*тотных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1999. 35. № 1. С.8–14. 5. Бігун Я.Й. Метод усереднення в багаточастотних системах з запізненням // Укр. мат. журн. 1998. 50. № 2. С.299–303. 6. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М., 1975. 7. Печенев А.В. Об осреднении систем с иерархией скоростей вращения фаз // ПММ. 1992. 56. Вып.1. С.24–28. 8. Нейштадт А.И. О прохождении через резонансы в двухчастотной задаче // Докл. АН СССР. 1975. 221. № 2. С.301–304.*

**УДК 517.946**

**Білусяк Н.І.**
ІППММ НАН України

# КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ БЕЗТИПНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ



**For almost all (with respect to Lebesgue measure) parameters of the domain are established conditions for the existence of a unique classical solution of the boundary value problem with datas on all limit of the domain for typeless partial differential equations with variable coefficients.**

**Для майже всіх (стосовно міри Лебега) параметрів області встановлено умови існування єдиного класичного розв'язку крайової задачі з даними на всій границі області для безтипних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами.**

Крайові задачі з умовами типу умов Діріхле для гіперболічних та безтипних рівнянь, взагалі, є умовно коректні,а їх розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників.Такі задачі для безтипних та гіперболічних рівнянь у різних аспектах вивчали в роботах [1-5].

У цій роботі досліджено однозначну розв'язність задачі з даними на всій границі області для одного класу безтипних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Надалі використовуватимемо такі умовні позначення:

$Z_+^p$ – множина точок $R^p$ з цілими невід'ємними координатами;

$q=(q_1,\dots,q_p)\in Z_+^p$; $|q|=q_1+\dots+q_p$;

$q^*=(q_0,q_1,\dots,q_p)\in Z_+^{p+1}$; $|q^*|=q_0+q_1+\dots+q_p$;

$G$ – обмежена область із $R^p$; $\partial G$ – межа області $G$;

$D=\{(t,x): t\in[0,T], x\in G\}$; $K_T=\{(t,\tau)\in R^2 : 0\le t\le T, 0\le\tau\le T\}$;

$$B_q^\omega=\left\{\varphi(x)\in L_2(G): \varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k X_k(x),\ \|\varphi(x)\|_{q,\omega}=\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k|\exp\left(qk^\omega\right)\right\}, q,\omega>0;$$

$C^n\left([0,T],B_q^{\omega}\right)$ – простір функцій $v(t,x)$, визначених в області f таких, що $\partial^j v(t,x)/\partial t^j$, $j=0,1,\dots n$, для кожного $t\in[0,T]$ належить простору $B_q^{\omega}$ :

$$\left\| v(t,x)\right\|_{C^n\left([0,T],B_q^{\omega}\right)}=\sum_{k=1}^{\infty}\max_{0\le t\le T}\left|v_k(t)\right|\exp\left(qk^{\omega}\right),\quad v_k(t)=\int_G v(t,x)X_k(x)dx.$$

$C^{j,\nu}$ – клас визначених в області $\overline{G}$ функцій, $j$-ті похідні яких задовольняють в $\overline{G}$ умову Гельдера з показником $\nu$, $0<\nu<1$;

$A^{j,\nu}$ – клас замкнених областей, для яких функції,що задають у локальних координатах рівняння межових поверхонь цих областей,належать класу $C^{j,\nu}$.

1. В області $D$ розглянемо задачу

$$M\,u(t,x)=\frac{\partial^{2n}u(t,x)}{\partial t^{2n}}+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{h}b_{js}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2j}L^s u(t,x)=f(t,x), \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}&\left.\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{h}a_{js}^{(r)}L^s\frac{\partial^{2j}}{\partial t^{2j}}u(t,x)\right|_{t=0}=\varphi_r(x),\\ &\left.\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{h}a_{js}^{(r)}L^s\frac{\partial^{2j}}{\partial t^{2j}}u(t,x)\right|_{t=T}=\varphi_{n+r}(x),\end{aligned}\quad r=1,\dots,n,\right\} \tag{2}$$

$$L^q u(t,x)\Big|_{\partial G}=0,\quad q=0,1,\dots,n-1, \tag{3}$$

де $b_{js},a_{js}^{(r)}\in$ C, $j=0,1,\dots,n-1, s=0,1,\dots,h, r=1,\dots,n,$ $L$ – самоспряжений, еліптичний в області $G$ диференціальний вираз

$$L\equiv-\sum_{i,j=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)+q(x),$$

з дійснозначними коефіцієнтами

$$p_{ij}(x)\ge p_0>0,\qquad i,j=1,\dots p,\quad q(x)\ge 0.$$

Нехай

$$\overline{G}\in A^{2h,\nu},\quad p_{ij}(x)\in C^{2h-1,\nu}, i,j=1,\dots p,\quad q(x)\in C^{2h-2,\nu}.$$

Тоді задача на власні значення

$$LX(x)=\lambda X(x),\quad X(x)\Big|_{\partial G}=0$$

має повну ортонормовану в просторі $L_2(G)$ систему класичних власних функцій $\{X_k(x),k\in \mathrm{N}\}$,– а всі власні значення $\lambda_k, k\in N$, – множину яких позначимо через $\Lambda$, є різні та додатні; при цьому [6,7]:

$$C_0k^{2/p}\le\lambda_k\le C_1k^{2/p};\ C_0\le C_1, k\in Б, \lambda_k\in\Lambda, \tag{4}$$

$$X_k(x) \in C^{2h}(\bar{G}),\ k \in Б,\ \max_{x\in\bar{G}} \left| \frac{\partial^{|q|} X_k(x)}{\partial x_1^{q_1} \dots \partial x_p^{q_p}} \right| \le C_2 \lambda_k^{\frac{p}{4}+\frac{|q|}{2}};\ \ |q| = 0,1,\dots,2n; \tag{5}$$

тут і надалі $C_j,\ j = 0,1\dots,10,$ – додатні сталі, не залежні від $k$.

Нехай $\varphi_r(x) \in L_2(G), r = 1,\dots 2n,\quad f(t,x) \in C([0,T], L_2(G))$.

Тоді

$$\varphi_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{kr} X_k(x), \quad r = 1,\dots,2n, \quad f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k(x), \tag{6}$$

$$\varphi_{kr} = \int_G \varphi_r(x) X_k(x) dx, \qquad f_k(t) = \int_G f(t,x) X_k(x) dx\,.$$

Розв’язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(t), \tag{7}$$

кожний член якого задовольняє крайові умови (3). Підставивши ряди (6), (7), в рівняння (1) та умови (2), бачимо, що кожна з функцій $u_k(t), k \in \mathrm{N}$, є розв’язком такої крайової задачі для звичайного диференціального рівняння:

$$\frac{d^{2n} u_k(t)}{dt^{2n}} + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{h} b_{js} \lambda_k^s \frac{d^{2j} u_k(t)}{dt^{2j}} = f_k(t), \tag{8}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{h} a_{js}^{(r)} \lambda_k^s u_k^{(2j)}(0) = \varphi_{\mathrm{kr}}, \quad \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{h} a_{js}^{(r)} \lambda_k^s u_k^{(2j)}(T) = \varphi_{\mathrm{k,n+r}}, \quad r = 1,\dots,n, \tag{9}$$

Розв’язок задачі (8), (9) зображається у вигляді суми

$$u_k(t) = v_k(t) + R_k(t), \tag{10}$$

де $v_k(t)$ – розв’язок рівняння (8), що задовольняє умови

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{h} a_{js}^{(r)} \lambda_k^s u_k^{(2j)}(0) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{h} a_{js}^{(r)} \lambda_k^s u_k^{(2j)}(T) = 0, r = 1,\dots n, \tag{9*}$$

а $R_k(t)$ – розв’язок задачі з умовами (9) для рівняння

$$\frac{d^{2n} u_k(t)}{dt^{2n}} + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{h} b_{js} \lambda_k^s \frac{d^{2j} u_k(t)}{dt^{2j}} = 0. \tag{8*}$$

Нехай для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ всі корені $\eta_j(\lambda_k), j = 1,\dots,n,$ рівняння

$$\eta^n + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{h} b_{js} \lambda_k^s \eta^j = 0. \tag{11}$$

попарно різні та відмінні від нуля. Тоді характеристичний визначник задачі (8), (9) обчислюється за формулою

$$\Delta(\lambda_k) = \left(D(\lambda_k)\right)^2 \prod_{j=1}^{n} \left(\exp(-\gamma_j T) - \exp(\gamma_j T)\right) \prod_{1\le r<s\le n} \left(\gamma_s^2 - \gamma_r^2\right),$$

де

$$D(\lambda_k) = \det \left\| \sum_{s=0}^{h} a_{j-1,s}^{(r)} \lambda_k^s \right\|_{j,r=1}^{n}; \gamma_q \equiv \gamma_q(\lambda_k) = \sqrt{\left|\eta_q(\lambda_k)\right|} \exp\left(i Arg\, \eta_q(\lambda_k)/2\right),$$

**Теорема 1.** Для єдиності розв’язку задачі (1)-(3) у просторі $C^{(2n,2h)}(D)$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$\forall \quad \lambda_k \in \Lambda: \qquad 1 - \exp\left(2\gamma_j T\right) \ne 0, \quad D(\lambda_k) \ne 0, \quad j = 1, \ldots n. \tag{12}$$

Доведення аналогічне доведенню теореми 5.3 із [5,розд.2]

Розглянемо питання про існування розв’язку задачі (1)-(3).Нехай виконуються умови (12). Тоді для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ функції $v_k(t)$ та $R_k(t)$ зображаються формулами

$$v_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau, \tag{13}$$

$$R_k(t) = \sum_{q,j=1}^{n} \frac{(-1)^q S_{n-q}^{(j)} D_{qj} \left(\varphi_{qk} sh\left(\gamma_j (T-t)\right) + \varphi_{n+q,k} sh\left(-\gamma_s t\right)\right)}{D(\lambda_k) \prod\limits_{r=1, r\ne j}^{n} \left(\gamma_r^2 - \gamma_j^2\right) sh\left(\gamma_j T\right)}, \tag{14}$$

де $G_k(t,\tau)$ – функція Гріна задачі (8*), (9*), яка у квадраті $K_T$, крім сторін $\tau = 0$ і $\tau = T$ визначається формулами

$$\begin{aligned} G_k(t,\tau) = {} & \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{sh\left(\gamma_j (t-\tau)\right)}{\gamma_j \prod\limits_{r=1, r\ne j}^{n} \left(\gamma_j^2 - \gamma_r^2\right)} + \\ & + 2 \sum_{j,r,s=1}^{n} \frac{(-1)^{j+1} S_{n-j}^{(r)} D_{jr} B_s^j \left(sh\left(\gamma_r (t-T)\right) sh\left(\gamma_s \tau\right) + sh\left(\gamma_s (T-\tau)\right) sh\left(\gamma_r t\right)\right)}{D(\lambda_k) \gamma_s \prod\limits_{q=1, q\ne r}^{n} \left(\gamma_q^2 - \gamma_r^2\right) \prod\limits_{q=1, q\ne s}^{n} \left(\gamma_s^2 - \gamma_q^2\right) sh\left(\gamma_r T\right)}, \end{aligned} \tag{15}$$

$$B_s^j = \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{h} a_{qr}^{(j)} \lambda_k^r \gamma_s^{2q}, \qquad j, s = 1, \ldots, n,$$

$S_{n-j}^{(r)}$ – сума всіх можливих добутків елементів $\gamma_1^2, \ldots \gamma_{r-1}^2, \gamma_{r+1}^2, \ldots \gamma_n^2,$ взятих у кількості $n-j$ в кожному добутку, $S_0^{(j)} \equiv 1;$ $D_{jr}$ – алгебраїчне доповнення у визначнику $D(\lambda_k)$

елемента, що стоїть на перетині $j-$го рядка і $r-$го стовпця. На стороні $\tau = 0\ (\tau = T)$ квадрата $K_T$ функції $G_k(t,\tau), k \in \mathrm{N}$, довизначаємо за неперервністю справа (зліва).

Зауважимо, що із вигляду рівняння (11) випливають такі оцінки:

$$\left|\gamma_q\right| \le C_3 \lambda_k^{h/2}, \quad q = 1,\dots,n. \tag{16}$$

На підставі формул (7), (10) розв'язок задачі (1)-(3) формально зображається рядом

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(v_k(t) + R_k(t)\right) X_k(t), \tag{17}$$

який, взагалі,є розбіжним, бо вирази

$$\left|\exp\left(-\gamma_r T\right) - \exp\left(\gamma_r T\right)\right|, \quad r = 1,\dots,n,$$

будучи відмінними від нуля,можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченної множини значень $\lambda_k \in \Lambda$ .Тому питання про існування розв'язку задачі (1)-(3) пов'язане з проблемою малих знаменників.

**Теорема 2.** Нехай існують додатні сталі $m_1, \mu_1$ такі, що для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k \in \Lambda$ виконуються нерівності

$$\left|\exp\left(-\gamma_j T\right) - \exp\left(\gamma_j T\right)\right| \ge m_1 \lambda_k^{-\mu_1}, \quad j = 1,\dots,n, \tag{18}$$

і нехай

$$\varphi_j(x) \in B_{\beta_1}^{h/p}, \quad j = 1,\dots 2n, \quad \beta_1 > C_1^{h/p} C_3 T, \quad f(t,x) \in C\left([0,T], B_{\beta_2}^{h/p}\right), \ \beta_2 > 2C_1^{h/p} C_3 T.$$

Тоді існує розв'язок задачі (1)-(3),який належить простору $C^{(2n,2h)}(D)$ і неперервно залежить від функцій $f(t,x)$, $\varphi_j(x), \quad j = 1,\dots 2n.$

**Доведення.** Із формул (13)–(15), (17), враховуючи оцінки (16), отримуємо

$$\max_{0\le t\le T}\left|v_k^{(q)}(t)\right| \le C_6 \lambda_k^{qh/2+7nh/2-3h} \overline{f}_k \exp\left(2C_1^{h/p} C_3 T k^{h/p}\right) \sum_{j=1}^{n} \left|sh\left(-\gamma_j T\right)\right|^{-1}, \tag{19}$$

$$\overline{f}_k = \max_{0\le t\le T}\left|f_k(t)\right|, \qquad q = 0,1,\dots,2n$$

$$\max_{0\le t\le T}\left|R_k^{(q)}(t)\right| \le C_7 \lambda_k^{2hn-2h+qh/2} \exp\left(C_1^{h/p} C_3 T k^{h/p}\right) \sum_{q=1}^{2n} \left|\varphi_{qk}\right| \sum_{j=1}^{n} \left|sh\left(-\gamma_j T\right)\right|^{-1} \tag{20}$$

Із (19), (20), (4), (5), враховуючи елементарну нерівність

$$d^{\alpha} \le C_6 \exp(\rho d), C_8 = C_8(\alpha), \text{де } d > 0, \quad \alpha \ge 0, \qquad \rho > 0,$$

отримуємо таку оцінку для норми розв'язку задачі (1)-(3)

$$\left\|u(t,x)\right\|_{C^{(2n,2h)}(D)} \le C_9 \left\|f(t,x)\right\|_{C\left([0,T], B_{\beta_2}^{h/p}\right)} + C_{10} \sum_{j=1}^{2n} \left\|\varphi_j(x)\right\|_{\beta_1, h/p} .$$

**Наслідок.** При виконанні умов теореми 2 розв'язок задачі (1)-(3) належить простору $C^{2n}\left([0,T], B_{\beta_3}^{h/p}\right)$,де $\quad \beta_3 < \beta_2 - 2C_1^{h/p} C_3 T.$

***Зауваження***. Нерівності (18) виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) чисел $T$ та довільних фіксованих $b_{js}, j=1,\dots n-1, s=0,1,\dots h,$ для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k \in \Lambda$ при $\mu_1 > p/2$.

Доведення здійснюється за схемою доведення леми 2.4 із [5]; при цьому враховується нерівність

$$\left|\exp\left(-\gamma_j T\right)-\exp\left(\gamma_j T\right)\right| \ge 2\left|\sin\left(\operatorname{Im}\gamma_j T\right)\right| \ge 4\left|T\operatorname{Im}\gamma_j/\pi - d_j\left(\lambda_k\right)\right|, \quad j=1,\dots,n,$$

де $d_j\left(\lambda_k\right)$ – ціле число, для якого

$$\left|T\operatorname{Im}\gamma_j/\pi - d_j\left(\lambda_k\right)\right| \le 1/2..$$

*1. Бобик І.О., Бобик О.І., Пташник Б.Й. Крайові задачі для безтипних диференціальних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-матем. 1997. Вип. 47. С.32–39. 2. Бобик І.О., Пташник Б.Й. Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // УМЖ. 1994. 46, № 7. С.795–802. 3. Борок В.М. Классы корректной разрешимости краевой задачи в бесконечном слое // Докл. АН СССР. 1968. Т.183. № 6. С.1239–1242. 4. Борок В. М. Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое // Докл.АН СССР. 1968. Т.183. № 5. С.995–998. 5. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1984. 6. Ильин В.А., Шишмарев И.А. Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных / Изв. АН СССР. Сер. мат. 1960. Т.24. С.883–896. 7. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1983.*

**УДК 515. 12**

**Бокало Б.М.**
Львівський національний університет ім. І. Франка

## ПРО ПСЕВДОРАДІАЛЬНІСТЬ $\alpha$- РОЗТЯГНУТИХ ПРОСТОРІВ



**It is proved, that every $\varpi-\chi$-scattered and $\alpha$-extended compacts are pseudoradial.**

**Доведено, що всі $\varpi-\chi$-розріджені та $\alpha$-розтягнуті компакти є псевдорадіальними.**

Нагадаємо (див. [1, 2]), що простір $X$ називається **$\alpha$-розтягнутим**, якщо на $X$ існує лінійний порядок $<$ такий, що для кожного лівого променя $A$ в $(X,<)$ множина $\overline{A}\setminus A$ складається не більше ніж з однієї точки.

Другим вдалим розширенням класу впорядкованих просторів є радіальні і псевдорадіальні простори (див. [3, 4]).

Нагадаємо означення цих просторів. Нехай $X$ топологічний простір і $A\subset X$. Покладемо $[A]_{ch}=\{x\in X:$ існує лінійно впорядкована відношенням включення сім'я $\varepsilon$ множин з такими умовами: 1) $E\cap A\neq\varnothing$ для всіх $E\in\varepsilon$; 2) для довільного околу $Ox$ точки $x$ в $X$ знайдеться $E\in\varepsilon$ таке, що $x\in E\subset Ox\}$.