Наведемо ще дві теореми типу Ліувілля.

Теорема 2. Якщо система (1) в Π_2 задовольняє $\Lambda_1^{2,r}$–умову, то всякий її розв'язок u, який визначений в Π_2 і справджує нерівність $\left|u(t,x)\right| \le C\prod_{j=1}^{n}\left(1+\left|x_j\right|\right)^{\gamma_j}$, $(t,x)\in\Pi_2$, з $\gamma_j < rm_j^{-1}, j\in\{1,\dots,n\}$, як функція $x_j, j\in\{1,\dots,n\}$, є многочленом степеня, не вищого за цілу частину числа γ_j.

Щоб сформулювати наступну теорему, розглянемо набір функцій

$$\zeta_j\left(t,d_j\right)\equiv c_0 d_j\left(c_0^{2b_j-1}-td_j^{2b_j-1}\right)^{1-q_j},\quad t\le T,\quad j\in\{1,\dots,n\},$$

де $c_0\in(0,c), c$ – стала з оцінок (2), $d_j, j\in\{1,\dots,n\}$, – невід'ємні числа такі, що $T<\min\limits_{1\le j\le n}\left(c_0/d_j\right)^{2b_j-1}$. Як відомо [2], ці функції мають такі властивості:

$$-c_0(t-\tau)^{1-q_j}\left|x_j-\xi_j\right|^{q_j}+\zeta_j\left(\tau,d_j\right)\left|\xi_j\right|^{q_j}\le\zeta_j\left(\tau,d_j\right)\left|x_j\right|^{q_j},$$

$$\zeta_j\left(t-\tau,\zeta_j\left(\tau,d_j\right)\right)=\zeta_j\left(\tau,d_j\right),\ \tau<t\le T,\quad \left\{x_j,\xi_j\right\}\subset\mathbf{R}.$$

Теорема 3. Нехай система (1) в Π_2 задовольняє $\Lambda_2^{2,0}$–умову з функціями $\alpha_j(t,\tau)=(t-\tau)^{1/(2b_j)}$, $j\in\{1,\dots,n\}$. Тоді розв'язок u цієї системи, для якого справджується нерівність $\left|u(t,x)\right|\le C\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\zeta_j\left(t,d_j\right)\left|x_j\right|^{q_j}\right\}$, $(t,x)\in\Pi_2$, є нульовим.

Доведення теорем 2 і 3 проводиться за допомогою методики, використаної в [1].

1. Эйдельман С.Д. Параболические системы. М., 1964. 2. Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д. $2\vec{b}$ -параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу. 1968. Вып.1. С.3–175, 271–273.

УДК 517.956.35

Бернік В.І., Василишин П.Б.*, Пташник Б.Й.**

Інститут математики НАН Білорусі, Мінськ,

*Прикарпатський університет ім. В.Стефаника, Ів.-Франківськ,

**ІППММ НАН України

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СЛАБКОНЕЛІНІЙНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

We study the problem for weakly nonlinear hyperbolic equations of order *n,n>2,*with constant coefficients in the linear part of the operator with multipoint conditions in time and periodic conditions in space variable. Generally speaking, the investigation of the solvability of this problem requires studying the problem of small denominators, which were estimated from below by using the metric approach. From almost all (with respect to Lebesgue measure) coefficients of the equation we establish conditions for the existence of a unique classical solution of the problem.

Досліджена задача з багатоточковими умовами за часовою координатою і умовами періодичності за просторовою змінною для слабконелінійних гіперболічних рівнянь порядку *n, n>2,* зі сталими коефіцієнтами у лінійній частині оператора. Розв'язність задачі взагалі пов'язана з проблемою малих знаменників, для оцінки знизу яких використано метричний підхід. Для майже всіх (стосовно міри Лебега) коефіцієнтів рівняння встановлено умови існування єдиного класичного розв'язку задачі.

1. Ця стаття є розвитком роботи [1] та ідейно близька до роботи [2]. В області $D^1 = [0,T]\times\Omega^1_{2\pi}$, $\Omega^1_{2\pi}$ – одновимірний тор, розглянемо задачу

$$Lu(t,x) \equiv \sum_{j=0}^{n} a_j \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^j \partial x^{n-j}} = \varepsilon f(t,x,u(t,x)), \tag{1}$$

$$u(t_j, x) = 0, \quad t_j = (j-1)t_0, \; j = 1,\dots,n, \; t_0 = T/(n-1), \tag{2}$$

де $\varepsilon, a_j \in \mathbf{R},\ j = 0,1,\dots,n,\ a_n = 1$; L – строго гіперболічний за Петровським оператор; функція $f(t,x,y)$ визначена і неперервна за всіма змінними та достатньо гладка за x, y в області $F = \{(t,x,y) : (t,x) \in D^1, |y| \le r < \infty\}$. Вигляд області D^1 накладає умови 2π-періодичності за змінною x на функції $u(t,x)$ і $f(t,x,u(t,x))$.

Розв’язок задачі шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\ge 0} u_k(t)\exp(ikx). \tag{3}$$

Підставивши ряд (3) у рівняння (1) і умови (2), для визначення коефіцієнтів $u_k(t)$, $k \in \mathbf{Z}$, одержимо таку багатоточкову задачу для нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j (ik)^{n-j} u_k^{(j)}(t) = \varepsilon\, f_k(t, \{u_m(t)\}) \quad k, m \in \mathbf{Z}, \tag{4}$$

$$u_k(t_j) = 0, \quad t_j = (j-1)t_0, \; j = 1,\dots, n, \; k \in \mathbf{Z}, \tag{5}$$

де

$$f_k(t, \{u_m(t)\}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t, x, \sum_{|m|\ge 0} u_m(t)\exp(imx))\exp(-ikx)\,dx. \tag{6}$$

2. Зведемо задачу (1), (2) до еквівалентного їй нелінійного інтегрального рівняння. Для кожного $k \in \mathbf{Z}$ розглянемо задачу з умовами (5) для лінійного рівняння $(\varepsilon = 0)$

$$\sum_{j=0}^{n} a_j (ik)^{n-j} u_k^{(j)}(t) = 0. \tag{4'}$$

Із строгої гіперболічності оператора L випливає, що всі корені λ_j, $j = 1,\dots,n$, рівняння

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j = 0,$$

є дійсними й різними. Тому фундаментальна система розв’язків рівняння ($4'$) має вигляд

$$u_{kj}(t) = \begin{cases} \exp(i\lambda_j kt), & k \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}, \\ t^{j-1}, & k = 0, \end{cases} \qquad j = 1,\dots,n,$$

а характеристичний визначник $\Delta(k)$ задачі ($4'$), (5) зображається формулами

$$\Delta(k)=\begin{cases}\prod\limits_{1\le r<p\le n}(\exp(ik\lambda_p t_0)-\exp(ik\lambda_r t_0)), & k\in \mathbf{Z}\setminus\{0\},\\ 1!2!\ldots(n-1)!t_0^{n(n-1)/2}, & k=0.\end{cases} \tag{7}$$

Із формул (7) випливає, що визначник $\Delta(k)$ відмінний від нуля для всіх $k\in\mathbf{Z}$ тоді і тільки тоді, коли всі числа

$$\beta_{pr}=(\lambda_p-\lambda_r)t_0/(2\pi),\quad p,r=1,\ldots,n,\ \ p\ne r, \tag{8}$$

ірраціональні.

Надалі вважатимемо, що для всіх $k\in\mathbf{Z}$ $\Delta(k)\ne 0$. Тоді незбурена задача (1), (2) (коли $\varepsilon=0$) не може мати двох різних розв'язків і для кожного $k\in\mathbf{Z}$ існує єдина функція Ґріна $G_k(t,\tau)$ задачі ($4'$), (5). У кожній з областей $K_j=\{(t,\tau):0\le t\le T,\, t_j<\tau<t_{j+1}\}$, $j=1,\ldots,n-1$, функції $G_k(t,\tau)$, $k\in\mathbf{Z}$, визначаються формулами

$$G_k(t,\tau)=\frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2(ik)^{n-1}}\sum_{s=1}^{n}\frac{\exp(ik\lambda_s(t-\tau))}{\prod\limits_{\substack{p=1\\p\ne s}}^{n}(\lambda_s-\lambda_p)}+\frac{(-1)^n}{2(ik)^{n-1}}\sum_{s,p=1}^{n}\exp(ik\lambda_p t)\prod_{\substack{m=1\\m\ne s}}^{n}(\lambda_s-\lambda_m)^{-1}\times$$

$$\times\prod_{\substack{r=1\\r\ne p}}^{n}(\exp(ik\lambda_p t_0)-\exp(ik\lambda_r t_0))^{-1}\left(\sum_{q=1}^{j}(-1)^q\exp(ik\lambda_s(t_q-\tau))S_{n-q}^{(p)}-\right.$$

$$\left.-\sum_{q=j+1}^{n}(-1)^q\exp(ik\lambda_s(t_q-\tau))S_{n-q}^{(p)}\right),\qquad k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}, \tag{9}$$

$$G_0(t,\tau)=\frac{1}{2(n-1)!}\left((t-\tau)^{n-1}\operatorname{sgn}(t-\tau)+\sum_{m=1}^{j}\sum_{q=0}^{n-1}\frac{(-1)^{m+q-1}}{t_0^{n-1}(m-1)!(n-m)!}B_{n-q-1}^{m}t^q(t_m-\tau)^{n-1}-\right.$$

$$\left.-\sum_{m=j+1}^{n}\sum_{q=0}^{n-1}\frac{(-1)^{m+q-1}}{t_0^{n-1}(m-1)!(n-m)!}B_{n-q-1}^{m}t^q(t_m-\tau)^{n-1}\right), \tag{10}$$

де $S_{n-q}^{(p)}\left(B_{n-q-1}^{m}\right)$– сума всіх можливих добутків чисел $\exp(ik\lambda_j t_0),\, j=1,\ldots,n,\, j\ne p$, (чисел $t_r, r=1,\ldots,n, r\ne m$), взятих у кількості $n-q$ $(n-q-1)$ в кожному добутку ($S_0^{(p)}\equiv 1$, $B_0^m\equiv 1$).

На прямих $\tau=(j-1)t_0$, $j=1,\ldots,n-1$, доозначимо $G_k(t,\tau)$ за неперервністю справа, а на прямій $\tau=T$ – за неперервністю зліва.

За допомогою системи функцій $\{G_k(t,\tau), k\in\mathbf{Z}\}$ задачу (4), (5) зводимо до еквівалентної їй нескінченної системи нелінійних інтегральних рівнянь

$$u_k(t)=\varepsilon\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau,\{u_m(\tau)\})d\tau,\quad k,m\in\mathbf{Z}. \tag{11}$$

Якщо в області $D^1\times D^1$ ряд

$$(2\pi)^{-1}\sum_{|k|\ge 0}G_k(t,\tau)\exp(ik(x-\xi)) \tag{12}$$

рівномірно збігається і його сума дорівнює $R(t,x,\tau,\xi)$, то із (3), (6) та (11) випливає, що задача (1), (2) еквівалентна нелінійному інтегральному рівнянню

$$u(t,x)=\varepsilon\int_{D^1} R(t,x,\tau,\xi)\, f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\tau d\xi. \tag{13}$$

3. Збіжність ряду (11) пов'язана, взагалі, з проблемою малих знаменників. Зауважимо, що для кожного $k\in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$ справджуються оцінки

$$\left|\exp(ik\lambda_p t_0)-\exp(ik\lambda_r t_0)\right|\ge\left|\sin(|k|(\lambda_p-\lambda_r)t_0/2)\right|=\left|\sin(|k|(\lambda_p-\lambda_r)t_0/2-m_{pr}(k)\pi)\right|>$$
$$>\left||k|\beta_{pr}-m_{pr}(k)\right|,\quad p,r=1,\dots,n,\ p\ne r, \tag{14}$$

де β_{pr} визначені формулами (8), а $m_{pr}(k)\in\mathbf{Z}$ задовольняють нерівності

$$\left||k|\beta_{pr}-m_{pr}(k)\right|<1/2,\quad p,r=1,\dots,n,\ p\ne r\,. \tag{15}$$

На підставі формул (9),(10) та оцінок (14) отримуємо, що в кожному з трикутників $0\le\ \le t<\tau\le T$ і $0\le\tau<t\le T$ справджуються оцінки

$$\left|\frac{\partial^q G_k(t,\tau)}{\partial t^q}\right|\le C_1\sum_{p=1}^{n}|k|^{1-n+q}\prod_{\substack{r=1\\ r\ne p}}^{n}\left||k|\beta_{pr}-m_{pr}(k)\right|^{-1},\quad q=0,1,\dots,n,\quad k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}, \tag{16}$$

$$\left|\frac{\partial^q G_0(t,\tau)}{\partial t^q}\right|\le C_2,\quad q=0,1,\dots,n, \tag{17}$$

де $C_1=C_1(\lambda_1,\dots,\lambda_n,n),\ C_2=C_2(n,T)$ – додатні сталі.

Позначимо $\hat a=(a_0,a_1,\dots,a_{n-1})$ вектор, складений із коефіцієнтів рівняння (1), і розглянемо *n* рядів вигляду

$$M_j\equiv\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\omega}\prod_{\substack{q=1\\ q\ne j}}^{n}|k\beta_{jq}-m_{jq}(k)|^{-1},\quad j=1,\dots,n. \tag{18}$$

Лема. Нехай числа $\beta_{jq},\ j,q=1,\dots,n,\ j\ne q,$ визначені формулами (8), є ірраціональні. При $\omega\le 1$ всі ряди (18) є розбіжні для довільних $\hat a$ і *T*, а при $\omega>1$ вони збігаються для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbf{R}^n$) векторів $\hat a$ та довільного фіксованого *T*.

Доведення. Розбіжність рядів (18) при $\omega\le 1$ випливає з того, що система діофантових нерівностей $|k\alpha_q-p_q|<k^{-1/(n-1)},q=1,\dots,n-1,$ де хоч одне із чисел $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}$ є ірраціональним, справджується для безмежної кількості раціональних $p_q/k\ (k>0)$ [3, с.29].

Доведення збіжності рядів (18) розіб'ємо на два випадки.

1) $\omega>2\ (\omega=2+\delta,\delta>0)$. Позначимо $B_j(k),\ j=1,\dots,n,$ множини тих векторів $\hat\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n),$ які належать деякому *n*-вимірному паралелепіпеду $P_n=[a_r,b_r]\times P_{n-1},$ для яких нерівності

$$\prod_{\substack{q=1\\ q\ne j}}^{n}\left|k\beta_{jq}-m_{jq}(k)\right|<k^{-\gamma},\quad j=1,\dots,n;\ \gamma=1+\varepsilon,\ 0<\varepsilon<\delta, \tag{19}$$

справджуються, відповідно, при фіксованому k та змінних $m_{jq}(k),$ а через $B_j(k,\lambda_r)$ – множини тих векторів $(\lambda_1,\dots,\lambda_{r-1},\lambda_{r+1},\dots,\lambda_n)\in P_{n-1}$, для яких відповідні нерівності (19) виконуються при фіксованих k та $\lambda_r \in [a_r, b_r], 1 \le r \le n.$ На підставі нерівностей (15) і (19) встановлюється, що міра Лебега множини $B_j(k, \lambda_r)$ має оцінку

$$\text{mes } B_j(k, \lambda_j) < C_1 \, k^{-\gamma} \ln^{n-2}(k+1), \quad C_1 > 0. \tag{20}$$

Інтегруючи нерівність (20) за λ_r на $[a_r, b_r],$ отримуємо

$$\text{mes } B_j(k) < C_2 k^{-\gamma} \ln^{n-2}(k+1), \quad C_2 > 0\,. \tag{21}$$

Нехай $A(k) -$ множина векторів $\hat{\lambda} \in P_n,$ для яких при фіксованому k справджується хоча б одна з нерівностей (19). Тоді $A(k) \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_j(k),$ і, на підставі (21), справджується оцінка

$$\text{mes } A(k) < C_3 k^{-\gamma} \ln^{n-2}(k+1), \quad C_3 > 0. \tag{22}$$

Оскільки при $\gamma > 1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\gamma} \ln^{n-2}(k+1)$ збігається, то із леми Бореля-Кантеллі [4] випливає, що будь-яка з нерівностей (19) має безмежну кількість розв'язків у натуральних числах k лише для множини векторів $\hat{\lambda} \in \mathbf{R}^n$ нульової міри Лебега. Враховуючи, що простір $\mathbf{R}^n$ можна покрити зліченною множиною паралелепіпедів P_n, одержуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbf{R}^n$) векторів $\hat{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ нерівності

$$\prod_{\substack{q=1 \\ q \ne j}}^{n} \left| k\beta_{jq} - m_{jq}(k) \right| \ge k^{-\gamma}, \quad j = 1, ..., n; \; \gamma = 1 + \varepsilon, \; 0 < \varepsilon < \delta, \tag{23}$$

справджуються для всіх (крім скінченного числа) $k \in \mathbf{N}$.

На підставі (23) та теореми 5 із [2] отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbf{R}^n$) векторів $\hat{a} = (a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \in \mathrm{R}^n$ справедливі оцінки

$$k^{-\omega} \prod_{\substack{q=1 \\ q \ne j}}^{n} \left| k\beta_{jq} - m_{jq}(k) \right| < k^{-(1+\delta-\varepsilon)}, \quad j = 1, ..., n. \tag{24}$$

Із (24) випливає збіжність усіх рядів (18) при $\omega > 2.$

2) $1 < \omega \le 2.$ Розглянемо ряд $M_j, 1 \le j \le n,$ і позначимо S_K^j частинну суму цього ряду

$$S_K^j = \sum_{k=1}^{K} k^{-\omega} \prod_{\substack{q=1 \\ q \ne j}}^{n} | \, k\beta_{jq} - m_{jq}(k) \, |^{-1}. \tag{25}$$

Застосовуючи до суми (25) перетворення Абеля, одержуємо

$$S_K^j = \sum_{k=1}^{K} K^{-\omega} \prod_{\substack{q=1 \\ q \ne j}}^{n} \left\| k\beta_{jq} \right\|^{-1} + \sum_{k=1}^{K-1} \left(k^{-\omega} - (k+1)^{-\omega} \right) \sum_{l=1}^{k} \prod_{\substack{q=1 \\ q \ne j}}^{n} \left\| l\beta_{jq} \right\|^{-1} \equiv S_K^{j1} + S_K^{j2}, \tag{26}$$

де

$$S_K^{j1} = K^{-\omega} \sum_{k=1}^{K} \prod_{\substack{q=1 \\ q \ne j}}^{n} \left\| k\beta_{jq} \right\|^{-1}, \qquad S_K^{j2} = \sum_{k=1}^{K-1} \left(k^{-\omega} - (k+1)^{-\omega} \right) \sum_{l=1}^{k} \prod_{\substack{q=1 \\ q \ne j}}^{n} \left\| l\beta_{jq} \right\|^{-1},$$

$\| \, a \, \| -$ відстань числа a до найближчого цілого.

На підставі твердження (див. [4], ст. 60), що нерівність

$$\| \alpha_1 q \| \dots \| \alpha_n q \| \geq \frac{1}{q \ln^{n+\varepsilon} q}$$

для майже всіх $(\alpha_1,...,\alpha_n) \in \mathbf{R}^n$ виконується для всіх (крім скінченного числа) цілих $q > 1,$ доводиться, що послідовності S_K^{j1} та S_K^{j2}, а отже і послідовність S_K^{j}, є монотонно зростаючими і обмеженими для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbf{R}^n$) векторів $\beta_j = (\beta_{j1},...,\beta_{jj-1},\beta_{jj+1},...,\beta_{jn}) \in \mathbf{R}^{n-1}.$ Цей факт доводить збіжність ряду M_j для майже всіх векторів $\beta_j \in \mathbf{R}^{n-1}.$ Враховуючи формули (8) для чисел β_{jq} та теорему 5 із [2], отримуємо доведення леми для випадку $1 < \omega \leq 2.$

4. Розглянемо тепер існування розв'язку інтегрального рівняння (13) з простору $C^n(D^1)$. Зауважимо, що згідно з лемою, ряди

$$\sum_{|k|>0} | k |^{-2} \prod_{q=1, q\neq j}^{n} \left| k\beta_{pr} - m_{pr}(k) \right|, \quad p = 1,...,n, \tag{27}$$

є збіжні для майже всіх векторів $\hat{a} = (a_0, a_1,...,a_{n-1}) \in \mathrm{R}^n$ і довільного фіксованого *T*.

Позначимо: $H = \sum_{p=1}^{n} H_p$, де H_p, $p = 1,...,n,-$ сума відповідного ряду (27);

$$\tilde{f} = \max_{0\leq q+s\leq 4} \max_{F} \left| \frac{\partial^{q+s} f(t,x,y)}{\partial x^q \partial y^s} \right|; \ \ \bar{S}(r) = \{u(t,x) \in C^n(D^1) : \|u(t,x)\|_{C^n(D^1)} \leq r < \infty\};$$

$$P_1(r) = C_1(1+r)^3 H + C_2; \quad P_2(r) = C_1(2+r)^3 H + 2C_2;$$

Теорема. Нехай у рівнянні (1) $n \geq 3$, а функція $f(t,x,y)$ неперервна за t і має обмежені похідні за змінними x, y до четвертого порядку включно в області F. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbf{R}^n$) векторів $\hat{a} = (a_0, a_1,...,a_{n-1})$ і довільного фіксованого T існує єдиний розв'язок рівняння (13), який належить замкненій кулі $\bar{S}(r) \subset \subset C^n(D^1)$, для всіх $\varepsilon, |\varepsilon| < \varepsilon_1$, де $\varepsilon_1 = \min\left(r/(\tilde{f}TP_1(r)), 1/(\tilde{f}TP_2(r))\right)$.

Доведення. Скористаємось принципом нерухомої точки Каччіополлі-Банаха [5]. Рівняння (13) запишемо у вигляді $u(t,x) = Au(t,x)$, де $A -$ нелінійний інтегральний оператор

$$Au(t,x) = \varepsilon \int_{D^1} R(t,x,\tau,\xi) f(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) d\tau d\xi, \tag{28}$$

визначений в кулі $\bar{S}(r)$. Покажемо, що оператор A переводить кулю $\bar{S}(r)$ у себе.

Якщо функція $u(t,x)$, яка зображається рядом вигляду (3), належить кулі $\bar{S}(r)$, то на основі формули (6), одержуємо

$$\max_{0\leq t\leq T} | f_k(t,\{u_m(t)\}) | \leq | k |^{-\alpha} \max_{D^1} \left| \frac{\partial^\alpha f(t,x,u(t,x))}{\partial x^\alpha} \right|, \quad \alpha = 0,1,2,3, \tag{29}$$

$$\max_{0\leq t\leq T} | f_0(t,\{u_m(t)\}) | \leq \tilde{f}. \tag{30}$$

За правилом диференціювання складної функції знаходимо, що

$$\max_{D^1}\left|\frac{\partial^\alpha f(t,x,u(t,x))}{\partial x^\alpha}\right| \le (1+\|u(t,x)\|_{C^n(D^1)})^\alpha \tilde{f} \le (1+r)^\alpha \tilde{f}, \quad \alpha=0,1,2,3. \tag{31}$$

На підставі оцінок (16), (17), (29)-(31) та формули (28) отримуємо

$$\|Au(t,x)\|_{C^n(D^1)} \le$$

$$\le |\varepsilon|(2\pi)^{-1}\sum_{|k|\ge 0}\sum_{j+s\le n}\max_{(t,x)\in D^1}\left|\frac{\partial^{j+s}}{\partial t^j \partial x^s}\int_0^T G_k(t,\tau)\int_0^{2\pi} f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\exp(ik(x-\xi))d\tau d\xi\right| \le$$

$$\le |\varepsilon|\sum_{|k|\ge 0}\sum_{j+s\le n}\max_{(t,x)\in D^1}\left|\frac{\partial^{j+s}}{\partial t^j \partial x^s}\left(\int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau,\{u_m(\tau)\})d\tau\exp(ikx)\right)\right| \le$$

$$\le \tilde{f}T|\varepsilon|(C_1(1+r)^3 H + C_2) = \tilde{f}T|\varepsilon|P_1(r) < r.$$

Покажемо тепер, що оператор A є оператором стиску. Нехай $u_1(t,x), u_2(t,x) \in \bar{S}(r)$ і $\Phi(t,x) \equiv f(t,x,u_1(t,x)) - f(t,x,u_2(t,x))$. Із формули (28), враховуючи лему, оцінки (16), (17), (31) та формулу Лагранжа про скінченні прирости, одержуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbf{R}^n$) векторів $\hat{a}$ і довільного фіксованого T справджується оцінка

$$\|Au_1(t,x) - Au_2(t,x)\|_{C^n(D^1)} \le |\varepsilon|(2\pi)^{-1}\left\|\int_{D^1}\sum_{|k|\ge 0} G_k(t,\tau)\Phi(\tau,\xi)\exp(ik(x-\xi))d\tau d\xi\right\|_{C^n(D^1)} \le$$

$$\le |\varepsilon|\tilde{f}T\|u_2(t,x)-u_1(t,x)\|_{C^n(D^1)}(C_1(2+r)^3 H + 2C_2) =$$

$$= |\varepsilon|\tilde{f}TP_2(r)\|u_2(t,x)-u_1(t,x)\|_{C^n(D^1)} < \|u_2(t,x)-u_1(t,x)\|_{C^n(D^1)}.$$

Отже, згідно із принципом стискуючих відображень, інтегральне рівняння (13), а з ним і задача (1), (2) має єдиний розв’язок. Теорему доведено.

1. Пташник Б.Й. Задача типу Валле-Пуссена для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. 1966. №10. С.1254-1257. 2. Бернік В.І., Бересневіч В.В., Василишин П.Б., Пташник Б.Й. Багатоточкова задача з кратними вузлами для лінійних гіперболічних рівнянь // Укр. мат. журн. 1999. ***51****, №10. С.1311-1316. 3. Шмидт В. Диофантовы приближения. М., 1983. 4. Спринджук В. Г. Метрическая теория диофантовых приближений. М.,1977. 5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М., 1977.*