довільного околу O_{x^*} точки x^* в X існує таке $E_\alpha \in \varepsilon$, що $x^* \in E_\alpha \subset O_{x^*}$). Легко бачити, що $U_i \bigcap F_\alpha \neq \varnothing$ і $U_{i+1} \bigcap F_\alpha \subset U_i \bigcap F_\alpha$ для всіх $i \in N^+$ і $\alpha < \tau$. Але F_α замкнений підпростір зліченно компактного простору A. Значить, $P \bigcap F_\alpha \neq \varnothing$, тим більше $E_\alpha \bigcap A \neq \varnothing$ для кожного $\alpha < \tau$.

Значить, $x^* \in [A]_{ch}$. Але $x^* \notin A$, тому $[A]_{ch} \setminus A \neq \varnothing$. Отже, X – псевдорадіальний компакт.

Нагадаємо, що простір X називається $\varpi - \chi$ - розрідженим, якщо в кожному непорожньому замкненому підпросторі F простору X існує точка $x \in F$ така, що $\chi(x, F) \leq \varpi$.

З теореми 1 отримуємо

Наслідок. Якщо компакт X є $\varpi - \chi$ - розрідженим, тоді він є псевдорадіальним.

Теорема 2. Кожний α-розтягнутий компакт X є псевдорадіальним.

Доведення. У кожному непорожньому α-розтягнутому компакті X існує точка x, яка має зліченну центровану π-базу [1, 2]. Залишилось використати теорему 1, оскільки α-розтягнутість успадковується підпросторами.

1. Архангельский А.В. Об α-растянутых пространствах // ДАН СССР, 1978. 239, №3. С.15–18. 2. Архангельский А.В. Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты // УМН, 1978. 33. Вып.6. С.29–84. 3. Herrlich H. Ouotienten geordueter Koume und Folgenconvergenz // Fund. Math. 1967. 61. P.79–81. 4. Архангельский А.В. О некоторых свойствах радиальных пространств // Матем. заметки. 1980. 27. № 1. С.95–104. 5. Федорчук В.В. Об упорядоченных множествах // ДАН СССР. 1978. 240. № 2. С.280–282.

УДК 621.1.01

Бокало М.М., Дмитрів В.М.
Львівський національний університет ім. І. Франка

ЗАДАЧА ФУР'Є ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ДИФУЗІЇ З ФУНКЦІОНАЛАМИ

The well-posedness of Problem without initial conditions in unbounded domains of space arguments has been proved for the system of parabolic equations and usual differential equations. The system of equations contains the functionals on continuous functions.

Досліджено коректність задачі без початкових умов у необмежених за просторовими змінними областях для системи, яка складається з підсистем рівнянь параболічного типу і звичайних диференціальних рівнянь. Рівняння містять визначені на просторі неперервних функцій функціонали.

У статті розглянуті системи диференціально-функціональних рівнянь, які містять похідні та функціонали від шуканих функцій, причому диференціальна частина рівнянь є параболічним диференціальним оператором або звичайним диференціальним оператором. Гранично-початкові задачі для різнокомпонентних систем рівнянь дифузії з функціоналами вивчали в роботах [2-4] та інших. Тут досліджується коректність задачі Фур'є (задачі без початкових умов) для таких систем у необмежених за просторовими змінними областях. Зауважимо, що таку задачу для рівнянь та систем параболічного типу розглядали в роботах [5,6] та інших.

Введемо позначення і поняття, які будемо тут використовувати. Нехай D – область в просторі $\mathbf{R}^{n+1}_{x,t}$. Через $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$, $C^{\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$, $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$, де α – число з проміжку [0,1], позначатимемо простори функцій, які разом з відповідними похідними є неперервними на $\overline{D}$, якщо $\alpha=0$, і неперервними за Гельдером на $\overline{D}$ з показником α, якщо $\alpha>0$ (означення див. на ст.16 роботи [8]), а норми в цих просторах – відповідно через$\|\cdot\|^{D}_{\alpha,\alpha/2}$, $\|\cdot\|^{D}_{\alpha,1+\alpha/2}$, $\|\cdot\|^{D}_{2+\alpha,1+\alpha/2}$. Під $C^{\alpha,\alpha/2}_{loc}(\overline{D})$ ($C^{\alpha,1+\alpha/2}_{loc}(\overline{D})$, $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{loc}(\overline{D})$), якщо D – необмежена область, розумітимемо простір функцій, які визначені на $\overline{D}$ і їх звуження на замикання довільної обмеженої підобласті D' області D належать простору $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D'})$ ($C^{\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D'})$, $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D'})$), де $\alpha\in[0,1]$. Домовимось, що $C(\overline{D})\overset{def}{=}C^{0,0}(\overline{D})$, $C_{loc}(\overline{D})\overset{def}{=}C^{0,0}_{loc}(\overline{D})$. Якщо Q – об'єднання області D з частиною своєї межі, то через $C^{\alpha,\alpha/2}_{loc}(Q)$ ($C^{\alpha,1+\alpha/2}_{loc}(Q)$, $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{loc}(Q)$) позначатимемо простір функцій, звуження яких на замикання довільної обмеженої підобласті D' області D такої, що $D'\subset Q$, належать $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D'})$ ($C^{\alpha,1+|\alpha/2}(\overline{D'})$, $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D'})$), де $\alpha\in[0,1]$.

Будемо вважати, що межа $\partial\Omega$ області $\Omega\subset\mathbf{R}^{n}_{x}$ належить класу $C^{2+\alpha}$, якщо для будь-якої її точки існує повний окіл цієї точки такий, що перетин $\partial\Omega$ з цим околом задається рівнянням $x_i=h(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$ для деякого $i\in\{1,\ldots,n\}$, де $h\in C^{2+\alpha}(\overline{K})$, K - область у просторі відповідних змінних.

Якщо W – деякий простір, то через $[W]^m$, де $m\in\mathrm{N}$, позначимо декартів степінь простору W (декартів добуток самого на себе m раз). Запис $w\in[W]^m$ означатиме, що $w=col(w_1,\ldots,w_m)$ – вектор-стовпець з компонентами $w_i\in W$ $(i=1,\ldots,m)$ ($[\mathbf{R}]^m\equiv\mathbf{R}^m$). Введемо позначення: $|w|=\max\limits_{1\le i\le m}|w_i|$ для довільного вектора $w=col(w_1,\ldots,w_m)\in\mathbf{R}^m$. Домовимось писати $u<v$ для $u,v\in\mathbf{R}^m$, якщо $u_i<v_i$ $(i=1,\ldots,m)$, а нерівність $u\le v$ означатиме, що $u_i\le v_i$ $(i=1,\ldots,m)$.

Нехай $Q=\Omega\times(-\infty,T]$, де $0<T<+\infty$ і Ω – необмежена область в просторі $\mathbf{R}^n_x$ з гладкою межею $\partial\Omega$; Ω_* – обмежена підобласть області Ω; $\Sigma=\partial\Omega\times(-\infty,T]$.

Розглянемо задачу Фур'є для різнокомпонентної системи рівнянь дифузії

$$P_iw(x,t)\equiv\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t}-\sum_{k,l=1}^{n}a_{i,kl}(x,t)\frac{\partial^2u_i(x,t)}{\partial x_k\partial x_l}+\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}(x,t)\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_k}+a_i(x,t)u_i(x,t)-$$

$$-f_i(x,t,w(x,t),l_i(t,w(\cdot,t)))=\hat{f}_i(x,t),\qquad (x,t)\in Q,\qquad (i=1,\ldots,M),\quad (1)$$

$$G_j w(x,t) \equiv \frac{\partial v_j(x,t)}{\partial t} + c_j(x,t) v_j(x,t) -$$

$$- g_j(x,t,w(x,t), l_{M+j}(t, w(\cdot,t))) = \hat{g}_j(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}, \qquad (j = 1,\dots,L), \quad (2)$$

$$u_i(x,t) = h_i(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma, \qquad (i = 1,\dots,M). \quad (3)$$

Тут M, L – довільні натуральні числа; $w = col(u,v)$, $u = col(u_1,\dots,u_M)$, $v = col(v_1,\dots,v_L)$, $l_k(t,\cdot) : [C(\overline{\Omega_*})]^{M+L} \to \mathbf{R}$ – сім'я $(t \in (-\infty, T])$ функціоналів $(k = 1,\dots,M+L)$; $f_i(x,t,\xi,\eta)$ $(g_j(x,t,\xi,\eta))$ – функція, яка визначена для $(x,t) \in Q$ $(\overline{Q})$, $\xi \in \mathbf{R}^{M+L}$, $\eta \in \mathbf{R}$ для кожного $i = 1,\dots,M$ $(j = 1,\dots,L)$.

Означення 1. *Розв'язком задачі (1)-(3) називається вектор-функція* $w = col(u,v)$, *де* $u = col(u_1,\dots,u_M) \in [C^{2,1}_{loc}(Q) \cap C_{loc}(\overline{Q})]^M$, $v = col(v_1,\dots,v_L) \in [C^{0,1}_{loc}(\overline{Q})]^L$, *яка задовольняє рівняння системи (1),(2) та граничну умову (3).*

На вихідні дані накладаємо такі умови:

(A1) функції $a_{i,kl}$, $a_{i,k}$, a_i – неперервні на Q, а функція c_j – на $\overline{Q}$; існує стала $m^* > 0$ така, що $a_{i,kk}(x,t) \le m^*(|x|^2 + 1)$, $a_{i,k}(x,t) \le m^*(|x| + 1)$, $(x,t) \in Q$ $(i = 1,\dots,M;\ j = 1,\dots,L;\ k,l = 1,\dots,n)$;

(A2) для кожного $i \in \{1,\dots,M\}$ $a_{i,kl} \equiv a_{i,lk}$ $(k,l = 1,\dots,n)$ і в кожній точці $(x,t) \in Q$ для всіх $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbf{R}^n$ справджується нерівність

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{i,kl}(x,t) \xi_k \xi_l \ge \mu_i(t) \sum_{s=1}^{n} \xi_s^2,$$

де μ_i – невід'ємна на $(-\infty, T]$ функція;

(A3) для кожного $i \in \{1,\dots,M\}$ $(j \in \{1,\dots,L\})$ функція $f_i(x,t,\xi,\eta)$ $(g_j(x,t,\xi,\eta))$ неперервна на $Q \times \mathbf{R}^{M+L} (\overline{Q} \times \mathbf{R}^{M+L})$ та диференційовна там за ξ та η, причому частинні похідні

$$\partial f_i / \partial \xi_1, \dots, \partial f_i / \partial \xi_{M+L}, \partial f_i / \partial \eta \ \ (\partial g_j / \partial \xi_1, \dots, \partial g_j / \partial \xi_{M+L}, \partial g_j / \partial \eta)$$

обмежені на $Q \times \mathbf{R}^{M+L+1} (\overline{Q} \times \mathbf{R}^{M+L+1})$; крім того $\partial f_i / \partial \xi_1 \ge 0, \dots, \partial f_i / \partial \xi_{M+L} \ge 0$, $\partial f_i / \partial \eta \ge 0$ $(\partial g_j / \partial \xi_1 \ge 0, \dots, \partial g_j / \partial \xi_{M+L} \ge 0, \partial g_j / \partial \eta \ge 0)$; $f_i(x,t,0,0) = 0$, $(x,t) \in Q$ $(g_j(x,t,0,0) = 0,\ (x,t) \in \overline{Q})$;

(A4) для кожного $k \in \{1,\dots,M+L\}$ і $t \in (-\infty, T]$ функціонал $l_k(t,\cdot)$ – лінійний, неперервний та неспадний; для будь-якого елемента $v \in C(\overline{\Omega_*})$ і $k \in \{1,\dots,M+L\}$ функція $l_k(t,v)$, $t \in (-\infty, T]$ – неперервна; для довільного $k \in \{1,\dots,M+L\}$ $|l_k(t,v)| \le l(t) \| v \|_{C(\overline{\Omega_*})}$, $t \in (-\infty, T]$, де функція $l(t)$ – обмежена на обмежених підмножинах з $(-\infty, T]$.

(A5) $\inf\limits_{(x,t)\in Q} (a_i(x,t) - f_i^*(x,t)) = a_0 > 0 \qquad (i = 1,\dots,M)$,

$$\inf_{(x,t)\in\overline{Q}}(c_j(x,t)-g_j^*(x,t))=a_0>0 \qquad (j=1,...,L),$$

де $f_i^*(x,t)\overset{def}{=}\sup_{(\xi,\eta)\in R^{M+L+1}}[\sum_{k=1}^{M+L}\frac{\partial f_i(x,t,\xi,\eta)}{\partial\xi_k}+l_i(t,\Theta)\frac{\partial f_i(x,t,\xi,\eta)}{\partial\eta}],\ \ (x,t)\in Q,$

$$g_j^*(x,t)\overset{def}{=}\sup_{(\xi,\eta)\in R^{M+L+1}}[\sum_{k=1}^{M+L}\frac{\partial g_j(x,t,\xi,\eta)}{\partial\xi_k}+l_{M+j}(t,\Theta)\frac{\partial g_j(x,t,\xi,\eta)}{\partial\eta}],\ \ (x,t)\in\overline{Q},$$

а $\Theta\overset{def}{=}col(1,...,1)\in\mathbf{R}^{M+L}$ $(i=1,...,M;\ j=1,...,L)$;

(A6) $\hat f=col(\hat f_1,...,\hat f_M)\in[C_{loc}(Q)]^M$, $\hat g=col(\hat g_1,...,\hat g_L)\in[C_{loc}(\overline{Q})]^L$,

$h=col(h_1,...,h_M)\in[C_{loc}(\Sigma)]^M$.

Далі всюди будемо припускати, що виконуються умови (A1)-(A6), і використовуватимемо такі позначення:

$$Pw(x,t)\overset{def}{=}col(P_1w(x,t),...,P_Mw(x,t)),\ (x,t)\in Q,$$

$$Gw(x,t)\overset{def}{=}col(G_1w(x,t),...,G_Lw(x,t)),\ (x,t)\in\overline{Q}.$$

Тоді задачу (1)–(3) можна компактно записати у вигляді

$$Pw(x,t)=\hat f(x,t),\ (x,t)\in Q,\ Gw(x,t)=\hat g(x,t),\ (x,t)\in\overline{Q};\ u(x,t)=h(x,t),\ (x,t)\in\Sigma,$$

де $w=col(u,v)\in W_{loc}(Q)\overset{def}{=}[C_{loc}^{2,1}(Q)\cap C_{loc}(\overline{Q})]^M\times[C_{loc}^{0,1}(\overline{Q})]^L$.

Задачу (1)–(3) нам зручно буде трактувати так: для заданих вектор-функцій $\hat f$, $\hat g$ і h знайти розв'язок $w=col(u,v)$ системи рівнянь (1),(2), який задовольняє умову (3). Коротко це записуватимемо $w=RS(\hat f,\hat g,h)$.

Лема. Нехай вектор-функції $w^1=col(u^1,v^1)$, $w^2=col(u^2,v^2)\in W_{loc}(Q)$ такі, що Pw^1-Pw^2, Gw^1-Gw^2, u^1-u^2 – обмежені відповідно в Q, на $\overline{Q}$ і в Σ. Тоді

$$|w^1(x,t)-w^2(x,t)|\le\max\{\sup_{(y,\tau)\in\Sigma}|u^1(y,\tau)-u^2(y,\tau)|,\frac{1}{a_0}\sup_{(y,\tau)\in Q}|Pw^1(y,\tau)-Pw^2(y,\tau)|,$$

$$\frac{1}{a_0}\sup_{(y,\tau)\in\overline{Q}}|Gw^1(y,\tau)-Gw^2(y,\tau)|\},\qquad (x,t)\in Q. \tag{4}$$

Доведення. Позначимо $\hat f^k(x,t)\overset{def}{=}Pw^k(x,t),\ \ (x,t)\in Q$, $\hat g^k(x,t)\overset{def}{=}Gw^k(x,t)$, $(x,t)\in\overline{Q}$ $(k=1,2)$. Прийнявши $u^{1,2}=u^1-u^2$, $v^{1,2}=v^1-v^2$, $w^{1,2}=w^1-w^2$, з рівнянь (1) та (2), записаних для w^1 і w^2, і використавши лему Адамара (див. [8]), отримаємо

$$L_iw^{1,2}(x,t)-\tilde f_i(x,t,w^{1,2}(x,t),l_i(t,w^{1,2}(\cdot,t)))=\hat f_i^{1,2}(x,t),\ (x,t)\in Q,\ (i=1,...,M), \tag{5}$$

$$F_jw^{1,2}(x,t)-\tilde g_j(x,t,w^{1,2}(x,t),l_{M+j}(t,w^{1,2}(\cdot,t)))=\hat g_j^{1,2}(x,t),(x,t)\in\overline{Q},\ (j=1,...,L), \tag{6}$$

де $\quad L_iw^{1,2}(x,t)\overset{def}{=}P_iw^{1,2}(x,t)+f_i(x,t,w^{1,2}(x,t),l_i(t,w^{1,2}(\cdot,t))),\quad (x,t)\in Q;$

$$F_j w^{1,2}(x,t) \overset{def}{=} G_j w^{1,2}(x,t) + g_j(x,t,w^{1,2}(x,t), l_{M+j}(t, w^{1,2}(\cdot,t))), \quad (x,t) \in \overline{Q};$$

$$\hat{f}^{1,2}(x,t) \overset{def}{=} \hat{f}^1(x,t) - \hat{f}^2(x,t),\ (x,t) \in Q;\ \hat{g}^{1,2}(x,t) \overset{def}{=} \hat{g}^1(x,t) - \hat{g}^2(x,t),\ (x,t) \in \overline{Q},$$

а функції $\widetilde{f}_i(x,t,\xi,\eta)$, $g_j(x,t,\xi,\eta)$ справджують умови (A3)-(A5). Нехай $\lambda \in (0, a_0)$ – довільне число. Домножимо (5) і (6) на $e^{\lambda t}$. Після простих перетворень отримаємо

$$L_i^\lambda \widetilde{w}^{1,2}(x,t) \equiv L_i \widetilde{w}^{1,2}(x,t) - \lambda \widetilde{u}_i^{1,2}(x,t) -$$

$$- \widetilde{f}_i(x,t,\widetilde{w}^{1,2}(x,t), l_i(t,\widetilde{w}^{1,2}(\cdot,t))) = \hat{f}_i^{1,2}(x,t)e^{\lambda t}, \quad (x,t) \in Q, \quad (i = 1,...,M), \tag{7}$$

$$F_j^\lambda \widetilde{w}^{1,2}(x,t) \equiv F_j \widetilde{w}^{1,2}(x,t) - \lambda \widetilde{v}_j^{1,2}(x,t) -$$

$$- \widetilde{g}_j(x,t,\widetilde{w}^{1,2}(x,t), l_{M+j}(t,\widetilde{w}^{1,2}(\cdot,t))) = \hat{g}_j^{1,2}(x,t)e^{\lambda t},\ (x,t) \in \overline{Q},\ (j = 1,...,L), \tag{8}$$

де $\widetilde{w}^{1,,2}(x,t) = col(\widetilde{u}^{1,,2}(x,t), \widetilde{v}^{1,,2}(x,t)) \overset{def}{=} col(u^{1,,2}(x,t)e^{\lambda t}, v^{1,,2}(x,t)e^{\lambda t})$, $(x,t) \in Q$.

Нехай t_* – довільне від'ємне число, $Q^* = \Omega \times (t_*, T)$, $\Sigma^* = \partial\Omega \times (t_*, T)$. Легко бачити, що коефіцієнти диференціальних операторів L_i^λ $(i = 1,...,M)$, F_j^λ $(j = 1,...,L)$ задовольняють умови, які аналогічні умовам (A1)-(A5) для коефіцієнтів операторів P_i $(i = 1,...,M)$, G_j $(j = 1,...,L)$ (з тою лише різницею, що замість $a_0 > 0$ треба взяти $a_0 - \lambda > 0$). Використовуючи міркування подібні до тих, які проводились при доведенні теореми порівняння в роботі [4], отримаємо

$$|\widetilde{w}^{1,2}(x,t)| \le \max\{e^{\lambda T} \cdot \sup_{(y,\tau)\in\Sigma^*} |u^{1,2}(y,\tau)|,\ e^{\lambda t_*} \cdot \sup_{y\in\Omega} |w^{1,2}(y,t_*)|,$$

$$\frac{e^{\lambda T}}{a_0 - \lambda} \cdot \sup_{(y,\tau)\in Q^*} |\hat{f}^{1,2}(y,\tau)|,\ \frac{e^{\lambda T}}{a_0 - \lambda} \cdot \sup_{(y,\tau)\in Q^*} |\hat{g}^{1,2}(y,\tau)|\}, \qquad (x,t) \in \overline{Q^*}. \tag{9}$$

Перейдемо в (9) до границі спочатку при $t_* \to -\infty$, а потім (для кожної фіксованої точки $(x,t) \in Q$) при $\lambda \to +0$. У результаті отримаємо (4). *Лему доведено.*

Теорема 1 (Апріорна оцінка розв'язку). *Нехай функції* $\hat{f}$, $\hat{g}$ *і* h *обмежені відповідно в* Q, *на* $\overline{Q}$ *і в* Σ. *Тоді для довільної обмеженої вектор-функції* $w = RS(\hat{f}, \hat{g}, h)$ *справедлива оцінка*

$$|w(x,t)| \le \max\{\sup_{(y,\tau)\in\Sigma} |h(y,\tau)|,\ \sup_{(y,\tau)\in Q} \frac{|\hat{f}(y,\tau)|}{a_0},\ \sup_{(y,\tau)\in Q} \frac{|\hat{g}(y,\tau)|}{a_0}\} \equiv M_0 \tag{10}$$

для всіх $(x,t) \in \overline{Q}$.

Теорема 2 (Єдиність розв'язку). *Розв'язок задачі (1)-(3) в класі обмежених функцій єдиний.*

Теореми 1 і 2 випливають з леми.

Нехай $C^{\alpha,\alpha/2,1,1}(\overline{Q} \times [-K_0, K_0]^{M+L} \times [-K_1, K_1]) \overset{def}{=} \{ f(x,t,\xi,\eta), (x,t) \in \overline{Q}, \xi \in \mathbf{R}^{M+L}$, $\eta \in \mathbf{R}$: існує стала $K > 0$ така, що $| f(x_1,t_1,\xi,\eta) - f(x_2,t_2,\xi,\eta)| \le$

$\leq K[|x_1 - x_2|^{\alpha} + |t_1 - t_2|^{\alpha/2}]$ $\forall (x_1,t_1),(x_2,t_2) \in \overline{Q}$, $(\xi,\eta) \in [-K_0,K_0]^{M+L} \times [-K_1,K_1]$, і похідні $\partial f / \partial \xi_k$ $(k = 1,...,M+L)$, $\partial f / \partial \eta$ – неперервні та обмежені на $\overline{Q} \times [-K_0,K_0]^{M+L} \times [-K_1,K_1]\}$, де $K_o, K_1 > 0$ – довільні сталі, $\alpha \in [0,1]$.

Теорема 3 (Існування розв'язку). Припустимо, що вихідні дані задачі (1)-(3) додатково задовольняють умови

(B1) існує $\alpha \in (0,1]$ таке, що $a_{i,kl}, a_{i,k}, a_i, c_j \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}); \partial a_{i,kl} / \partial x_s \in C(\overline{Q})$; $\mu_i(t) \geq \mu_0 \equiv const > 0 \; \forall t \in (-\infty,T]$ $(i = 1,...,M; j = 1,...,L; k,l,s = 1,...,n)$;

(B2) $f_i(x,t,\xi,\eta), g_j(x,t,\xi,\eta) \in C^{\alpha,\alpha/2,1,1}(\overline{Q} \times [-K_0,K_0]^{M+L} \times [-K_1,K_1])$ для довільних сталих $K_0, K_1 > 0$ $(i = 1,...,M; j = 1,...,L)$;

(B3) функція l з умови (A4) – обмежена; для будь-яких $t_1,t_2 \in (-\infty,T]$ і довільного елемента $v \in C(\overline{\Omega_*})$ справедлива нерівність $|l_k(t_1,v) - l_k(t_2,v)| \leq$ $\leq C_0 \cdot |t_1 - t_2|^{\alpha/2} \cdot \|v\|_{C(\overline{\Omega_*})}$, де $C_0 = const \geq 0$ $(k = 1,...,M+L)$;

(B4) $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$;

(B5) $col(\hat{f},\hat{g}) \in [C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})]^{M+L}$; $h \in [C_{loc}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Sigma})]^M$.

Тоді існує обмежений розв'язок $w = col(u,v) \in [C_{loc}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})]^M \times [C_{loc}^{\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})]^L$ задачі (1)–(3).

Доведення. Для кожного $k \in \mathrm{N}$ позначимо $Q^k = Q \cap \{(x,t) : t > -k\}$, $\Sigma^k = \Sigma \cap \{(x,t) : t > -k\}$ і визначимо вектор-функцію $w^k = col(u^k,v^k)$, як розв'язок задачі

$$Pw^k(x,t) = \hat{f}^k(x,t), \qquad (x,t) \in Q^k, \tag{11}$$

$$Gw^k(x,t) = \hat{g}^k(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q^k}, \tag{12}$$

$$u^k(x,t) = h^k(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma^k, \tag{13}$$

$$w^k(x,-k) = 0, \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{14}$$

Тут $h^k(x,t) = h(x,t)\eta(t+k)$, $(x,t) \in \Sigma$, $\hat{f}^k(x,t) = \hat{f}(x,t)\eta(t+k)$, $\hat{g}^k(x,t) = \hat{g}(x,t)\eta(t+k)$, $(x,t) \in \overline{Q}$, де η – гладка і монотонна на **R** функція така, що $\eta(t) = 0$ при $t \leq 1/2$, $\eta(t) = 1$ при $t \geq 1$.

Із результатів роботи [4] випливає, що для кожного $k \in \mathrm{N}$ задача (11)-(14) має єдиний розв'язок $w^k = col(u^k,v^k) \in [C_{loc}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q^k})]^M \times [C_{loc}^{\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q^k})]^L$. Продовжимо кожну з вектор-функцій u^k і v^k нулем на $\overline{Q} \setminus \overline{Q^k}$ і залишимо за продовженнями ці ж самі позначення ($k \in \mathrm{N}$). Очевидно, що $w^k = col(u^k,v^k) \in$ $[C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})]^M \times [C^{\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})]^L$, $w^k = RS(\hat{f}^k,\hat{g}^k,h^k)$ $(k = 1,2,...)$. Провівши відповідні міркування і використавши теорему 3.1 [7; с.665] та теорему 10.1 [7; с.400], можна показати, що

$$\sum_{i=1}^{M} \| u_i^k \|_{2+\alpha,1+\alpha/2}^{Q} + \sum_{j=1}^{L} \| v_j^k \|_{\alpha,1+\alpha/2}^{Q} \le C_2 \qquad \forall k \in \mathrm{N}, \tag{15}$$

де $C_2 > 0$ – стала, яка не залежить від k.

З (15) випливає, що з послідовності $\{w^k\}$ (використовуючи діагональний процес) можна вибрати підпослідовність (за якою залишемо те саме позначення) таку, що для довільного

$$m \in \mathrm{N} \;\; u_i^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u_i \;\text{ в }\; C^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q^m}) \;\text{ і }\; v_j^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v_j \;\text{ в }\; C^{\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q^m}) \;\; (i=1,\dots,M;\, j=1,\dots,L),$$

де $0 < \gamma < \alpha$. Покладемо $w(x,t) = col(u(x,t), v(x,t))$, $(x,t) \in \overline{Q}$. Легко бачити, що знайдена вектор-функція w буде розв'язком задачі (1)–(3). Із (15) отримаємо

$$\sum_{i=1}^{M} \| u_i \|_{2+\alpha,1+\alpha/2}^{Q} + \sum_{j=1}^{L} \| v_j \|_{\alpha,1+\alpha/2}^{Q} \le C_2 . \tag{16}$$

Теорему 3 доведено.

Нехай Π – простір вектор-функцій $col(\hat{f}, \hat{g}, h)$ таких, що

$$col(\hat{f}, \hat{g}, h) \in [C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})]^{M+L} \times [C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Sigma})]^{M} .$$

Припустимо, що справджуються умови (B1)-(B4). Тоді для будь-яких вектор-функцій $col(\hat{f}, \hat{g}, h) \in \Pi$ існує єдина обмежена вектор-функція w така, що $w = RS(\hat{f}, \hat{g}, h)$.

Означення 2. Скажемо, що в класі обмежених функцій розв'язок задачі (1)-(3) неперервно залежить від вихідних даних, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для будь-яких наборів вихідних даних $col(\hat{f}^1, \hat{g}^1, h^1), col(\hat{f}^2, \hat{g}^2, h^2) \in \Pi$ з того, що $\sup\limits_{(x,t)\in Q} | \hat{f}^1(x,t) - \hat{f}^2(x,t) | < \delta$, $\sup\limits_{(x,t)\in Q} | \hat{g}^1(x,t) - \hat{g}^2(x,t) | < \delta$, $\sup\limits_{(x,t)\in \Sigma} | h^1(x,t) - h^2(x,t) | < \delta$ випливає нерівність

$$\sup_{(x,t)\in Q} | w^1(x,t) - w^2(x,t) | < \varepsilon ,$$

де $w^i = RS(\hat{f}^i, \hat{g}^i, h^i)$ $(i = 1,2)$ – обмежені функції.

Теорема 4 (Неперервна залежність від вихідних даних). Нехай виконуються умови теореми 3. Тоді в класі обмежених функцій розв'язок задачі (1)-(3) неперервно залежить від вихідних даних.

Це твердження випливає з леми.

1. Hodgkin A.l., Huxley A.F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // J.Physiol. 1952. 117. P.500–544. 2. Pell T.M., Davis T.G. Diffusion and reaction in polyester melts // J. Polym. Science. 1973. 11. P.1671-1682. 3. Babak P.P. The first boundary value problem for coupled diffusion systems with functional arguments // Математичні студії. 1997. Т.7. № 2. С.179–186. 4. Babak P.P. Coupled diffusion systems with functional arguments in unbounded domains // Математичні студії. 1999. Т.12. № 1. С.85–89. 5. Шмулев И.И. Периодические решения первой краевой задачи для пара-

болических уравнений // Математический сборник. 1965. Т.66(108). 3. С.398–410. 6. Бокало Н.М. О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Тр. Семинара им. И.Г.Петровского. 1989. Вып.14. С.3–44. 7. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., Солонников В.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. 8. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1970.

УДК 517.526

Боднар Д.І., Гладун В.Р.

НУ "Львівська політехніка", кафедра прикладної математики

ПАРАБОЛІЧНІ ОБЛАСТІ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ СТІЙКОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З КОМПЛЕКСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

The article is devoted to analysis of the numerical stability of branched continued fractions with complex elements with partial denominators equal to one. The parabolic regions of the numerical stability for such branched continued fractions are determined.

Стаття присвячена дослідженню обчислювальної стійкості гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами з частинними знаменниками, що дорівнюють одиниці. Встановлено параболічні області обчислювальної стійкості для таких гіллястих ланцюгових дробів.

Важливою властивістю гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД), як апарата обчислювальної математики, є властивість обчислювальної стійкості. Похибки обчислення підхідних дробів залежать не тільки від похибок заокруглення їх елементів, похибок машинних операцій тощо, але і певним чином від самих елементів. Необхідно встановити такі області елементів ГЛД, щоб похибки обчислення їх підхідних дробів були обмеженими. Будемо досліджувати параболічні області обчислювальної стійкості ГЛД.

Розглянемо ГЛД вигляду

$$f = a_0\left(b_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}\right)^{-1}, \tag{1}$$

для якого послідовність областей $\left\{\Omega_{i(k)}\right\}$, де $\Omega_{i(k)} \subset C \times C$, є послідовністю областей елементів, тобто $\left\langle a_{i(k)}, b_{i(k)} \right\rangle \in \Omega_{i(k)}$ $\left(k = 0,1,2,\ldots, i_0 = 0, i_k = \overline{1,N}, k \geq 1\right)$.

Обчислимо s-й підхідний дріб ГЛД (1)