

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЯКІ ОПИСУЮТЬ КВАЗІУСТАЛЕНЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ У ФЕРОМАГНІТНИХ ТІЛАХ¹

© Гачкевич О., Дзюбачик О., Івасько Р., Касперський З., Солодяк М., 2000

Boundary problems for characteristics of quasisteady electromagnetic field in ferromagnetic solids described by quasilinear parabolic differential equations are formulated.

Сформульовано граничні задачі для характеристик квазіусталеного електромагнітного поля у ферромагнітних тілах, які описуються квазілінійними диференціальними рівняннями параболічного типу.

Розглянемо електропровідне ізотропне тверде тіло, область якого $\Omega \subset \mathcal{R}^3$ обмежена поверхнею S , не містить сторонніх зарядів і струмів. Тіло піддане дії зовнішнього квазіусталеного електромагнітного поля (КУЕМП) радіочастотного діапазону з амплітудною модуляцією (АМ) [6], заданого значенням на поверхні S вектора напруженості магнітного поля [5]

$$\vec{H}(\vec{r}_0, t) = \vec{H}_0^*(\vec{r}_0, t) \cos(\omega t + \psi_H) \equiv \operatorname{Re} \vec{H}_{*0}(\vec{r}_0, t) \quad (1)$$

або електричного поля

$$\vec{E}(\vec{r}_0, t) = \vec{E}_0^*(\vec{r}_0, t) \cos(\omega t + \psi_E) \equiv \operatorname{Re} \vec{E}_{*0}(\vec{r}_0, t). \quad (2)$$

У залежностях (1), (2) ψ_H , ψ_E – початкові фази, \vec{r}_0 – радіус-вектор поверхні S

$$\begin{aligned} \vec{H}_{*0}(\vec{r}_0, t) &= \vec{H}_0^*(\vec{r}_0, t) e^{i(\omega t + \psi_H)} \equiv \underline{\vec{H}}_0(\vec{r}_0, t) e^{i\omega t}, \\ \vec{E}_{*0}(\vec{r}_0, t) &= \vec{E}_0^*(\vec{r}_0, t) e^{i(\omega t + \psi_E)} \equiv \underline{\vec{E}}_0(\vec{r}_0, t) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3)$$

– комплексні вектори напруженостей магнітного і електричного поля

$$\underline{\vec{H}}_0(\vec{r}_0, t) = \vec{H}_0^*(\vec{r}_0, t) e^{i\psi_H}, \quad \underline{\vec{E}}_0(\vec{r}_0, t) = \vec{E}_0^*(\vec{r}_0, t) e^{i\psi_E}; \quad (4)$$

– комплексні модульовані амплітуди (функції, що мало змінюються за період електромагнітних коливань $\tau_* = \frac{2\pi}{\omega}$), які задовольняють умови [5]

$$\left| \frac{\partial f(\vec{r}_0, t)}{\partial t} \right| \ll \omega |f(\vec{r}_0, t)|, \quad t > 0; \quad f(\vec{r}_0, t) = \{ \underline{\vec{H}}_0(\vec{r}_0, t); \underline{\vec{E}}_0(\vec{r}_0, t) \}. \quad (5)$$

У технічних застосуваннях функції $\vec{H}_0^*(\vec{r}_0, t)$, $\vec{E}_0^*(\vec{r}_0, t)$ часто приймають у вигляді [5]

$$\vec{H}_0^*(\vec{r}_0, t) = H(\vartheta) \vec{H}_0(\vec{r}_0), \quad \vec{E}_0^*(\vec{r}_0, t) = E(\vartheta) \vec{E}_0(\vec{r}_0). \quad (6)$$

¹ Матеріали роботи – це результат наукової співпраці між Політехнікою Опольською (Польща) та Інститутом прикладних проблем механіки і математики НАН України

Тоді умови (5) записуються як

$$\left| \frac{df(t)}{dt} \right| \ll \omega |f(t)|, \quad t > 0; \quad f(t) = \{H(t); E(t)\}. \quad (7)$$

Розглянемо задачу про визначення параметрів, що описують при такій дії електромагнітне поле (ЕМП) в області Ω феромагнітного тіла, для якого поляризація, а також електромеханічні, термоелектричні і магнітострикційні ефекти є неістотними [2]. Обмежимося температурами, меншими від точки Кюрі [1], при яких діелектрична ϵ і магнітна μ проникності практично не залежать від температури [3]. Ці величини, а також коефіцієнт електропровідності σ приймаємо сталими.

ЕМП у розглядуваному феромагнітному середовищі описується шістьма параметрами [1]:

$\vec{E}(\vec{x}, t)$, $\vec{H}(\vec{x}, t)$ – векторами напруженостей електричного і магнітного поля;

$\vec{D}(\vec{x}, t)$, $\vec{B}(\vec{x}, t)$ – індукціями (зміщеннями) електричною і магнітною;

$\vec{j}(\vec{x}, t)$ – густиною струму;

$\Omega_*(\vec{x}, t)$ – об'ємною густиною електричного заряду. Ці параметри є пов'язані

відомими рівняннями електродинаміки – рівняннями Максвелла [1, 6]

$$\operatorname{div} \vec{D} = \Omega_*, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8)$$

де $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} = \vec{j}$ – густина повного струму.

Система рівнянь (8) є недоозначеною. З третього рівняння системи можна виразити функцію Ω_* через задану електричну індукцію \vec{D} . Тому незалежні перші два рівняння потрібно доповнити фізичними рівняннями (конститутивними чи матеріальними зв'язками), які пов'язують в середовищі параметри ЕМП між собою. Для феромагнітних тіл залежності, що пов'язують вектори напруженості та індукції електричного поля, приймають такими самими, як для лінійних тіл [7], тобто

$$\vec{D} = \underline{\epsilon} \vec{E} \equiv \epsilon_0 \epsilon_* \vec{E}, \quad (9)$$

а закон Ома – у вигляді

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (10)$$

У наведених залежностях $\underline{\epsilon}$ – стала діелектрична проникність тіла, $\epsilon_* = \epsilon_0^{-1} \underline{\epsilon}$ – відносна діелектрична проникність. Для середовищ, здатних до намагнічення, зв'язок між індукцією \vec{B} і напруженістю магнітного поля \vec{H} має вигляд [1, 7]

$$\vec{B} = \mu_0 [\vec{H} + \vec{M}(\vec{H})], \quad (11)$$

де \vec{M} – вектор намагнічення. Приймаємо, що для розглядуваних середовищ вектор \vec{M} є паралельним до вектора \vec{H} [5, 7]. Тоді залежність (11) можна записати як

$$\vec{B} = \mu_0 [1 + \chi_h(H)] \vec{H}. \quad (12)$$

У співвідношенні (12) через χ_h позначено відносну магнітну сприйнятливість середовища. При цьому

$$\vec{B} = B(H) \vec{e}_H, \quad (13)$$

де $\vec{e}_H = \vec{H}/H$ – одиничний вектор в напрямку вектора \vec{H} ; H , B – проекції відповідно

векторів \vec{H} і \vec{B} на додатний напрям вектора \vec{H} . Залежність (13) можна подати також у вигляді

$$\vec{B} = \mu(H)\vec{H}. \quad (14)$$

Тут

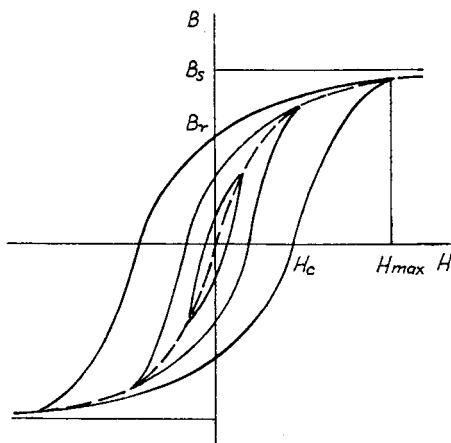
$$\mu(H) = B(H)/H = \mu_0[1 + \chi_H(H)] \equiv \mu_0\mu_r(H) \quad (15)$$

є абсолютною магнітною проникністю, а

$$\mu_r(H) = 1 + \chi_H(H) \quad (16)$$

– відповідною відносною проникністю.

Точне аналітичне описання характерної для феромагнітних матеріалів нелінійної залежності між \vec{B} і \vec{H} є практично неможливим [2]. Подамо аналітичне наближення такої залежності через апроксимацію кривих намагнічення, використовуючи відомі експериментальні результати, що стосуються процесів намагнічення [2]. За здатністю до намагнічення феромагнітні матеріали діляться на магнітом'які і магнітотверді [2]. Характерною особливістю магнітом'яких матеріалів (чисте залізо, електротехнічні сталі, сплави заліза з вуглецем, пермалой тощо) є їх здатність намагнічуватись до насичення навіть при малих



Множина петель гістерезису при різних значеннях амплітуди магнітного поля

напруженостях магнітного поля. При циклічному перемагніченні крива намагнічення є динамічною петлею гістерезису [2]. Типова множина таких кривих при різних значеннях амплітуди магнітного поля показана на рисунку. Петлю гістерезису при насиченні називають граничною петлею. Множина вершин симетричних петель гістерезису, отриманих при циклічному перемагніченні, утворює основну криву намагнічення. На практиці в залежності $B = B(H)$ вимірюють характеристики B_s , B_r , H_c , H_{max} (див. рисунок) і, відповідно, μ_p і μ_m [2], де B_s – індукція насичення, B_r – залишкова

індукція, H_c – коерцитивна сила, H_{max} – характерне значення напруженості магнітного поля при намагніченні насичення, μ_p – початкова відносна магнітна проникність, μ_m – максимальна відносна магнітна проникність.

У різних електротехнічних застосуваннях приймають, що для магнітом'яких матеріалів петля гістерезису практично збігається з основною кривою намагнічення (малі втрати на перемагнічення – $H_c < 800 \text{ \AA}/\hat{i}$). Аналітичним виразом зв'язку $B = B(H)$ для таких матеріалів, який якнайточніше описує характер експериментальної залежності і враховує можливість насичення, є апроксимація [4]

$$B = \mu_0 H + \beta \arctg \alpha H, \quad (17)$$

де $\beta = 2\pi^{-1}B_s$, $\alpha = (\mu_p - 1)\mu_0\beta^{-1}$. Для малих значень напруженості магнітного поля і великих частот (коли петля гістерезису є еліпсом) основна крива намагнічення вироджується в пряму лінію (з кутовим коефіцієнтом $\text{tg}\alpha_* = \mu_0\mu_p$).

Для магнітотвердих матеріалів (високовуглецеві і мартенситні сталі, матеріали на основі сплавів Fe-Ni-Al тощо) є характерні значні втрати при перемагніченні. Такі матеріали мають велике значення коерцитивної сили H_c і залишкової індукції B_s [2]. Це означає, що петля гістерезису для магнітотвердих матеріалів є широка. При періодичній (в часі) напруженості магнітного поля

$$H = A \cos \omega t + C \sin \omega t \quad (H = A^* \cos(\omega t + \psi_h))$$

її наближений аналітичний вигляд можна подати як [4, 5]

$$B = B(H), \quad (18)$$

де $H = \sqrt{1 - \chi_0^2} H - \frac{\chi_0}{\omega} \frac{\partial H}{\partial t}$; $\chi_0 = H_c / H_{max}$ для $H_0 \leq H_{max}$ і $\chi_0 = H_c / H_0$ для $H_0 > H_{max}$, а функція $B(H)$ є описана рівнянням (17), тобто

$$B(H) = \mu_0 H + \beta \arctg \alpha H. \quad (19)$$

Відзначимо, що при гармонічній напруженості магнітного поля частоти $m\omega$, $m \in N$, петлю гістерезису опишемо рівнянням

$$\begin{aligned} H &= A_* \cos m\omega t + C_* \sin m\omega t, \\ B &= B(H_*), \end{aligned} \quad (20)$$

де

$$H_* = \sqrt{1 - \chi_0^2} H - \frac{\chi_0}{m\omega} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (21)$$

а функцію $B(H_*)$ – рівнянням (19) при $H = H_*$. При $\chi_0 = 0$ наведені вище залежності є рівняннями основної кривої намагнічення, тобто функції $\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$ для магнітом'яких матеріалів. У залежностях (18), (21) і нижче символ частинної похідної $\frac{\partial}{\partial t}$ вживається з огляду на те, що в загальному випадку коефіцієнти A , A_* , C , C_* можуть бути векторними амплітудами - функціями просторових змінних, тобто $A \equiv \vec{A}(\vec{r})$, $C \equiv \vec{C}(\vec{r})$; $A_* \equiv \vec{A}_*(\vec{r})$, $C_* \equiv \vec{C}_*(\vec{r})$.

Припустимо, що залежності (17)–(20) виконуються для квазіусталеного наближення (мала зміна амплітуд індукції і напруженості магнітного поля за період електромагнітних коливань τ_* [5]). Тоді для еліптичної петлі гістерезису з урахуванням умови (5), яка визначає квазіусталену напруженість магнітного поля, наближено отримаємо

$$\vec{H}(t) = h(t) \vec{e}_H, \quad \vec{B}(t) = B(H) \vec{e}_H. \quad (22)$$

У залежностях (22)

$$h(t) = A(t) \cos \omega t + C(t) \sin \omega t; \quad (23)$$

$$B(H) = \mu_0 \mu_p H, \quad (24)$$

$$H(t) = \sqrt{1 - \chi_0^2} h - \frac{\chi_0}{\omega} \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (25)$$

У виразі (25) враховано умову (5) і умову на описану формулою (23) функцію $h(t)$:

$$\frac{\partial h(t)}{\partial t} \sim \omega h(t).$$

Для майже гармонічної напруженості з частотою $m\omega$, вигляд еліптичної петлі гістерезису буде описаний формулами (22), (24) при

$$h(t) = A_*(t)\cos m\omega t + C_*(t)\sin m\omega t, \\ \underline{H} \equiv \underline{H}_*(t) = \sqrt{1-\chi_0^2}h - \frac{\chi_0}{m\omega} \frac{\partial h}{\partial t}, \quad m = \overline{1, \infty}. \quad (26)$$

У випадку, коли функцію $h(t)$ можна подати у вигляді, подібному до (6), (7), тобто

$$h(t) = H(t)h_*(t), \quad (27)$$

де $H(t)$ є описана формулами (6), (7), а

$$h_*(t) = A\cos\omega t + C\sin\omega t, \quad (28)$$

враховуючи (7), наближено отримаємо

$$\vec{H}(t) \equiv H(t)\vec{e}_H = H(t)h_*(t)\vec{e}_H \\ \vec{B}(t) = B(\underline{H}_*)\vec{e}_H. \quad (29)$$

У виразах (29)

$$B(\underline{H}_*) = \mu_0\mu_p\underline{H}_*, \quad (30)$$

$$\underline{H}_*(t) = \sqrt{1-\chi_0^2}H - \frac{\chi_0}{\omega} \frac{\partial H}{\partial t} \approx H(t) \left[\sqrt{1-\chi_0^2}h_* - \frac{\chi_0}{\omega} \frac{\partial h_*}{\partial t} \right]. \quad (31)$$

Для напруженості магнітного поля з частотою $m\omega$ вигляд еліптичної петлі гістерезису буде окреслений за допомогою виразів (29), (30) при

$$h_*(t) = A_*\cos m\omega t + C_*\sin m\omega t, \\ \underline{H} \equiv \underline{H}_*(t) = \sqrt{1-\chi_0^2}H - \frac{\chi_0}{m\omega} \frac{\partial H}{\partial t} \approx H(t) \left[\sqrt{1-\chi_0^2}h_* - \frac{\chi_0}{m\omega} \frac{\partial h_*}{\partial t} \right], \quad m = \overline{1, \infty}. \quad (32)$$

Для магнітотвердого матеріалу при нелінійній основній кривій намагнічення $B(H)$, описаній залежністю (17), аналітичний вираз петлі гістерезису задається формулою (22) при $h(t)$ і $\underline{H}(t)$, окреслених формулами (23), (25) і

$$B(\underline{H}) = \mu_0\underline{H} + \beta \arctg \underline{H}. \quad (33)$$

У випадку майже гармонічної напруженості магнітного поля з частотою $m\omega$, аналітичний вираз петлі гістерезису є описаний залежностями (22), (26), (33).

Для $\chi_0 = 0$ залежності (22), (23), (33) описують в КУЕМП основну криву намагнічення, тобто функцію $\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$ для магнітом'яких матеріалів. Відзначимо, що функція $H(t)$ є малозмінною функцією часу і при описанні характеристик ЕМП для кожного періоду її приймають сталою.

Для розглядуваних початково ненамагнічених електропровідних феромагнітних тіл об'ємна густина електричних зарядів в тілі при дії КУЕМП дорівнює нулю у довільний момент часу [1, 5], тобто $\Omega_*(t) \equiv 0$. Струмами зміщення в області тіла звичайно нехтують, оскільки вони є малі порівняно зі струмами провідності [1]. У такому наближенні рівняння (8) набувають вигляду

$$\text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E}, \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{H})}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{E} = 0. \quad (34)$$

Рівняння $\text{div} \vec{E} = 0$ і рівняння $\text{div} \vec{B} = 0$, яке звичайно приєднують до системи (34), не є незалежними. Їх можна отримати з перших двох рівнянь, діючи на них оператором div

і враховуючи, що $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} \equiv 0$, $\vec{a} = \{\vec{H}; \vec{E}\}$ і довільне початкове магнітне поле (стаціонарне) задовольняє умову $\operatorname{div} B|_{t=0} = 0$. Наведені незалежні рівняння можуть бути перетворені до залежностей [1, 5]

$$\Delta \vec{H} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \sigma \frac{\partial \vec{B}(\vec{H})}{\partial t} = 0, \quad \vec{E} = \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \vec{H}. \quad (35)$$

Отже, визначення майже періодичних у часі складових напруженостей магнітного поля, якими є квазіусталені напруженості магнітного поля, зводиться до знаходження майже періодичних розв'язків системи рівнянь

$$\begin{aligned} \Delta \vec{H} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \sigma \frac{\partial \vec{B}(\vec{H})}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B}(\vec{H}) = 0, \\ \vec{B}(\vec{H}) = \frac{B(H)}{H} \cdot \vec{H}, \end{aligned} \quad (36)$$

яка з врахуванням конкретної аналітичної залежності $\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$ для матеріалу чи характеру пульсації, окреслених відповідними виразами з (17)–(33), є системою квазілінійних диференціальних рівнянь. При цьому рівняння $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ вже не впливає з першого рівняння за відсутності відповідної початкової умови в квазіусталеному наближенні і є незалежним рівнянням системи.

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред*. М., 1959. 2. Мишин Д.Д. *Магнитные материалы*. М., 1991. 3. Сычев В.В. *Сложные термодинамические системы*. М., 1980. 4. Gachkevich A.R., Kaspers'kii Z., Solodyak M.T. and Terlets'kii R.F.: *Mathematical modelling and optimization of the physico-mechanical processes in electrically conducting bodies due to a quasisteady electromagnetic fields: J. of Math. Sci.* 88. No 3 (1998), 380–385. 5. Gaczkiewicz A., Kasperski Z.: *Modele i metody matematyczne w zagadnieniach brzegowych termomechaniki ciał przewodzących*. OWPO, Opole, 1999. 6. Holliday D., Resnick R.: *Фізика 2 (Т.2)*. PWN, Warszawa, 1994. 7. Rawa H.: *Elektryczność i magnetyzm w technice*. PWN, Warszawa, 1994.

УДК 517.9:538.3

Гачкевич О., Дзюбачик О., Івасько Р., Касперський З.*, Солодяк М.
ІППИМ НАН України
*Політехніка Опольська, Польща

ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЕВНОЇ НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ¹

© Гачкевич О., Дзюбачик О., Івасько Р., Касперський З., Солодяк М., 2000

Iteration procedure for determination quasiperiodical in time solutions of boundary-value problems described by nonlinear parabolic differential equations is proposed.

¹ Матеріали роботи – це результат наукової співпраці між Політехнікою Опольською (Польща) й Інститутом прикладних проблем механіки і математики НАН України.