Теорема 2.

Для довільної функції $f(t,x)$ з $L_2(\Omega)$ існує єдиний розв'язок задачі (1)-(3) у вигляді ряду (9).

1. Каленюк П.И., Баранецкий Я.Е., Нитребич З.Н. Обобщенный метод разделения переменных. К., 1993. 2. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. К., 1984. 3. Баранецький Я.О. Нелокальна багатоточкова задача для диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку // Укр. мат. журн. 1990, 44. № 9. С.1174–1181. 4. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., 1965.

УДК 517.95

Баранецький Я.О., Василишин Б.В., Копчук-Кашецький А.В., Сохан П.Л.
НУ "Львівська політехніка", кафедра обчислювальної математики і програмування

СПЕКТРАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ НЕЛОКАЛЬНОЇ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ПАРНОГО ПОРЯДКУ

This paper considers a nonlocal multipoints problem for partial differential equations of the even order. Some properties for the operator of this problem are investigated, the eigen functions system is constructed and its properties are established.

Розглянуто нелокальну багатоточкову задачу для диференціальних рівнянь у частинних похідних парного порядку. Досліджено деякі властивості для оператора цієї задачі, побудовано систему власних функцій і встановлено її властивості.

Нехай $\Omega = \left\{ \left(x_1 x_2\right) = x \in \mathbf{R}^2,\, 0 < x_1 x_2 < 1 \right\}$; $\Gamma = \partial\Omega$ – межа області; ν – зовнішня нормаль до Γ в т. x'; $C_0^\infty(\Omega)$ – множина фінітних нескінченно диференційовних функцій в області $\Omega \in \mathbf{R}^n$; $W_2^{2k}(\Omega) = \left\{ u \in C^{2k-1}(\Omega)\colon D_x^{2k} u \in L_2(\Omega),\, D_y^{2k} u \in L_2(\Omega) \right\}$ – простір Соболєва з нормою

$$\|u\|^2_{W_2^{2k}(\Omega)} = \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\| D_x^{2k} u \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\| D_y^{2k} u \right\|^2_{L_2(\Omega)},$$

де $D_x^{2k} u$, $D_y^{2k} u$ – узагальнені похідні.

Розглянемо крайову задачу

$$Zu \equiv \frac{\partial^{2n} u}{\partial x_1^{2n}} + \frac{\partial^{2n} u}{\partial x_2^{2n}} = f_0(x) \quad (x \in \Omega) \tag{1}$$

$$l_k^0 u \equiv \left.\frac{\partial^{2k} u}{\partial \nu^{2k}(x')}\right|_{\Gamma} = f_{k+1}(x') \quad (x' \in \Gamma), \left(k = \overline{0, n-1}\right) \tag{2}$$

Нехай L^0 – оператор задачі (1), (2), $L^0 : W_2^{2k}(\Omega) \to L_2(\Omega)$. $L^0 u \equiv Zu$, коли $u \in D\left(L^0\right)$, $D\left(L^0\right) = \left\{u \in W_2^{2k}(\Omega) : l_k^0 u = 0,\, k = \overline{0, n-1}\right\}$.

Введемо в розгляд нелокальну задачу

$$Zu \equiv \frac{\partial^{2k} u}{\partial x_1^{2k}} + \frac{\partial^{2k} u}{\partial x_2^{2k}} = f_0(x) \quad (x \in \Omega), \tag{3}$$

$$l_{1,k} u \equiv \frac{\partial^{2k}}{\partial x_1^{2k}} u(0, x_2) + \sum_{j=1}^{m} a_j\left(x_{1,j}, x_2\right) \frac{\partial^{2k}}{\partial x_1^{2k}} u\left(x_{1,j}, x_2\right) = f_{1,k}\left(x_2\right),$$

$$l_{2,k} u \equiv \frac{\partial^{2k}}{\partial x_1^{2k}} u(1, x_2) - \sum_{j=1}^{m} a_j\left(x_{1,j}, x_2\right) \frac{\partial^{2k}}{\partial x_1^{2k}} u\left(x_{1,j}, x_2\right) = f_{2,k}\left(x_2\right),$$

$$l_{3,k} u \equiv \frac{\partial^{2k}}{\partial x_2^{2k}} u(x_1, 0) + \sum_{j=1}^{m} a_j\left(x_1, x_{2,j}\right) \frac{\partial^{2k}}{\partial x_2^{2k}} u\left(x_1, x_{2,j}\right) = f_{3,k}\left(x_1\right), \tag{4}$$

$$l_{4,k} u \equiv \frac{\partial^{2k}}{\partial x_2^{2k}} u(x_1, 1) - \sum_{j=1}^{m} a_j\left(x_1, x_{2,j}\right) \frac{\partial^{2k}}{\partial x_2^{2k}} u\left(x_1, x_{2,j}\right) = f_{4,k}\left(x_1\right),$$

де $0 < x_{1,1} < x_{1,2} < \ldots < x_{1,m} < 1$, $0 < x_{2,1} < x_{2,2} < \ldots < x_{2,m} < 1$, $a_j\left(x_1, x_2\right)$ – задані функції, неперервні в $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \Gamma$, $\quad (k = 1,2,\ldots)$.

Припустимо, що виконуються умови:

$$x_{1,s} = x_{1,m-s+1},\ x_{2,s} = x_{2,m-s+1},\ \left(s = \overline{1,n}\right),\ a_j\left(x_1, 1 - x_2\right) \equiv a_j\left(1 - x_1, x_2\right) \equiv a_j\left(x_1, x_2\right),\ \left(j = \overline{1,m}\right)$$

Нехай $L : W_2^{2k}(\Omega) \to L_2(\Omega)$ – оператор задачі (3), (4)

$$Lu \equiv Zu, \quad u \in D(L);\ D(L) = \left\{\nu \in W_2^{2k}(\Omega),\ l_{s,k}\nu = 0, \quad s = \overline{1,4},\ k = \overline{0, n-1}\right\}.$$

П.1. Властивості оператора L^0 задачі (1), (2).

Методом відокремлення змінних можна показати, що оператор L^0 має такі властивості:

Лема 1. 1) Точковий спектр L^0 складається з чисел вигляду

$$\lambda_{m,k} = \pi^{2n}\left(n^{2n} + k^{2n}\right), \quad (m, k = 1,2)$$

2) система власних функцій оператора L^0

$$V\left(L^0\right) = \nu_{k,m}^0\left(x_1, x_2\right) = \left\{2 \sin \pi k x_1 \sin \pi n m x_2; \quad n, k = 1,2,\ldots\right\}$$

утворює ортонормовану базу в $L_2(\Omega)$.

Нехай

$$J_1 u\left(x_1, x_2\right) \equiv u\left(1 - x_1, x_2\right);\ J_2 u\left(x_1, x_2\right) \equiv u\left(x_1, 1 - x_2\right);$$

$$\pi_i^1 = \frac{1 + (-1)^i J_1}{2};\ \pi_i^2 = \frac{1 + (-1)^i J_2}{2};\ \pi_{i,j} = \pi_i^1 \cdot \pi_i^2. \tag{5}$$

Тоді $\pi_{i,j}$ – ортопроектори в $L_2(\Omega)$ і одиничний оператор $E: L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ можна подати у вигляді суми $E = \pi_{11} + \pi_{21} + \pi_{12} + \pi_{22}$, а простір $L_2(\Omega)$ у вигляді ортогональної суми

$$L_2(\Omega) = \mathrm{H}_{11} \oplus \mathrm{H}_{12} \oplus \mathrm{H}_{21} \oplus \mathrm{H}_{22}, \ \mathrm{H}_{ij} \equiv \pi_{ij} L_2(\Omega).$$

Лема 2. Простори H_{ij} є інваріантними для оператора L^0 $(i, j = 1,2)$, тобто $L^0 : D\left(L^0\right) \cap \mathrm{H}_{ij} \to \mathrm{H}_{ij}$.

При цьому

$$\sigma\left(L^0\right) = \sigma_{11} \cup \sigma_{12} \cup \sigma_{21} \cup \sigma_{22}; \tag{6}$$

$$V\left(L^0\right) = V_{11} \cup V_{12} \cup V_{21} \cup V_{22}, \tag{7}$$

де $\sigma\left(L^0\right)$ – точковий спектр оператора L^0, $V\left(L^0\right)$ – система власних функцій оператора L^0, ν_{ij} – множина власних функцій L^0 з $\mathrm{H}_{ij}(\Omega)$, $(i, j = 1,2)$.

Нехай $W_0(L) \subset W_2^{2k}(\Omega)$ – замикання $D\left(L^0\right)$ за нормою простору $W^{2k}(\Omega)$.

Має місце

Теорема 1: Оператор L^0 є ізоморфізмом $W_0(\Omega) \to L_2(\Omega)$.

П.2. Властивості оператора L задачі (3), (4)

Теорема 2: 1) $\sigma(L) = \sigma\left(L^0\right)$.

2) Власні функції оператора L мають вигляд $\nu_{k,m} = \nu_{k,m}^0 + \Delta\nu_{k,m}$, де $\nu_{k,m}^0$ – система власних функцій L^0 оператора задачі (1),(2), а $\Delta\nu_{k,m}$ – деякі відомі функції.

3) Система $V(L)$ повна і мінімальна в $L_2(\Omega)$.

Функції $\Delta v_{k,m}$ визначають так:

а) $\Delta\nu_{k,m}(x) = 0$, якщо $\lambda_{k,m} \in \sigma_{11}\left(L^0\right)$ $\left(m = 2s; k = 2p; s, p \in \mathbf{N}\right)$;

б) $\Delta\nu_{k,m}(x) = \sum\limits_{q=1}^{\infty} \varphi_q^{k,m}\left(x_1\right)\sqrt{2}\sin 2\pi q x_2$, якщо $\lambda_{k,m} \in \sigma_{21}\left(L^0\right)$ $\left(k = 2p-1; m = 2s; s, p \in \mathbf{N}\right)$, де

$$\varphi_q^{k,m}\left(x_1\right) \text{ є розв'язком рівняння } \left(\frac{d^{2k}}{dx_1^{2k}} + \lambda_{0,q} - \lambda_{k,m}\right)\varphi_q^{k,m}\left(x_1\right) = 0.$$

в) $\Delta\nu_{k,m}(x) = \sum\limits_{r=1}^{\infty} \chi_r^{k,m}\left(x_2\right)\sqrt{2}\sin 2\pi r x_1$, якщо $\lambda_{k,m} \in \sigma_{21}\left(L^0\right)$ $\left(k = 2p; m = 2s-1; s, p \in \mathbf{N}\right)$, де

$$\chi_r^{k,m}\left(x_2\right) \text{ є розв'язком рівняння } \left(\frac{d^{2k}}{dx_2^{2k}} + \lambda_{r,0} - \lambda_{k,m}\right)\chi_r^{k,m}\left(x_2\right) = 0.$$

г) $\Delta\nu_{k,m}(x) = \Delta_{k,m}^1 + \Delta_{k,m}^2 + \Delta_{k,m}^3 + \Delta_{k,m}^4$, якщо $\lambda_{k,m} \in \sigma_{22}\left(L^0\right)$ $\left(k = 2p-1; m = 2s-1; s, p \in \mathbf{N}\right)$, де $\Delta^1_{k,m} = \sum_{s=1}^{\infty} \gamma_s^{k,m}(x_2)\sqrt{2}\sin \pi(2s-1)x_1$, $\Delta^2_{k,m} = \sum_{t=1}^{\infty} \alpha_t^{k,m}(x_1)\sqrt{2}\sin \pi(2t-1)x_2$,

$$\Delta^3_{k,m} = \sum_{e=1}^{\infty} \beta_e^{k,m}(x_1)\sqrt{2}\sin 2\pi e x_2 , \ \Delta^4_{k,m} = \sum_{f=1}^{\infty} \overline{\beta}_f^{k,m}(x_2)\sqrt{2}\sin 2\pi f x_1$$

і $\gamma_s^{k,m}(x_2), \alpha_t^{k,m}(x_1), \beta_e^{k,m}(x_1), \overline{\beta}_f^{k,m}(x_2)$ визначаються рівняннями:

$$\left(\frac{d^{2k}}{dx_2^{2k}} + \lambda_{0,s} - \lambda_{k,m}\right)\gamma_s^{k,m}(x_2) = 0 , \qquad \left(\frac{d^{2k}}{dx_1^{2k}} + \lambda_{0,t} - \lambda_{k,m}\right)\alpha_t^{k,m}(x_1) = 0 ,$$

$$\left(\frac{d^{2k}}{dx_1^{2k}} + \lambda_{0,e} - \lambda_{k,m}\right)\beta_e^{k,m}(x_1) = 0 , \qquad \left(\frac{d^{2k}}{dx_2^{2k}} + \lambda_{0,f} - \lambda_{k,m}\right)\overline{\beta}_f^{k,m}(x_2) = 0 .$$

1. Каленюк П.И., Баранецкий Я.Е., Нитребич З.Н. Обобщенный метод разделения переменных. К., 1993. 2. Баранецький Я.О. Нелокальна багатоточкова задача для диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку // Укр. мат. журн. 1990. ***44.*** *№ 9. С.1174–1181. 3. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. К., 1984.*

УДК 517.929

Бігун Я.Й.
Чернівецький державний університет

УСЕРЕДНЕННЯ ДВОЧАСТОТНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ ТА З ІЄРАРХІЄЮ ШВИДКОСТЕЙ ФАЗ

The averaging methods for phase's variables, which speed of rotation forms the hierarchy of powers of small parameter are grounded on the finite segment and hall-axis. It is obtained estimation of averaging methods error, which is explicitly depending on small parameter.

На скінченному відрізку й півосі обґрунтовано метод усереднення за фазовими змінними, швидкість обертання яких становить ієрархію за степенями малого параметра. Одержано оцінку похибки методу усереднення, явно залежну від малого параметра.

1. Формулювання задачі. Дослідження систем диференціальних рівнянь з $m(m \geq 2)$ частотами асимптотичними методами [1], зокрема методом усереднення [2], ускладнено резонансними явищами, характерними для таких систем. Прогрес у дослідженні багаточастотних систем став можливим завдяки побудові оцінок відповідних осциляційних інтегралів [3,2]. Для систем із запізненням аргументу оцінки таких інтегралів і, як наслідок обґрунтування методу усереднення, одержано в [4, 5].