1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., 1959. 2. Gachkevich A. R., Kaspers'kii Z., Solodyak M. T. and Terlets'kii R. F.: Mathematical modelling and optimization of the physico-mechanical processes in electrically conducting bodies due to a quasisteady electromagnetic fields: J. of Math. Sci. 88 No 3 (1998), 380–385. 3. Gaczkiewicz A., Kasperski Z.: Modele i metody matematyczne w zagadnieniach brzegowych termomechaniki ciał przewodzących. OWPO, Opole, 1999. 4. Rawa H.: Elektryczność i magnetyzm w technice. PWN, Warszawa, 1994.

УДК 517.524

Гоєнко Н.П.
ІППММ НАН України

АЛГОРИТМИ РОЗВИНЕННЯ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЛАУРІЧЕЛЛИ У ГІЛЛЯСТІ ЛАНЦЮГОВІ ДРОБИ

Determinated the new recursion relations for the Lauricella hypergeometric functions on the base of which the expansion of the ratios these functions into branched continued fractions was costracted.

Встановлено нові рекурентні співвідношення для гіпергеометричних функцій Лаурічелли, на основі яких побудовано розвинення відношень цих функцій у гіллясті ланцюгові дроби.

Гіпергеометричні функції Лаурічелли є узагальненням гіпергеометричної функції Гаусса, у випадку N змінних. Розглянемо гіпергеометричну функцію Лаурічелли $F_D^{(N)}$:

$$F_D^{(N)}(a,b_1,\ldots,b_N;c;z_1,\ldots,z_N)=\sum_{k_1,\ldots,k_N=0}^{\infty}\frac{(a)_{k_1+\ldots+k_N}(b_1)_{k_1}\ldots(b_N)_{k_N}}{(c)_{k_1+\ldots+k_N}}\frac{z_1^{k_1}\ldots z_N^{k_N}}{k_1!\ldots k_N!},$$

де a, $b_1,\ldots,b_N$, c – комплексні сталі, причому $c\neq 0,-1,-2,\ldots$; $z_1,\ldots,z_N$ – комплексні змінні; $(\alpha)_k=\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)$ – символ Похгаммера, якщо $k\geq 1,(\alpha)_0=1$.

Лема 1. Гіпергеометрична функція Лаурічелли $F_D^{(N)}$ задовольняє рекурентне співвідношення

$$F_D^{(N)}(a,\bar{b};c;z)=\left(1-\frac{a+1}{c}z_k-\sum_{i=1}^{N}\frac{b_i}{c}z_i\right)F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_k;c+1;z)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{(a+1)(b_i+\delta_k^i)}{c(c+1)}z_i(1-z_i)F_D^{(N)}(a+2,\bar{b}+\bar{e}_k+\bar{e}_i;c+2;z),\ k=\overline{1,N}, \tag{1}$$

де $\bar{b}=(b_{1,\ldots,}b_N),z=(z_{1,\ldots,}z_N),\bar{e}_i=(\delta_1^i,\ldots,\delta_N^i),i=\overline{1,N},\delta_j^i$ – символ Кронекера.

Доведення. У роботі [1] наведено такі рекурентні співвідношення:

$$F_D^{(N)}(a,\bar{b};c;z) = F_D^{(N)}(a,\bar{b}+\bar{e}_k;c;z) - \frac{a}{c} z_k F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_k;c+1;z),\ k=\overline{1,N}, \quad (2)$$

$$F_D^{(N)}(a,\bar{b};c;z) = \frac{c-a}{c} F_D^{(N)}(a,\bar{b};c+1;z) + \frac{a}{c} F_D^{(N)}(a+1,\bar{b};c+1;z), \quad (3)$$

$$F_D^{(N)}(a,\bar{b};c;z) = F_D^{(N)}(a+1,\bar{b};c;z) - \sum_{i=1}^{N} \frac{b_i}{c} z_i F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_i;c+1;z). \quad (4)$$

У співвідношенні (4) замінимо параметр c на $c+1$. Виразимо із отриманого співвідношення функцію $F_D^{(N)}(a+1,\bar{b};c+1;z)$ і підставимо її у формулу (3). Одержимо

$$F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_k;c;z) = F_D^{(N)}(a,\bar{b};c+1;z) +$$
$$+\sum_{i=1}^{N} \frac{ab_i}{c(c+1)} z_i F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_i;c+2;z), k=\overline{1,N}. \quad (5)$$

Замінимо у співвідношенні (5) $a,\bar{b}$ на $a+1,\bar{b}+\bar{e}_k$, відповідно:

$$F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_k;c;z) = F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_k;c+1;z) +$$
$$+\sum_{i=1}^{N} \frac{(a+1)(b_i+\delta_k^i)}{c(c+1)} z_i F_D^{(N)}(a+2,\bar{b}+\bar{e}_k+\bar{e}_i;c+2;z),\ k=\overline{1,N}. \quad (6)$$

Знайдемо функцію $F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_k;c;z)$ із формули (4), в якій $\bar{b}$ замінено на $\bar{b}+\bar{e}_k$.

$$F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_k;c;z) = F_D^{(N)}(a,\bar{b}+\bar{e}_k;c;z) +$$
$$+\sum_{i=1}^{N} \frac{b_i+\delta_k^i}{c} z_i F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_i+\bar{e}_k;c+1;z). \quad (7)$$

Із рекурентного співвідношення (2) випливає, що

$$F_D^{(N)}(a,\bar{b}+\bar{e}_k;c;z) = F_D^{(N)}(a,\bar{b};c;z) + \frac{a}{c} z_k F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_k;c+1;z), k=\overline{1,N}. \quad (8)$$

Аналогічно із формули (2), де $a,\bar{b},c$ замінено $a+1,\bar{b}+\bar{e}_k,c+1$ відповідно, маємо

$$F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_k+\bar{e}_i;c+1;z) = F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_k;c+1;z) +$$
$$+\frac{a+1}{c+1} z_i F_D^{(N)}(a+2,\bar{b}+\bar{e}_k+\bar{e}_i;c+2;z),\ i=\overline{1,N},\ k=\overline{1,N}. \quad (9)$$

Підставимо одержані співвідношення (8) і (9) у формулу (7):

$$F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_k;c;z) = F_D^{(N)}(a,\bar{b};c;z) + \frac{a}{c} z_k F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_k;c+1;z) +$$
$$+\sum_{i=1}^{N} \frac{b_i+\delta_k^i}{c} z_i F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_k;c+1;z) +$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{(a+1)(b_i+\delta_k^i)}{c(c+1)} z_i^2 F_D^{(N)}(a+2,\bar{b}+\bar{e}_k+\bar{e}_i;c+2;z). \tag{10}$$

Прирівнявши (6) і (10), після елементарних перетворень, одержимо співвідношення (1). Лему доведено.

Використовуючи рекурентну формулу (1), побудуємо розвинення відношення гіпергеометричних функцій

$$\frac{F_D^{(N)}(a,\bar{b};c;z)}{F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_1;c+1;z)} := F \tag{11}$$

у гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД).

Теорема 1. Відношення гіпергеометричних функцій Лаурічелли (11) має формальне розвинення у гіллястий ланцюговий дріб

$$\frac{F_D^{(N)}(a,\bar{b};c;z)}{F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_1;c+1;z)} = b_0(z) + \mathop{D}_{n=1}^{\infty} \sum_{i_n=1}^{N} \frac{a_{i(n)}(z)}{b_{i(n)}(z)}, \tag{12}$$

де $b_0(z) = 1 - \frac{a+1}{c} z_1 - \sum_{i=1}^{N} \frac{b_i}{c} z_i$; $a_{i(n)}(z) = \frac{(a+n)(b_{i_n}+p_{i(n)})}{(c+n-1)(c+n)} z_{i_n}(1-z_{i_n})$; (13)

$$b_{i(n)}(z) = 1 - \frac{a+n+1}{c+n} z_{i_n} - \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k + p_{i(n-1)k}}{c+n} z_k;\ p_{i(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} \delta_{i_n}^{i_k} + \delta_{i_n}^{1}, p_{i(o)k} = \delta_k^1;$$

$i(n) = i_1 i_2 \ldots i_n$ – мультиіндекс, $i_p = \overline{1,N}, p = \overline{1,n}, n = 1,2,\ldots$

Доведення. Нехай $i(n)$ - деякий мультиіндекс. У рекурентному співвідношенні (1), де $a,\bar{b},c$ замінено на $a+n, \bar{b}+\sum_{j=1}^{N} p_{i(n-1)j}\bar{e}_j, c+n$, $k = i_n$, розділимо праву і ліву частини на $F_D^{(N)}\left(a+n+1,\bar{b}+\sum_{j=1}^{N} p_{i(n)j}\bar{e}_j;c+n+1;z\right)$. Позначимо

$$P_{i(n)}(z) := \frac{F_D^{(N)}\left(a+n,\bar{b}+\sum_{j=1}^{N} p_{i(n-1)j}\bar{e}_j;c+n;z\right)}{F_D^{(N)}\left(a+n+1,\bar{b}+\sum_{j=1}^{N} p_{i(n)j}\bar{e}_j;c+n+1;z\right)}. \tag{14}$$

Враховуючи формули (13) для коефіцієнтів ГЛД (12) і позначення (14), отримаємо рекурентну формулу

$$P_{i(n)}(z) = b_{i(n)}(z) + \sum_{i_{n+1}=1}^{N} \frac{a_{i(n+1)}(z)}{P_{i(n+1)}(z)}. \tag{15}$$

Методом математичної індукції покажемо, що для будь-якого натурального числа n справедливе розвинення відношення (11) у скінченний гіллястий ланцюговий дріб:

$$F = b_0(z) + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}(z)}{b_{i(1)}(z)} + \ldots + \sum_{i_{n-1}=1}^{N} \frac{a_{i(n-1)}(z)}{b_{i(n-1)}(z)} + \sum_{i_n=1}^{N} \frac{a_{i(n)}(z)}{P_{i(n)}(z)}. \tag{16}$$

Розділивши ліву і праву частини формули (1), $k=1$, на $F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_1;c+1;z)$, переконаємося у справедливості твердження при $n=1$. Із рекурентної формули (15) випливає, що розвинення (16) справджується для $n=k+1$, якщо припустити, що воно правильне для $n=k$. Теорема доведена.

У випадку, коли число змінних $N=1$ функція F є відношенням гіпергеометричних функцій Гаусса, а гіллястий ланцюговий дріб вироджується у неперервний дріб, який збігається з відомим розвиненням відношення

$$F(a,b;c;z)\,/\,F(a+1,b+1;c+1;z)$$

у неперервний дріб, запропонований Норлундом [2].

Лема 2. Для гіпергеометричної функції Лаурічелли справджуються рекурентні співвідношення

$$\begin{aligned} F_D^{(N)}(a,\bar{b};c;z) &= F_D^{(N)}(a,\bar{b}+\bar{e}_i;c+1;z) - \frac{a}{c(c+1)}\left(c-\sum_{k=1}^{N} b_k\right) z_i \times \\ & F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_i;c+2;z) + \\ & \sum_{k\neq i} \frac{ab_k}{c(c+1)}(z_k - z_i) F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_i+\bar{e}_k;c+2;z),\ i=\overline{1,N}, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} F_D^{(N)}(a,\bar{b};c;z) &= F_D^{(N)}(a+1,\bar{b};c+1;z) - \\ & \sum_{i=1}^{N} \frac{(c-a)b_i}{c(c+1)} z_i F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_i;c+2;z), \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} F_D^{(N)}(a,\bar{b};c;z) &= \left(1-\frac{a}{c}z_k\right) F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_k;c+1;z) - \\ & \sum_{i=1}^{N} \frac{(c-a)(b_i+\delta_i^k)}{c(c+1)} z_i F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_i+\bar{e}_k;c+1;z),\ k=\overline{1,N}. \end{aligned} \tag{19}$$

Доведення проводиться за схемою, запропонованою при доведенні леми 1. Замінимо у формулі (2) параметр c на $c+1$:

$$F_D^{(N)}(a,\bar{b};c+1;z) = F_D^{(N)}(a,\bar{b}+\bar{e}_i;c+1;z) - \frac{a}{c+1} z_i F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_i;c+2;z), \tag{20}$$

де $i=\overline{1,N}$. Підставивши функцію $F_D^{(N)}(a,\overline{b};c+1;z)$ із співвідношення (20) у формулу (5), маємо

$$F_D^{(N)}(a,\overline{b};c;z)=F_D^{(N)}(a,\overline{b}+\overline{e}_i;c+1;z)-\frac{a(c-b_i)}{c(c+1)}z_iF_D^{(N)}(a+1,\overline{b}+\overline{e}_i;c+2;z)+$$

$$\sum_{k\neq i}^{N}\frac{ab_k}{c(c+1)}z_kF_D^{(N)}(a+1,\overline{b}+\overline{e}_i+\overline{e}_k;c+2;z). \tag{21}$$

Розглянемо співвідношення (20) для $i=k$

$$F_D^{(N)}(a,\overline{b};c+1;z)=F_D^{(N)}(a,\overline{b}+\overline{e}_k;c+1;z)-\frac{az_k}{c+1}F_D^{(N)}(a+1,\overline{b}+\overline{e}_k;c+2;z). \tag{22}$$

Із рівностей (20) і (22) випливає, що

$$\begin{aligned}&\frac{a}{c+1}z_kF_D^{(N)}(a+1,\overline{b}+\overline{e}_k;c+1;z)=F_D^{(N)}(a,\overline{b}+\overline{e}_k;c+1;z)-\\&F_D^{(N)}(a,\overline{b}+\overline{e}_i;c+1;z)+\frac{a}{c+1}z_iF_D^{(N)}(a+1,\overline{b}+\overline{e}_k;c+1;z).\end{aligned} \tag{23}$$

Замінивши у співвідношеннях (20) і (22) $\overline{b}$ на $\overline{b}+\overline{e}_k$ та $\overline{b}+\overline{e}_i$ відповідно, і використавши формулу (23), маємо

$$\begin{aligned}&\frac{a}{c+1}z_kF_D^{(N)}(a+1,\overline{b}+\overline{e}_k;c+2;z)=\frac{a}{c+1}z_iF_D^{(N)}(a+1,\overline{b}+\overline{e}_i;c+2;z)+\\&\frac{a}{c+1}(z_k-z_i)F_D^{(N)}(a+1,\overline{b}+\overline{e}_k+\overline{e}_i;c+2;z).\end{aligned} \tag{24}$$

Підставляючи (24) у формулу (21), одержимо співвідношення (17). Якщо з рівності (5) виразити функцію $F_D^{(N)}(a,\overline{b};c+1;z)$ і підставити її у формулу (3), то отримаємо співвідношення (18). Рекурентне співвідношення (19) одержується із формул (2) і (18), в яких $\overline{b}$ замінено на $\overline{b}+\overline{e}_k$. Лему доведено.

Теорема 2. Відношення гіпергеометричних функцій

$$\frac{F_D^{(N)}(a,\overline{b};c;z)}{F_D^{(N)}(a,\overline{b}+\overline{e}_1;c+1;z)}=:G \tag{25}$$

формально розвивається у гіллястий ланцюговий дріб

$$1+\mathop{D}_{n=1}^{\infty}\sum_{i_n=1}^{N}\frac{u_{i(n)}(z)}{v_{i(n)}(z)}, \tag{26}$$

коефіцієнти якого обчислюються за формулами

$$u_{i(2n)}(z)=-\frac{(c-a+n)(b_{i_{2n}}+p_{i(2n)}-s_{i(2n)})}{(c+2n-1)(c+2n)}z_{i_{2n}},$$

$$
u_{i(2n+1)}(z)=\begin{cases}-\dfrac{(a+n)}{(c+2n)(c+2n+1)}\left(c-\sum\limits_{j=1}^{N}b_j+k_{i(2n+1)}-2\right)z_{i_{2n+1}}, i_{2n}=i_{2n+1},\\ -\dfrac{(a+n)(b_{i_{2n+1}}+p_{i(2n+1)}-s_{i(2n+1)})}{(c+2n)(c+2n+1)}\left(z_{i_{2n}}-z_{i_{2n+1}}\right), i_{2n}\neq i_{2n+1},\end{cases}
$$

$$
v_{i(2n)}(z)=1,\ v_{i(2n+1)}(z)=\begin{cases}1, i_{2n}=i_{2n+1},\\ 1-\dfrac{a+n}{c+2n+1}z_{i_{2n+1}}, i_{2n}\neq i_{2n+1},\end{cases}
$$

$$
p_{i(n)}=\sum_{k=1}^{n-1}\delta_{i_n}^{i_k}+\delta_{i_n}^{1}, k_{i(n+1)}=\sum_{j=1}^{[n/2]}\delta_{i_{2j}}^{i_{2j+1}}, s_{i(n+1)}=\sum_{j=1}^{[n/2]}\delta_{i_{2j}}^{i_{2j+1}}\delta_{i_{2j}}^{n+1},
$$

$$
i_p=\overline{1,N}, p=\overline{1,n}, n=1,2,\ldots
$$

Доведення теореми проводиться за методом математичної індукції з врахуванням того, що розвинення відношення (25) у скінченний ГЛД має вигляд

$$
G=1+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{u_{i(1)}(z)}{v_{i(1)}(z)}+\sum_{i_2=1}^{N}\frac{u_{i(2)}(z)}{v_{i(2)}(z)}+\ldots+\sum_{i_n=1}^{N}\frac{u_{i(n)}(z)}{G_{i(n)}(z)},
$$

де
$$
G_{i(n)}(z):=\begin{cases}\dfrac{F_D^{(N)}\left(a+k,\bar{b}+\sum\limits_{j=1}^{N}q_{i(n-1)j}\bar{e}_j;c+2k;z\right)}{F_D^{(N)}\left(a+k,\bar{b}+\sum\limits_{j=1}^{N}q_{i(n)j}\bar{e}_j;c+2k+1;z\right)}, n=2k, k=1,2,\ldots,\\ \dfrac{F_D^{(N)}\left(a+k,\bar{b}+\sum\limits_{j=1}^{N}q_{i(n)j}\bar{e}_j;c+2k+1;z\right)}{F_D^{(N)}\left(a+k+1,\bar{b}+\sum\limits_{j=1}^{N}q_{i(n)j}\bar{e}_j;c+2k+2;z\right)}, n=2k+1, k=0,1,2,\ldots,\end{cases}
$$

$$
q_{i(n)}=\begin{cases}k_{i(2l+1)}-2, n=2l+1\wedge i_{2l}=i_{2l+1},\\ p_{i(n)}-s_{i(n)}, n\neq 2l+1\vee i_{2l}\neq i_{2l+1},\end{cases}
$$

і функції $G_{i(n)}(z)$ задовольняють рекурентне співвідношення

$$
G_{i(n)}(z)=v_{i(n)}(z)+\sum_{i_{n+1}=1}^{N}\frac{u_{i(n+1)}(z)}{G_{i(n+1)}(z)}. \tag{27}
$$

Формулу (27) одержуємо із співвідношень леми 2 аналогічно, як формулу (15) у доведенні теореми 1.

Розвинення (26) в одновимірному випадку збігається з розвиненням у неперервний дріб, побудований Гауссом для відношення функцій

$$\frac{F(a,b;c;z)}{F(a,b+1;c+1;z)}.$$

1. Молнар Н.П., Манзій О.С. Розвинення гіпергеометричних функцій Аппеля і Лаурічелли у гіллясті ланцюгові дроби // Вісн. Львів. ун-ту. 1997. Вип.48. С.17–26. 2. Loretzen L., Waadeland H. Continued Fraction with Application. Amsterdam: Nors-Holland, 1992.

УДК 517.946+511.37

Гой Т.П.
Прикарпатський університет ім. В. Стефаника, Ів.-Франківськ

ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ СИСТЕМ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

By using the metric approach we study the problem of classical well-posedness of a two-point nonlocal boundary value problem for one class partial systems of linear differential equations of the high order with variable coefficients in a tube domain.

На основі метричного підходу досліджено питання про класичну коректність задачі з нелокальними двоточковими умовами для деякого класу систем лінійних рівнянь з частинними похідними і змінними коефіцієнтами у циліндричній області.

1. У цій роботі, яка ідейно наближена до [1–4], досліджено класичну коректність задачі з нелокальними двоточковими умовами за виділеною змінною t та умовами типу умов Діріхле за координатами $x_1,\ldots,x_p$ для одного класу систем рівнянь з частинними похідними із змінними за $x_1,\ldots,x_p$ коефіцієнтами, який включає і гіперболічні системи.

Надалі використовуємо такі позначення: $G\subset\mathbf{R}^p$ – обмежена однозв'язна область із гладкою межею ∂G; $Q=\{(t,x):t\in(0,T),x\in G\}$; δ_{jr} – символ Кронекера; $C^{j,\nu}$ – клас визначених в області $\overline{G}$ функцій, j-ті похідні яких задовольняють у $\overline{G}$ умову Гельдера з показником ν, $0<\nu<1$; $A^{j,\nu}$ – клас замкнених областей, для яких функції, що задають у локальних координатах рівняння межових поверхонь цих областей, належать до класу $C^{j,\nu}$; $\overline{C}^{(\bar n,r)}(\overline{Q})$ – банахів простір вектор-функцій $u(t,x)=\big(u_1(t,x),\ldots,u_m(t,x)\big)$ з нормою

$$\|u\|_{\overline{C}^{(\bar n,r)}(\overline{Q})}=\sum_{j=1}^{m}\|u_j\|_{C^{(n_j,r)}(\overline{Q})};\quad \bar n=(n_1,\ldots,n_m)\in\mathbf{N}^m;$$