$$C_{i(k+1)} = \sup_{a_{i(k+1)} \in G_{i(k+1)}} \left| a_{i(k+1)} \right| \left(k = \overline{0, s-1},\, i_k = \overline{1, N},\, k = \overline{1, s} \right),$$

$$L_{i(k)} = \inf_{v_{i(k+1)} \in V_{i(k+1)}} \left| 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} v_{i(k+1)} \right| \left(k = \overline{0,\, s},\, i_0 = 0,\, i_k = \overline{1, N},\, k = \overline{1, s} \right),$$

$G_{i(k+1)}$, $V_{i(k+1)}$ – відповідно області елементів і області значень. Візьмемо за послідовність областей значень ГЛД (6) послідовність півплощин

$$V_{i(k)} = V(\varphi) = \left\{ z:\, Re\left(z \exp(-i\varphi) \right) \geq -\frac{1}{2N} \cos\varphi \right\},$$

тоді області (8) є областями елементів для ГЛД (6) і $\min_{v_{i(k+1)} \in V_{i(k+1)}} \left| 1 + \sum_{i_k=1}^{N} v_{i(k+1)} \right| = \frac{1}{2} \cos\varphi$ $\left(k = \overline{0,\, s},\, i_k = \overline{1, N},\, k = \overline{1, s} \right)$.

Отже,

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{N} \rho_{i(k+1)} \left| g_{i(k+1)}^{(s)} \right| \leq \left(\frac{2}{\cos\varphi} \right)^2 \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \rho_{i(k+1)} M_{i(k+1)} \; \left(k = \overline{0, s-1}, i_k = \overline{1, N}, k = \overline{1, s-1} \right). \quad (16)$$

Враховуючи оцінки (16) і обмеження (15), отримуємо умови (9). Теорему доведено.

1. Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби. К., 1986. 2. Скоробогатько В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. М., 1983. 3. Jones William B., Thron W. J. Continued fractions: Analytic Theory and Applications. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company. 1980.

УДК 517. 968

Возняк Л.С.
Прикарпатський університет ім. В. Стефаника, Ів.-Франківськ

ЧИСЛОВА РЕАЛІЗАЦІЯ ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО МЕТОДУ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЯДРОМ ГІЛЬБЕРТА

Problems of numerical realization of projective-iterative method for linear singular integral equations with Hilbert kernel are investigated in the article. It is given a substantiation of this method, established criteria of existence and uniqueness of the solution, formulated sufficient conditions of convergence of the method and constructed calculating schemes, which are convenient for practical using.

У статті досліджується числова реалізація проекційно-ітеративного методу для лінійних сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Гільберта. Дано обґрунтування цього методу, встановлені критерії існування і єдиності розв’язку, сформульовані достатні умови збіжності методу і побудовані зручні для практичного використання обчислювальні схеми.

Розглянемо в дійсному просторі 2π-періодичних функцій $L_2(0,2\pi)$ інтегральне рівняння

$$(Ax)(t) \equiv a(t)x(t) + \frac{b(t)}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)ctg\frac{\tau - t}{2}d\tau + \int_0^{2\pi} k(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \qquad (1)$$

Припустимо, що

- 2π – періодичні функції $a(t)$ і $b(t)$ задовольняють умову Гельдера,

$$a^2(t) + b^2(t) \neq 0 \text{ при } t \in [0,2\pi] \text{ і індекс } \nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\arg\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)} = 0;$$

- функція $f(t)$ є 2π – періодична і належить класу $L_2(0,2\pi)$; лінійний інтегральний оператор $(Ax)(t) = \int_0^{2\pi} k(t,\tau)x(\tau)d\tau$, ядро якого є 2π-періодичною функцією по обох змінних, відображає $L_2(0,2\pi)$ в себе, і є цілком неперервним.

Застосуємо до рівняння (1) відомий [2] метод механічних квадратур. Згідно з цим методом наближені значення $\tilde{x}_i$ шуканої функції $x(t)$, якщо лише вона існує і єдина, в точках $t_i = \dfrac{2i\pi}{2n+1}, i = \overline{0,2n}$ визначаємо з системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$a_i\tilde{x}_i + \frac{b_i h}{2\pi}\sum_{j=0}^{2n}\alpha_{ij}\tilde{x}_j + h\sum_{j=0}^{2n}k_{ij}\tilde{x}_j = f_i \quad i = \overline{0,2n}, \qquad (2)$$

де

$$a_i = a(t_i), b_i = b(t_i), k_{ij} = k(t_i,t_j), f_i = f(t_i), h = \frac{2\pi}{2n+1},$$

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} tg\dfrac{t_i - t_j}{4}, \; якщо \;\; j - i \; - парне, \\ ctg\dfrac{t_j - t_i}{4}, \; якщо \;\; j - i \; - непарне. \end{cases} \qquad (3)$$

Одержану систему (2) розв’яжемо проекційно-ітеративним методом, який можна трактувати як дискретний аналог проекційно-ітеративного методу розв’язування сингулярного інтегрального рівняння.

Запишемо систему (2) у вигляді

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{f}, \qquad (4)$$

де $\widetilde{A}=(a_{ij})_{i,j=0}^{2n}$ – матриця, елементи якої мають вигляд

$$a_{ij}=\begin{cases} a_i+h\left(\dfrac{b_i\alpha_{ij}}{2\pi}+k_{ij}\right), & i=j,\\ h\left(\dfrac{b_i\alpha_{ij}}{2\pi}+k_{ij}\right), & i\neq j,\end{cases}$$

а $\widetilde{x}=(\widetilde{x}_0,\widetilde{x}_2,....,\widetilde{x}_{2n})$ і $\widetilde{f}=(f_0,f_1,....,f_{2n})$ – вектор-стовпці.

Розв’язок системи (4) шукаємо за формулами

$$\widetilde{y}^k=\widetilde{x}^{k-1}+\widetilde{W}^k,\widetilde{W}^k=\sum_{j=1}^{m}a_j^k\widetilde{\varphi}_j\,, \tag{5}$$

$$(\widetilde{f}-\widetilde{A}\widetilde{x}^{k-1}-\widetilde{A}\widetilde{W}^k,\widetilde{\psi}_j)=0, \tag{6}$$

$$\widetilde{x}^k=\widetilde{y}^k+\widetilde{R}(\widetilde{f}-\widetilde{A}\widetilde{y}^k),\ k=1,2,3,..., \tag{7}$$

де $\{\varphi_i\}$ – система лінійно незалежних векторів, $\widetilde{\psi}_i=\widetilde{R}^T\widetilde{\varphi}_i,\ i=\overline{1,m}$, $\widetilde{R}=(r_{ij})_{i,j=0}^{2n}$ – матриця, елементи якої задаються співвідношеннями

$$\mathrm{r_{ij}}=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{a_i}}{\mathrm{a_i^2+b_i^2}}, & \mathrm{i=j},\\ -\dfrac{\mathrm{b_i\alpha_{ij}}}{\mathrm{(2n+1)(a_i^2+b_i^2)}}, & \mathrm{i\neq j},\end{cases} \tag{*}$$

R^T – матриця, транспонована до $\widetilde{R}$; (φ,ψ) – скалярний добуток векторів φ,ψ в R^{2n+1}.

Очевидно, що при $\widetilde{\mathrm{W}}^{\mathrm{k}}\equiv 0,\mathrm{k}=1,2,3,...$ метод (5)-(7) матиме вигляд

$$\widetilde{x}^k=\widetilde{x}^{k-1}+\widetilde{R}(\widetilde{f}-\widetilde{A}\widetilde{x}^{k-1}). \tag{8}$$

Під час реалізації методу на комп’ютері зручно користуватися такою обчислювальною схемою.

Задаємо початкове наближення $\widetilde{x}^0\in R^{2n+1}$ і обчислюємо допоміжні вектори і величини

$$\widetilde{K}_j=\widetilde{A}\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}_i=\widetilde{R}^T\widetilde{\varphi}_i,\widetilde{\varsigma}_j=\widetilde{\varphi}_i-\widetilde{R}\widetilde{K}_j,\widetilde{B}_{ij}=(\widetilde{K}_j,\widetilde{\psi}_i),i,j=\overline{1,m}. \tag{9}$$

Нехай $\widetilde{x}^{k-1}$ наближення вже побудоване. Тоді k-те наближення будуємо так: знаходимо нев’язку

$$\widetilde{\varepsilon}^k=\widetilde{f}-\widetilde{A}\widetilde{x}^{k-1}, \tag{10}$$

обчислюємо скалярний добуток $b_i^k=(\widetilde{\varepsilon}^k,\psi_i)$, складаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{m}B_{ij}a_j^k=b_i^k\,,\ \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{m}} \tag{11}$$

і знаходимо її розв'язок $\{a_j^k\}$, $j = \overline{1,m}$. Обчислюємо далі вектори

$$\tilde{v}^k = \tilde{x}^{k-1} + \tilde{R}\tilde{\varepsilon}^k, \tilde{u}^k = \sum_{j=1}^{m} a_j^k \tilde{\varsigma}_j . \quad (12)$$

Після цього визначаємо k-те наближення за формулою

$$\tilde{x}^k = \tilde{v}^k + \tilde{u}^k . \quad (13)$$

Під час розв'язування допоміжної системи (11) варто матрицю

$$\Lambda_m = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{21} & \dots & B_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mm} \end{pmatrix}$$

представити у вигляді добутку лівої і правої трикутних матриць або ж знайти обернену Λ_m^{-1}.

А.Ю. Лучкою в [3] грунтовно досліджено умови збіжності проекційно-ітеративного методу для рівнянь вигляду $x = f + Tx$, де T лінійний неперервний оператор. Зокрема показано, якщо P і $Q = I - P$ оператори проектування простору X на його підпростір, а $\rho(\cdot)$ – спектральний радіус, то для збіжності проекційно-ітеративного методу достатньо, щоб виконувалась одна із умов

$$\rho(L) = \lim \sqrt[k]{\| L^k \|} < 1; \quad \| L_m \| < 1,$$

де m – деяке фіксоване натуральне число, зокрема $m = 1$, а

$$L = QM \text{, де } M = T(I - PT)^{-1} Q . \quad (14)$$

Застосуємо до рівняння (4) лівий регулятор $\tilde{R}$, де $\tilde{R}$ матриця, елементи якої задаються співвідношеннями (*). У результаті одержимо рівняння

$$\tilde{x} = \tilde{T}\tilde{x} + \tilde{f}_1, \quad (15)$$

де $\tilde{T} = I - \tilde{R}\tilde{A}$, $\tilde{f}_1 = \tilde{R}\tilde{f}$ і алгоритм (5)-(7) наближеного розв'язування рівняння (4) зводиться до проекційно-ітерактивного методу розв'язування рівняння (15) з цілком неперервним оператором, дослідженим в [3].

Справедлива

Теорема 1. Рівняння (4) має єдиний розв'язок $\tilde{x}$ при довільній правій частині $\tilde{f}$ і послідовності і $\{\tilde{y}^k\}\{\tilde{x}^k\}$, побудовані за методом (5)–(7), збігаються до цього розв'язку тоді і тільки тоді, коли виконується умова $\rho(\tilde{L}_m) < 1$.

Нехай $\|\tilde{M}_m\| = p_m$, $\|\tilde{L}_m\| = q_m$, де матриці $\tilde{M}_m$ і $\tilde{L}_m$ є так званими операторами переходу і визначаються із (14). Оскільки достатньою умовою для виконання нерівності $\rho(\tilde{L}_m) < 1$ є умова $q_m < 1$, то справедлива, зокрема,

Теорема 2. Нехай існує єдиний розв'язок системи (11) і $q_m < 1$. Тоді при довільних $\tilde{f}$ і $\tilde{x}^0 \in R^{2n+1}$ наближення, побудовані згідно з алгоритмом (5)-(7), збігаються до єдиного розв'язку системи рівнянь (2).

Як показано в [1] метод (5)-(7) рівносильний алгоритму

$$\tilde{x}^k = \tilde{M}_m \tilde{x}^{k-1} + \tilde{f}_m,$$

і послідовність $\{\tilde{x}^k\}$ збігається в R^{2n+1} до розв’язку рівняння

$$\tilde{x} = \tilde{M}_m \tilde{x} + \tilde{f}_m,$$

якщо $\rho(\tilde{M}_m) < 1$.

Оскільки згідно з [3] $\tilde{M}_m = \tilde{M}_m \tilde{Q}_m$, то

$$\tilde{x} - \tilde{x}^k = \tilde{M}_m \tilde{x} - \tilde{M}_m \tilde{x}^{k-1} = \tilde{M}_m \tilde{Q}_m \tilde{x} - \tilde{M}_m \tilde{Q}_m \tilde{x}^{k-1} = \tilde{M}_m \tilde{v} - \tilde{M}_m \tilde{v}^{k-1}, \quad (16)$$

де $\tilde{Q}_m \tilde{x} = \tilde{v}, \tilde{Q}_m \tilde{x}^k = \tilde{v}^k$. (17)

Подіявши на обидві частини рівняння (16) оператором $\tilde{Q}_m$ і враховуючи (14) та (17), матимемо

$$\tilde{v} - \tilde{v}^k = \tilde{L}_m \tilde{v} - \tilde{L}_m \tilde{v}^{k-1}. \quad (18)$$

Використовуючи співвідношення (16), (18) та методику доведення [3], для послідовних наближень (7) одержимо оцінку

$$\left\|\tilde{x} - \tilde{x}^k\right\| \le p_m q_m^{k-1} \left\|\tilde{x} - \tilde{x}^0 - \tilde{v}\right\|; \quad v = \sum_{i=1}^{m} b_i \tilde{\varphi}_i,$$

де b_i – довільне число, зокрема, його можна визначити із умови мінімуму норми $\left\|\tilde{x} - \tilde{x}^0 - \tilde{v}\right\|$. Зауважимо, що p_m і q_m можна визначити за однією із формул

$$p_m^2 = \sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n}\left|\beta_{ij}^{(m)}\right|^2, \quad q_m^2 = \sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n}\left|\lambda_{ij}^{(m)}\right|^2,$$

$$p_m = \max_i \sum_{j=0}^{2n}\left|\beta_{ij}^{(m)}\right|, \quad q_m = \max_i \sum_{j=0}^{2n}\left|\lambda_{ij}^{(m)}\right|,$$

$$p_m = \max_j \sum_{i=0}^{2n}\left|\beta_{ij}^{(m)}\right|, \quad q_m = \max_j \sum_{i=0}^{2n}\left|\lambda_{ij}^{(m)}\right|,$$

де $\beta_{ij}^m, \lambda_{ij}^m, i, j = \overline{0,2n}$ – елементи матриць переходу відповідно $\tilde{M}_m$ і $\tilde{L}_m$.

1. Возняк Л.С. Применение проекционно-интеративных методов к сингулярным интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям. Ивано-Франковск, 1996. 2. Габдулхаев Б.Г. Квадратурно-итерационный метод решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений // Изв. вузов. Математика. 1974. № 11. С.4–15. 3. Лучка А.Ю. Проекционно-интеративные методы. К., 1993.