боличеcких уравнений // Математический сборник. 1965. Т.66(108). 3. С.398–410. 6. Бокало Н.М. О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Тр. Семинара им. И.Г.Петровского. 1989. Вып.14. С.3–44. 7. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., Солонников В.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. 8. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1970.

УДК 517.526

Боднар Д.І., Гладун В.Р.
НУ “Львівська політехніка”, кафедра прикладної математики

ПАРАБОЛІЧНІ ОБЛАСТІ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ СТІЙКОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З КОМПЛЕКСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

The article is devoted to analysis of the numerical stability of branched continued fractions with complex elements with partial denominators equal to one. The parabolic regions of the numerical stability for such branched continued fractions are determined.

Стаття присвячена дослідженню обчислювальної стійкості гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами з частинними знаменниками, що дорівнюють одиниці. Встановлено параболічні області обчислювальної стійкості для таких гіллястих ланцюгових дробів.

Важливою властивістю гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД), як апарата обчислювальної математики, є властивість обчислювальної стійкості. Похибки обчислення підхідних дробів залежать не тільки від похибок заокруглення їх елементів, похибок машинних операцій тощо, але і певним чином від самих елементів. Необхідно встановити такі області елементів ГЛД, щоб похибки обчислення їх підхідних дробів були обмеженими. Будемо досліджувати параболічні області обчислювальної стійкості ГЛД.

Розглянемо ГЛД вигляду

$$f = a_0\left(b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}\right)^{-1}, \tag{1}$$

для якого послідовність областей $\left\{\Omega_{i(k)}\right\}$, де $\Omega_{i(k)} \subset C \times C$, є послідовністю областей елементів, тобто $\left\langle a_{i(k)}, b_{i(k)}\right\rangle \in \Omega_{i(k)}$ $\left(k = 0,1,2,\ldots, i_0 = 0, i_k = \overline{1,N}, k \geq 1\right)$.

Обчислимо s-й підхідний дріб ГЛД (1)

$$f^{(s)} = a_0 \left(b_0 + \overset{s}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \right)^{-1} \tag{2}$$

за допомогою BR-алгоритму, який полягає в поступовому обчисленні величин

$$Q_{i(p)}^{(s)} = a_{i(p)} \left(b_{i(p)} + \sum_{i_{p+1}=1}^{N} Q_{i(p+1)}^{(s)} \right)^{-1} \left(p = s, s-1, \ldots, 0, i_0 = 0, i_k = \overline{1,N}, k = \overline{1,s} \right),$$

де $Q_{i(s+1)}^{(s)} = 0$ $\left(i_k = \overline{1,N}, k = \overline{1,s+1} \right)$. Тоді $f^{(s)} = Q_0^{(s)}$.

Розглянемо також скінченний ГЛД

$$\hat{f}^{(s)} = \hat{a}_0 \left(\hat{b}_0 + \overset{s}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{\hat{a}_{i(k)}}{\hat{b}_{i(k)}} \right)^{-1}, \tag{3}$$

який будемо вважати наближеним до ГЛД (2). Нехай $\alpha_{i(k)}$, $\beta_{i(k)}$ – відносні похибки елементів $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$ відповідно, тобто $\hat{a}_{i(k)} = a_{i(k)}\left(1+\alpha_{i(k)}\right)$, $\hat{b}_{i(k)} = b_{i(k)}\left(1+\beta_{i(k)}\right)$, $\left(k = \overline{0,s}, i_0 = 0, i_k = \overline{1,N}, k = \overline{1,s}\right)$. Нехай $\hat{Q}_{i(s+1)}^{(s)} = 0$ $\left(i_k = \overline{1,N}, k = \overline{1,s+1} \right)$ і $\hat{Q}_{i(p)}^{(s)} = \hat{a}_{i(p)} / \left(\hat{b}_{i(p)} \oplus \left(\hat{Q}_{i(p)1}^{(s)} \oplus \hat{Q}_{i(p)2}^{(s)} \oplus \ldots \oplus \hat{Q}_{i(p)N}^{(s)} \right) \right)$ $\left(p = s, s-1, \ldots, 0,\ i_0 = 0, i_k = \overline{1,N}\right.$ $\left.k = \overline{1,s}\right)$, де знаками $/$ і $\oplus$ позначені машинні операції відповідно ділення і додавання. Тоді значенням ГЛД (3) буде величина $\hat{Q}_0^{(s)}$. Нехай $\varepsilon_{i(p)}^{(s)}$ – відносні похибки $Q_{i(p)}^{(s)}$. Тоді $\hat{Q}_{i(p)}^{(s)} = Q_{i(p)}^{(s)}\left(1+\varepsilon_{i(p)}^{(s)}\right)$ $\left(p = \overline{0,s}, i_0 = 0, i_k = \overline{1,N}, k = \overline{1,s} \right)$. Введемо відносні похибки $\gamma_{i(p)}^{(s)}$, що визначаються із співвідношень $\hat{Q}_{i(p)}^{(s)} = \hat{a}_{i(p)} \left(\hat{b}_{i(p)} + \sum_{i_{p+1}=1}^{N} \hat{Q}_{i(p+1)}^{(s)} \right)^{-1} \left(1+\gamma_{i(p)}^{(s)}\right)$ $\left(p = \overline{0,s}, i_0 = 0, i_k = \overline{1,N}, k = \overline{1,s} \right)$, в яких використані точні операції ділення і додавання.

Після нескладних перетворень знаходимо рекурентні формули для відносних похибок $\varepsilon_{i(p)}^{(s)}$

$$\varepsilon_{i(p)}^{(s)} = \left(1+\alpha_{i(p)}\right)\left(1+\gamma_{i(p)}\right)\left(1+\beta_{i(p)} + \sum_{i_{p+1}=1}^{N} g_{i(p+1)}^{(s)}\left(\varepsilon_{i(p+1)}^{(s)} - \beta_{i(p)}\right)\right)^{-1} - 1$$
$$\left(p = \overline{0,s}, i_0 = 0, i_k = \overline{1,N}, k = \overline{1,s} \right), \tag{4}$$

де $g_{i(p+1)}^{(s)} = Q_{i(p+1)}^{(s)} \left(b_{i(p)} + \sum_{i_{p+1}=1}^{N} Q_{i(p+1)}^{(s)} \right)^{-1}$ $\left(p = \overline{0,s}, i_0 = 0, i_k = \overline{1,N}, k = \overline{1,s+1} \right)$. (5)

Зокрема, прийнявши p=0, отримаємо рекурентну формулу для відносної похибки ГЛД (2).

Встановимо параболічні області обчислювальної стійкості ГЛД

$$f^{(s)} = a_0\left(1+\mathop{D}_{k=1}^{s}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1}. \tag{6}$$

Теорема. Нехай $\alpha_{i(k)}$ – відносні похибки обчислення елементів $a_{i(k)}$ ГЛД (6), $\gamma_{i(k)}^{(s)}$ – похибки машинних операцій при обчисленні залишків $Q_{i(k)}^{(s)}$ й існують дійсні сталі α, γ, що

$\left|\alpha_{i(k)}\right| \le \alpha$, $\left|\gamma_{i(k)}^{(s)}\right| \le \gamma$ $\left(k=\overline{0,s}, i_0=0, i_k=\overline{1,N}, k=\overline{1,s}\right)$.

Якщо $a_{i(k)} \ne 0$ і області

$$D_0 = E(\varphi),\ D_{i(k)} = E(\varphi)\cap\left\{z: |z| \le M_{i(k)}\right\} \left(k=\overline{1,s}, i_k=\overline{1,N}, k=\overline{1,s}\right), \tag{7}$$

де

$$E(\varphi)=\left\{z: |z| - Re\left(z\, exp(-2i\varphi)\right) \le \frac{1}{2N}cos^2\varphi\right\}, \tag{8}$$

і $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$, $M_{i(k)}$, $\rho_{i(k)}$ – додатні дійсні числа такі, що

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{N}\rho_{i(k+1)}M_{i(k+1)} \le \left(\frac{cos\varphi}{2}\right)^2\left(1-\frac{(1+\alpha)(1+\gamma)}{1+\rho_{i(k)}}\right)\left(k=\overline{0,s-1}, i_0=0, i_k=\overline{1,N}, k=\overline{1,s-1}\right), \tag{9}$$

$$\alpha+\gamma+\alpha\gamma \le \rho_{i(k)} \left(k=\overline{0,s}, i_0=0, i_k=\overline{1,N}, k=\overline{1,s}\right),$$

є областями елементів ГЛД (6), то для відносних похибок обчислення залишків $a_{i(p)}\left(1+\mathop{D}_{k=p+1}^{s}\sum_{i_k=1}^{N}\dfrac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1}$ справедливі оцінки

$$\left|\varepsilon_{i(p)}^{(s)}\right| \le \rho_{i(p)} \left(p=\overline{0,s}, i_0=0, i_k=\overline{1,N}, k=\overline{1,s}\right). \tag{10}$$

Доведення. Послідовно використовуючи рекурентні співвідношення (4), де $\beta_{i(k)}=0$ $\left(k=\overline{0,s}, i_0=0, i_k=\overline{1,N}, k=\overline{1,s}\right)$, для відносної похибки $\varepsilon_0^{(s)}$ отримуємо формулу

$$\varepsilon_0^{(s)} = \frac{(1+\alpha_0)\left(1+\gamma_0^{(s)}\right)}{1-\sum\limits_{i_1=1}^{N}g_{i(1)}^{(s)}+\mathop{D}\limits_{k=1}^{s}\sum\limits_{i_k=1}^{N}\dfrac{g_{i(k)}^{(s)}\left(1+\alpha_{i(k)}\right)\left(1+\gamma_{i(k)}^{(s)}\right)}{1-\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N}g_{i(k+1)}^{(s)}}}. \tag{11}$$

Для відносних похибок $\varepsilon_{i(p)}^{(s)}$ справедливі оцінки (10), якщо послідовність областей $V'_{i(k)} = \left\{ z: \left| z - g_{i(k)}^{(s)} \right| \le \rho_{i(k)} \left| g_{i(k)}^{(s)} \right| \right\}$ $\left(k = \overline{0, s+1}, i_0 = 0, i_k = \overline{1, N}, k = \overline{1, s+1}, g_0^{(s)} = 1 \right)$ є послідовністю областей значень ГЛД (11). Для цього є необхідним виконання таких умов:

$$\frac{g_{i(k)}^{(s)} \left(1 + \alpha_{i(k)}\right)\left(1 + \gamma_{i(k)}^{(s)}\right)}{1 - \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N} g_{i(k+1)}^{(s)} + \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N} V'_{i(k+1)}} \subseteq V'_{i(k)} \ \left(p = \overline{0, s}, i_0 = 0, i_k = \overline{1, N}, k = \overline{1, s} \right). \quad (12)$$

Умови (12) виконуються, якщо справедливі нерівності

$$\left| 1 - \frac{\left(1 + \alpha_{i(k)}\right)\left(1 + \gamma_{i(k)}^{(s)}\right)}{1 - \left(\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N} \rho_{i(k+1)} \left| g_{i(k+1)}^{(s)} \right| \right)^2} \right| + \frac{\left|1 + \alpha_{i(k)}\right| \left|1 + \gamma_{i(k)}^{(s)}\right| \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N} \rho_{i(k+1)} \left| g_{i(k+1)}^{(s)} \right|}{1 - \left(\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N} \rho_{i(k+1)} \left| g_{i(k+1)}^{(s)} \right| \right)^2} \le \rho_{i(k)} \quad (13)$$

$\left(k = \overline{0, s}, i_0 = 0, i_k = \overline{1, N}, k = \overline{1, s} \right)$, де $\rho_{i(s+1)} = 0$ $\left(i_k = \overline{1, N}, k = \overline{1, s+1} \right)$, причому $\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N} \rho_{i(k+1)} \left| g_{i(k+1)}^{(s)} \right| < 1 \left(k = \overline{0, s}, i_k = \overline{1, N}, k = \overline{1, s} \right)$. Ліві частини співвідношень (13) обмежені зверху величинами $\frac{(1+\alpha)(1+\gamma)}{1 - \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N} \rho_{i(k+1)} \left| g_{i(k+1)}^{(s)} \right|} - 1$. Умови (13) виконуються, якщо

$$\frac{(1+\alpha)(1+\gamma)}{1 - \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N} \rho_{i(k+1)} \left| g_{i(k+1)}^{(s)} \right|} - 1 \le \rho_{i(k)} \ \left(k = \overline{0, s}, i_0 = 0, i_k = \overline{1, N}, k = \overline{1, s} \right), \quad (14)$$

причому $\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N} \rho_{i(k+1)} \left| g_{i(k+1)}^{(s)} \right| < 1$. Із співвідношень (14) отримуємо обмеження

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{N} \rho_{i(k+1)} \left| g_{i(k+1)}^{(s)} \right| \le 1 - \frac{(1+\alpha)(1+\gamma)}{1 + \rho_{i(k)}} \left(k = \overline{0, s-1}, i_0 = 0, i_k = \overline{1, N}, k = \overline{1, s-1} \right),$$
$$\alpha + \gamma + \alpha\gamma \le \rho_{i(k)} \left(k = \overline{0, s}, i_0 = 0, i_k = \overline{1, N}, k = \overline{1, s} \right). \quad (15)$$

З іншого боку, використовуючи формули (5), де $b_{i(k)} = 1$ $\left(k = \overline{0, s}, i_0 = 0, i_k = \overline{1, N}, \right.$ $\left. k = \overline{1, s} \right)$, отримуємо такі оцінки: $\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N} \rho_{i(k+1)} \left| g_{i(k+1)}^{(s)} \right| \le \frac{1}{L_{i(k)}} \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N} \rho_{i(k+1)} \frac{C_{i(k+1)}}{L_{i(k+1)}}$ $\left(k = \overline{0, s-1}, i_0 = 0, i_k = \overline{1, N}, k = \overline{1, s-1} \right)$, де

$$C_{i(k+1)} = \sup_{a_{i(k+1)} \in G_{i(k+1)}} \left| a_{i(k+1)} \right| \left(k = \overline{0, s-1},\, i_k = \overline{1, N},\, k = \overline{1, s} \right),$$

$$L_{i(k)} = \inf_{v_{i(k+1)} \in V_{i(k+1)}} \left| 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} v_{i(k+1)} \right| \left(k = \overline{0,\, s},\, i_0 = 0,\, i_k = \overline{1, N},\, k = \overline{1, s} \right),$$

$G_{i(k+1)}$, $V_{i(k+1)}$ – відповідно області елементів і області значень. Візьмемо за послідовність областей значень ГЛД (6) послідовність півплощин

$$V_{i(k)} = V(\varphi) = \left\{ z\colon Re\left(z \exp(-i\varphi) \right) \ge -\frac{1}{2N} \cos\varphi \right\},$$

тоді області (8) є областями елементів для ГЛД (6) і $\min\limits_{v_{i(k+1)} \in V_{i(k+1)}} \left| 1 + \sum\limits_{i_k=1}^{N} v_{i(k+1)} \right| = \frac{1}{2} \cos\varphi$ $\left(k = \overline{0,\, s},\, i_k = \overline{1, N},\, k = \overline{1, s} \right)$.

Отже,

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{N} \rho_{i(k+1)} \left| g_{i(k+1)}^{(s)} \right| \le \left(\frac{2}{\cos\varphi} \right)^2 \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \rho_{i(k+1)} M_{i(k+1)} \quad \left(k = \overline{0, s-1}, i_k = \overline{1, N}, k = \overline{1, s-1} \right). \quad (16)$$

Враховуючи оцінки (16) і обмеження (15), отримуємо умови (9). Теорему доведено.

1. Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби. К., 1986. 2. Скоробогатько В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. М., 1983. 3. Jones William B., Thron W. J. Continued fractions: Analytic Theory and Applications. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company. 1980.

УДК 517. 968

Возняк Л.С.
Прикарпатський університет ім. В. Стефаника, Ів.-Франківськ

ЧИСЛОВА РЕАЛІЗАЦІЯ ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО МЕТОДУ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЯДРОМ ГІЛЬБЕРТА

Problems of numerical realization of projective-iterative method for linear singular integral equations with Hilbert kernel are investigated in the article. It is given a substantiation of this method, established criteria of existence and uniqueness of the solution, formulated sufficient conditions of convergence of the method and constructed calculating schemes, which are convenient for practical using.