right|^{q_j}+\zeta_j\left(\tau,d_j\right)\left|\xi_j\right|^{q_j}\le\zeta_j\left(\tau,d_j\right)\left|x_j\right|^{q_j},$$

$$\zeta_j\left(t-\tau,\zeta_j\left(\tau,d_j\right)\right)=\zeta_j\left(\tau,d_j\right),\ \tau<t\le T,\quad \left\{x_j,\xi_j\right\}\subset\mathbf{R}.$$

Теорема 3. Нехай система (1) в Π_2 задовольняє $\Lambda_2^{2,0}$–умову з функціями $\alpha_j(t,\tau)=(t-\tau)^{1/(2b_j)}$, $j\in\{1,\ldots,n\}$. Тоді розв'язок u цієї системи, для якого справджується нерівність $\left|u(t,x)\right|\le C\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\zeta_j\left(t,d_j\right)\left|x_j\right|^{q_j}\right\}$, $(t,x)\in\Pi_2$, є нульовим.

Доведення теорем 2 і 3 проводиться за допомогою методики, використаної в [1].

1. Эйдельман С.Д. Параболические системы. М., 1964. 2. Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д. $\vec{2b}$ -параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу. 1968. Вып.1. С.3–175, 271–273.

УДК 517.956.35

Бернік В.І., Василишин П.Б.*, Пташник Б.Й.**
Інститут математики НАН Білорусі, Мінськ,
*Прикарпатський університет ім. В.Стефаника, Ів.-Франківськ,
**ІППММ НАН України

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА
ДЛЯ СЛАБКОНЕЛІНІЙНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

We study the problem for weakly nonlinear hyperbolic equations of order *n,n>2,*with constant coefficients in the linear part of the operator with multipoint conditions in time and periodic conditions in space variable. Generally speaking, the investigation of the solvability of this problem requires studying the problem of small denominators, which were estimated from below by using the metric approach. From almost all (with respect to Lebesgue measure) coefficients of the equation we establish conditions for the existence of a unique classical solution of the problem.