УДК 517.5

Гаврилів О.С.
НУ “Львівська політехніка”, кафедра прикладної математики

ДО ПИТАННЯ ЗОБРАЖЕННЯ РЯДОМ ТЕЙЛОРА ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД КУЛЬОВИХ ФУНКЦІЙ НА АБСТРАКТНОМУ ВІНЕРІВСЬКОМУ ПРОСТОРІ

Struction of multiple H-differentionalility in abstract Wiener space is presented in the paper. Connection between base elements of this structure is settled. Formulas of presentation by means of Taylor's row adequate number of H-differentionalility sphere function are given. Also there is a presentation of H-differentionalility functions in terms of spherical functions when necessary approximated.

У роботі встановлюється структура кратної H-диференційовності в абстрактному вінерівському просторі. З'ясовуються залежність між опорними елементами структури та формула подання рядом Тейлора H-диференційовної кульової функції. Подається зображення довільної H-диференційовної функції через кульові функції при належному наближенні.

Нехай F – відображення, що діє з банахового простору B в R, визначене у деякій відкритій області $O \subset B$ і таке, що похідна Фреше $F^{(n)}(x)$ існує і є рівномірно неперервною функцією від x в O.

Назвемо $F(\cdot)$ кульовою функцією, якщо $\|F(x)\| = const$ при $\|x\| = const$.

На основі банахового простору B процедурою [1] побудуємо абстрактний вінерівський простір (i, H, B), $H \subset B$ так, щоб $O \subset H$. Канонічна білінійна форма $(\cdot,\cdot)$ у B отже, звузиться до скалярного добутку $\langle \cdot,\cdot \rangle$ в гільбертовому H. Отже, диференційовність за Фреше неперервно перетвориться у H-диференційовність в сенсі абстрактних вінерівських просторів [1], і H-похідна $DF(x)$ буде лінійним відображенням із B в R, $DF(x) \in L(B,R)$. Простору $L(B,R)$ в межах структури абстрактних вінерівських просторів відповідає простір лінійних операторів $L(H,R)$.

$L(B,R)$ є лінійним нормованим повним простором в силу повноти R [2,8], і на його базі будуємо процедурою [1] абстрактний вінерівський простір $(i_*, H_{*1}, L(B,R))$, який будемо називати вторинним абстрактним вінерівським простором H-диференційовності.

Лема 1. Для k-разів H-диференційовної функції існує k-й абстрактний вінерівський простір $\left(i^0_{*k}, H^0_{*k}, L^0\left(B, L\left(B, L\left(B, ..., L(B,R)\right)\right)\right)...\right)$ з k-ю абстрактною вінерівською мірою p_{t*k}, причому має місце ланцюжок $L^0(B,R) \supset L^0(B, L(B,R)) \supset ..., H^0_{*1} \supset H^0_{*2} \supset ... \supset H^0_{*k}$, де H^0_{*j}, $L^0(B, L(B,...,L(B,R))...)$; $j \equiv \overline{1,k}$ – ізоморфні просторам H_{*j}, $L(B, L(B, L(B,...,L(B,R)))...)$, але $H^0_{*i} \subset H$, $L^0(B, L(B, L(B,...,L(B,R)))...) \subset B$.

Доведення. Для H-похідної $D^k F(x)$ існування абстрактного вінерівського простору $(i_{*j}, H_{*j}, L(B, L(B,...,(B,R)))...)$, $j \equiv 1,k$ та міри p_{t*k} випливає безпосередньо із схеми побудови вторинного абстрактного вінерівського простору та повністю доводиться на основі методу математичної індукції і для $j \to \infty$, якщо врахувати, що, на основі повноти $L(B,R)$ банаховим буде і $L(B, L(B,R))$, і те, що норму в гільбертовому H_{*1} запроваджуємо на основі скалярного добутку в H_{*1}.

Отже, усі норми в H_{*k} запроваджуємо на основі скалярних добутків в H_{*k}.

Ланцюжок належностей можемо вважати доведеним на основі результатів [1,3,7], факту $B^* \subset B$ [1,2] та враховуючи те, що для визначеності $D^k F(x)$ необхідною є визначеність $D^{k-1}F(x)$, тобто область визначення $D^k F(x)$ не може бути ширшою від області визначення $D^{k-1}F(x)$ [8].

Лему доведено.

Розглянемо H-диференційовність функції $F(x)$, і нехай $F^{(k)}(x) \equiv D^k F(x)$.

Теорема. Кожну кульову k -разів H-диференційовну скалярнозначну функцію $F(x)$, задану на банаховому просторі B, можна подати у вигляді $F^*(x+h)$:

$$F^*(x+h) = F(x) + \|F'(\cdot)\| \cdot \|h\|_B \cdot \operatorname{sgn}[F'(x)h] + \frac{1}{2!}\|F''(\cdot)\| \cdot \|h\|_B^2 \cdot sgh[F''(x)(h,h)] + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{k!}\left\|F^{(k)}(\cdot)\right\| \cdot \|h\|_B^k \cdot \operatorname{sgn}\left[F^{(k)}(x)\left(h, \overset{(k)}{\ldots}, h\right)\right] + o\left(\|h\|_B^k\right),$$

де $\left\|F^{(j)}(\cdot)\right\|$, $j \equiv 1,k$ є нормою в банаховому просторі $L(B, L(B,..., L(B,R))...)$, $\|h\|_B$ – норма у B.

Доведення. Відповідно до означення для кожної кульової функції $F(\cdot)$ виконується $\|F(x)\| = \|F(\cdot)\|$ при $\|x\| = 1$.

Оцінимо різницю між розглядуваною $F(x)$ і $F^*(x)$

$$\left|\Delta\left(F(x) - F^*(x)\right)\right| = \left|F(x+h) - F^*(x+h)\right| \le \left|F'(x)h - \|F'(\cdot)\| \cdot \|h\|_B \cdot \operatorname{sgn}[F'(x)h]\right| +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left|F''(x)(h,h) - \|F''(\cdot)\| \cdot \|h\|_B^2 \cdot \operatorname{sgn}[F''(x)(h,h)]\right| + \ldots + \frac{1}{k!}\left|F^{(k)}(x)\left(h, \overset{(k)}{\ldots}, h\right) - \left\|F^{(k)}(\cdot)\right\| \times\right.$$

$$\left.\times \|h\|_B^k \cdot sgh\left[F^{(k)}(x)\left(h, \overset{(k)}{\ldots}, h\right)\right]\right| + o\left(\|h\|_B^k\right) = \|h\|_B \left|F'(x)\frac{h}{\|h\|_B} - \|F'(\cdot)\| \operatorname{sgn}[F'(x)h]\right| + \qquad (1)$$

$$+ \frac{\|h\|_B^2}{2!}\left|F''(x)\left(\frac{h}{\|h\|_B}, \frac{h}{\|h\|_B}\right) - \|F''(\cdot)\| \operatorname{sgn}[F''(x)(h,h)]\right| + \ldots + \frac{\|h\|_B^k}{h}\left|F^{(k)}(x)\left(\frac{h}{\|h\|_B}, \overset{(k)}{\ldots}, \frac{h}{\|h\|_B}\right) - \right.$$

$$\left.- \left\|F^{(k)}(\cdot)\right\| \operatorname{sgn}\left[F^{(k)}(x)\left(h, \overset{(k)}{\ldots}, h\right)\right]\right| + o\left(\|h\|_B^k\right) = o\left(\|h\|_B^k\right).$$

Оскільки $\left(h, \overset{(k)}{\ldots}, h\right)$ – полілінійна форма

$$\left\|F^{(k)}(\cdot)\right\| \operatorname{sgn}\left[F^{(k)}(x)\left(h, \overset{(k)}{\ldots}, h\right)\right] \equiv F^{(k)}(x)\left(\frac{h}{\|h\|_B}, \overset{(k)}{\ldots}, \frac{h}{\|h\|_B}\right).$$

З причини довільності k можемо зробити висновок, що $\left|\Delta\left(F(x) - F^*(x)\right)\right| = 0$.

Теорему доведено.

Наслідок. Кожну скалярнозначну функцію, задану на банаховому просторі, можна, при достатньо малих відхиленнях за нормою $\|h\|_B$ аргументу h, подати через кульові функції.

Доведення. Можливість винесення $\|h\|_B$ в $\left|\Delta\left(F(x) - F^*(x)\right)\right|$ за (1) означає, що при $\|h\|_B \to 0$ скалярнозначна функція $F(x)$, задана на банаховому просторі, є еквівалентною функції F^{*1} з кульовою частиною , де

$$F^{*1}(x+h) = F(x) + \|F'(\cdot)\| \cdot \|h\|_B \operatorname{sgn}[F'(x)h] + \frac{1}{2!}\|F''(\cdot)\| \cdot \|h\|_B^2 \operatorname{sgn}[F''(x)(h,h)] + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{k!}\left\|F^{(k)}(\cdot)\right\| \cdot \|h\|_B^k \operatorname{sgn}\left[F^{(k)}(x)\left(h, \overset{(k)}{\ldots}, h\right)\right] + o\left(\|h\|_B^k\right),$$

причому $\left(F^{*1}(x+h) - F(x)\right)$ є кульовою функцією, необмежено наближеною до $\left(F(x+h) - F(x)\right)$.

Наслідок доведено.

1. Го Х.-С. Гауссовские меры в банаховых пространствах. М., 1979. 2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1981. 3. Березанский Ю.М., Кондратьев Ю.Г. Спектральные методы в бесконечномерном анализе. К., 1988. 4. Лопушанський О.В. Локально опуклі алгебри. В 2-х ч. / Препринт № 4-93, 5-93. Львів, 1993. 5. Radyno Ya.V., Tuzik S.A. On Borel's theorem for infinitly differentiable functions from normed space into Banach one // Docl. Acad. Sci. Russia. 1995. 343, № 3. P. 309–311. 6. Radyno Ya.V., Guletskaja O.I. To the theory of generalized functions of operators // Vesti Acad. Sci. Belarus. 1995. № 2. P.23–27. 7. Гаврилів О.С. Деякі питання використовності узагальнених функцій в теорії ймовірностей // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". 1999. № 364. С.3-17. 8. Функциональный анализ / Под ред. С.Г.Крейка. М., 1972. 9. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. 1963. 18. № 6. С.91–192.