Розвинення (26) в одновимірному випадку збігається з розвиненням у неперервний дріб, побудований Гауссом для відношення функцій

$$\frac{F(a,b;c;z)}{F(a,b+1;c+1;z)}.$$

1. Молнар Н.П., Манзій О.С. Розвинення гіпергеометричних функцій Аппеля і Лаурічелли у гіллясті ланцюгові дроби // Вісн. Львів. ун-ту. 1997. Вип.48. С.17–26. 2. Loretzen L., Waadeland H. Continued Fraction with Application. Amsterdam: Nors-Holland, 1992.

УДК 517.946+511.37

Гой Т.П.
Прикарпатський університет ім. В. Стефаника, Ів.-Франківськ

ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ СИСТЕМ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

By using the metric approach we study the problem of classical well-posedness of a two-point nonlocal boundary value problem for one class partial systems of linear differential equations of the high order with variable coefficients in a tube domain.

На основі метричного підходу досліджено питання про класичну коректність задачі з нелокальними двоточковими умовами для деякого класу систем лінійних рівнянь з частинними похідними і змінними коефіцієнтами у циліндричній області.

1. У цій роботі, яка ідейно наближена до [1–4], досліджено класичну коректність задачі з нелокальними двоточковими умовами за виділеною змінною t та умовами типу умов Діріхле за координатами $x_1,...,x_p$ для одного класу систем рівнянь з частинними похідними із змінними за $x_1,...,x_p$ коефіцієнтами, який включає і гіперболічні системи.

Надалі використовуємо такі позначення: $G \subset \mathbf{R}^p$ – обмежена однозв'язна область із гладкою межею ∂G; $Q = \{(t,x) : t \in (0,T), x \in G\}$; δ_{jr} – символ Кронекера; $C^{j,\nu}$ – клас визначених в області $\overline{G}$ функцій, j-ті похідні яких задовольняють у $\overline{G}$ умову Гельдера з показником ν, 0<ν<1; $A^{j,\nu}$ – клас замкнених областей, для яких функції, що задають у локальних координатах рівняння межових поверхонь цих областей, належать до класу $C^{j,\nu}$; $\overline{C}^{(\overline{n},r)}(\overline{Q})$ – банахів простір вектор-функцій $u(t,x) = (u_1(t,x),...,u_m(t,x))$ з нормою

$$\|u\|_{\overline{C}^{(\overline{n},r)}(\overline{Q})} = \sum_{j=1}^{m} \|u_j\|_{C^{(n_j,r)}(\overline{Q})}; \quad \overline{n} = (n_1,...,n_m) \in \mathbf{N}^m;$$

2. В області Q розглянемо задачу

$$M_j(u) \equiv \frac{\partial^{n_j} u_j(t,x)}{\partial t^{n_j}} - \sum_{r=1}^{m} A_{jr}\left(\partial/\partial t, -L\right) u_r(t,x) = f_j(t,x), \; j=1,\dots,m, \tag{1}$$

$$\sum_{s=0}^{H}\sum_{q=0}^{n_j-1} b_{sq}^{jl} L^s \left(\left.\frac{\partial^q u_j(t,x)}{\partial t^q}\right|_{t=0} - \mu \left.\frac{\partial^q u_j(t,x)}{\partial t^q}\right|_{t=T} \right) = 0, \;\; l=1,\dots,n_j, \; j=1,\dots,m, \tag{2}$$

$$L^r u_j(t,x)\Big|_{\partial G} = 0, \quad r=0,1,\dots,H-1, \quad j=1,\dots,m, \tag{3}$$

де $A_{jr}\left(\partial/\partial t, -L\right) \equiv \sum_{s=0}^{H}\sum_{q=0}^{n_j-1} a_{sq}^{jr}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^q (-L)^s$, $a_{sq}^{jr}, b_{sq}^{jl} \in \mathbf{C}$, $\mu \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$, $n_1+\dots+n_m = n$; оператор

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - q(x), \quad p_{ij}(x) > 0, q(x) \ge 0,$$

еліптичний в області G; $p_{ij}(x) \in C^{2H-1,\nu}, i,j=1,\dots p,$ $q(x) \in C^{2H-2,\nu}$, $\overline{G} \in A^{2H,\nu}$.

Розв’язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді векторного ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \tag{4}$$

де $u(t,x) = \mathrm{col}\left(u_1(t,x),\dots,u_m(t,x)\right)$, $u_k(t) = \mathrm{col}\left(u_{k1}(t),\dots,u_{km}(t)\right)$, а $X_k(x), k\in\mathbf{N}$, – власні функції задачі

$$LX(x) = -\lambda X(x), \quad X(x)\big|_{\partial G} = 0. \tag{5}$$

Відомо, що усі власні значення $\lambda_k, k\in\mathbf{N}$ задачі (5), множину яких позначимо через Λ, є дійсні і різні, а система власних функцій $\{X_k(x)\}_{k\in\mathbf{N}}$ – повна і ортонормована у просторі $L_2(G)$; крім того, $X_k(x) \in C^{2H}(\overline{G})$, $k\in\mathbf{N}$, і правильні такі оцінки [5,6]:

$$(\forall \lambda_k > K_1) \quad c_0 k^{2/p} \le \lambda_k \le c_1 k^{2/p}, \; 0 < c_0 \le c_1, \; k\in\mathbf{N}, \tag{6}$$

$$\max_{x\in\overline{G}}\left| \frac{\partial^{|q|} X_k(x)}{\partial x_1^{q_1}\dots\partial x_p^{q_p}} \right| \le c_2(|q|)\lambda_k^{\frac{p}{4}+\frac{|q|}{2}}, \; |q| = 0,1,\dots,2H. \tag{7}$$

Припустимо, що для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ η – корені рівняння

$$\det P(\eta,\lambda_k) \equiv \det\left\| \eta^{n_j}\delta_{jr} - A_{jr}(\eta,\lambda_k)\right\|_{j,r=1}^{m} = 0 \tag{8}$$

задовольняють умови

$$\mathrm{Re}\,\eta_j(\lambda_k) \le \alpha, \; \alpha\in\mathbf{R}, \; j=1,\dots,n. \tag{9}$$

Із структури рівняння (8) випливають такі асимптотичні оцінки:

$$\left|\eta_j(\lambda_k)\right| \le \tilde{C}\lambda_k^H, \quad j=1,\dots,n, \tag{10}$$

де $\tilde{C}$ – стала, що не залежить від λ_k.

Нехай

$$f_j(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_{kj}(t)X_k(x), \qquad f_{kj}(t)=\int_G f_j(t,x)X_k(x)dx,\ j=1,\dots,m. \tag{11}$$

Тоді компоненти кожної з вектор-функцій $u_k(t), k\in\mathbf{N}$, в (4) є розв’язком задачі

$$u_{kj}^{(n_j)}(t)-\sum_{r=1}^{m} A_{jr}\left(d/dt,\lambda_k\right)u_{kr}(t)=f_{kj}(t),\ \ j=1,\dots,m, \tag{12}$$

$$\sum_{s=0}^{H}\sum_{q=0}^{n_j-1} b_{sq}^{jl}(-\lambda_k)^s\left(u_{kj}^{(q)}(0)-\mu u_{kj}^{(q)}(T)\right)=0,\ \ l=1,\dots,n_j,\ j=1,\dots,m. \tag{13}$$

Припустимо, що для усіх $\lambda_k\in\Lambda$ корені $\eta_j\equiv\eta_j(\lambda_k),\ \ j=1,\dots,n,$ характеристичного рівняння (8) прості та відмінні від нуля. Тоді однорідна система рівнянь

$$u_{kj}^{(n_j)}(t)-\sum_{r=1}^{m} A_{jr}\left(d/dt,\lambda_k\right)u_{kr}(t)=0,\ \ j=1,\dots,m, \tag{12'}$$

має таку фундаментальну матрицю розв’язків

$$Y=\left\|Y_{rs}(t)\right\|_{\substack{r=1,\dots,m\\ s=1,\dots,n}},\qquad Y_{rs}(t)=\Psi_r(\eta_s)\exp(\eta_s t),\ r=1,\dots,m,\ s=1,\dots,n, \tag{14}$$

де функції $\Psi_r(\eta_s), r=1,\dots,m,$ визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{r=1}^{m}\left(\eta_s^{n_j}\delta_{jr}-A_{jr}(\eta_s,\lambda_k)\right)\Psi_r(\eta_s)=0,\ \ j=1,\dots,m\quad . \tag{15}$$

Визначником системи (15) є $\det P(\eta_s,\lambda_k)$. Оскільки числа $\eta_s(\lambda_k)$, $s=1,\dots,n,$ попарно різні, то $\operatorname{rang}P(\eta_s,\lambda_k)=m-1, s=1,\dots,n,$ а тому хоча б один з мінорів $(m-1)$-го порядку визначника $\det P(\eta_s,\lambda_k)$ відмінний від нуля. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що $F_m(\eta_s)\equiv\det\left\|\eta_s^{n_j}\delta_{jr}-A_{jr}(\eta_s,\lambda_k)\right\|_{j,r=1}^{m-1}\neq 0.$ Тоді

$$\Psi_m(\eta_s)=F_m(\eta_s)\equiv\sum_{\alpha=0}^{n-n_m}B_{m\alpha}(\lambda_k)\eta_s^{n-n_m-\alpha},\ \Psi_r(\eta_s)=F_r(\eta_s)\equiv\sum_{\alpha=0}^{n-n_r-1}B_{r\alpha}(\lambda_k)\eta_s^{n-n_r-\alpha-1}, r=1,\dots,m-1,$$

де

$$F_r(\eta_s)=\det\left\|\begin{matrix}\eta_s^{n_1}-A_{11}(\eta_s,\lambda_k) & \dots & A_{1,r-1}(\eta_s,\lambda_k)\\ \dots & \dots & \dots\\ A_{m-1,1}(\eta_s,\lambda_k) & \dots & A_{m-1,r-1}(\eta_s,\lambda_k)\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}A_{1m}(\eta_s,\lambda_k) & A_{1,r+1}(\eta_s,\lambda_k) & \dots & A_{1,m-1}(\eta_s,\lambda_k)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{m-1,m}(\eta_s,\lambda_k) & A_{m-1,r+1}(\eta_s,\lambda_k) & \dots & \eta_s^{n_m-1}-A_{m-1,m-1}(\eta_s,\lambda_k)\end{matrix}\right\|,\ r=1\dots,m-1.$$

Характеристичний визначник $\Delta(\lambda_k)$ задачі (12′), (13) обчислюється за формулами

$$\Delta(\lambda_k)=D(\lambda_k)\prod_{r=1}^{m}E_r(\lambda_k)\prod_{j=1}^{n}\left(1-\mu\exp\left(\eta_j(\lambda_k)T\right)\right)\prod_{1\le q<l\le n}\left(\eta_l(\lambda_k)-\eta_q(\lambda_k)\right),$$

$$D(\lambda_k)=\begin{vmatrix} \underbrace{0\ \dots\ 0}_{n_1-1} & B_{1,n-n_1-1} & \dots & B_{10} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ B_{1,n-n_1-1} & \dots & \dots & B_{10} & \underbrace{0\ \dots\ 0}_{n_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \underbrace{0\ \dots\ 0}_{n_m-1} & B_{1,n-n_m-1} & \dots & B_{10} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ B_{1,n-n_1-1} & \dots & \dots & B_{10} & \underbrace{0\ \dots\ 0}_{n_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \underbrace{0\ \dots\ 0}_{n_m-1} & B_{m,n-n_m} & \dots & B_{m1} & B_{m0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ B_{m,n-n_m} & \dots & \dots & B_{m0} & \underbrace{0\ \dots\ 0}_{n_m-1} \end{vmatrix}, \qquad (16)$$

$$E_r(\lambda_k)=\det\left\|\sum\nolimits_{s=0}^{H} b_{s,q-1}^{rl}(-\lambda_k)^s\right\|_{l,q=1}^{n_r}, \quad r=1,\dots,m. \qquad (17)$$

Зауважимо, що визначник $D(\lambda_k)$ для усіх $\lambda_k\in\Lambda$ відмінний від нуля, бо входить співмножником у вираз вронскіана фундаментальної системи розв’язків (14).

Теорема 1. Для єдиності розв’язку задачі (1)–(3) у просторі $\overline{C}^{(\bar{n},2H)}(\overline{Q})$ необхідно і досить, щоб виконувались умови

$$(\forall\lambda_k\in\Lambda)\quad 1-\mu\exp\left(\eta_j(\lambda_k)T\right)\neq 0,\ \ j=1,\dots,n;\qquad E_r(\lambda_k)\neq 0,\ \ r=1,\dots,m. \qquad (18)$$

Доведення. Якщо для деякого $\lambda_{\tilde{k}}\in\Lambda$ умови (18) не виконуються, то $\Delta(\lambda_{\tilde{k}})=0$ і існують нетривіальні розв’язки $u_{\tilde{k}}(t)=\mathrm{col}\left(u_{\tilde{k}1}(t),\dots,u_{\tilde{k}m}(t)\right)$ задачі (12′), (13). Тоді існують нетривіальні розв’язки вигляду $u(t,x)=u_{\tilde{k}}(t)X_{\tilde{k}}(x)$ задачі з умовами (2), (3) для системи $M_j(u)=0,\ j=1,\dots,m,$ а тому розв’язок неоднорідної задачі (1)–(3), якщо він існує, єдиним не буде. Доведення достатності проводиться за схемою доведення теореми 5.3 з [1, розд.2] і випливає з єдиності розвинення функції з простору $L_2(G)$ у ряд Фур’є за системою ортогональних функцій.

3. Розглянемо питання про існування розв’язку задачі (1)–(3). Нехай виконуються умови (18). Тоді компоненти вектор-функції $u_k(t)$ визначаються за формулами

$$u_{kj}(t)=\int_0^T\sum_{r=1}^{m}G_{k,j,r}(t,\tau)f_{kr}(\tau)d\tau,\quad j=1,\dots m, \qquad (19)$$

де $G_{k,j,r}(t,\tau)$, $j,r=1,\dots,m,$ – елементи матриці Ґріна задачі (12′), (13), які у квадраті $K_T=\left\{(t,\tau)\in\mathbf{R}_+^2:0\le t,\tau\le T\right\}$, крім сторін $\tau=0$ і $\tau=T$, визначаються за формулами

$$G_{k,j,r}(t,\tau)=\left(2D(\lambda_k)\right)^{-1}\sum_{l=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}D_{n_r,q}(\lambda_k)S_{n.-q}^{l}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq q}}^{n}\left(\eta_i(\lambda_k)-\eta_l(\lambda_k)\right)^{-1}\times$$

$$\times\Bigg((-1)^{h_{r+1,1}}\operatorname{sgn}(t-\tau)\Psi_j\big(\eta_l(\lambda_k)\big)\exp\big(\eta_l(\lambda_k)(t-\tau)\big)+\sum_{\xi=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n_r}\sum_{\beta=1}^{n_r}\sum_{\nu=0}^{n_r-1}\sum_{s=0}^{H}(-1)^{h_{r,\beta}+h_{\xi+1,1}}\times$$

$$\times b_{s\nu}^{r\beta}\lambda_k^s\eta_l^\nu(\lambda_k)\Psi_r\big(\eta_l(\lambda_k)\big)\Psi_j\big(\eta_\xi(\lambda_k)\big)\exp\big(\eta_\xi(\lambda_k)t\big)D_{h_{r\alpha},\beta}(\lambda_k)E_{r;\beta\alpha}(\lambda_k)S_{n-\gamma}^{\beta}\times$$

$$\times\big(D(\lambda_k)E_\beta(\lambda_k)\big)^{-1}\prod_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq l}}^{n}\big(\eta_\xi(\lambda_k)-\eta_\sigma(\lambda_k)\big)^{-1}\frac{1+\mu\exp\big(\eta_l(\lambda_k)T\big)}{1-\mu\exp\big(\eta_l(\lambda_k)T\big)}\Bigg),\quad j,r=1,\ldots,m, \tag{20}$$

де $h_{r\varphi}=n_1+\ldots+n_{r-1}+\varphi$, $D_{i,j}(\lambda_k)$ і $E_{r;i,j}(\lambda_k)$ – визначники, отримані викреслюванням i-го рядка і j-го стовпця у визначниках $D(\lambda_k)$ і $E_r(\lambda_k)$, $r=1,\ldots,m$, відповідно; S_γ^q – сума всеможливих добутків чисел $\eta_j(\lambda_k)$, $j=1,\ldots,n$, $j\neq q$, взятих по γ у кожному добутку. На сторонах $\tau=0$ і $\tau=T$ квадрата K_T кожна з функцій $G_{k,j,r}(t,\tau)$, $j,r=1,\ldots,m$, доозначується за неперервністю відповідно справа та зліва.

Питання про існування розв'язку задачі (1)–(3) пов'язане з проблемою малих знаменників, бо відмінні від нуля вирази $\prod_{q=1,\,q\neq j}^{n}\big(\eta_j(\lambda_k)-\eta_q(\lambda_k)\big)$, $1-\mu\exp\big(\eta_j(\lambda_k)T\big)$, $j=1,\ldots,n$, що входять знаменниками у формули (20), можуть бути як завгодно малими за модулем для нескінченної множини $\lambda_k\in\Lambda$.

Теорема 2. Нехай існують сталі $m_1,m_2,\gamma_1,\gamma_2$ такі, що для усіх (крім скінченного числа) $\lambda_k\in\Lambda$ виконуються нерівності

$$\left|1-\mu\exp(\eta_j(\lambda_k)T)\right|\geq m_1\lambda_k^{-\gamma_1},\quad j=1,\ldots,n, \tag{21}$$

$$\prod_{\substack{q=1\\ q\neq j}}^{n}\left|\eta_j(\lambda_k)-\eta_q(\lambda_k)\right|\geq m_2\lambda_k^{-\gamma_2},\quad j=1,\ldots,n, \tag{22}$$

і нехай функції $f_j\in C^{(0,h_j)}(\overline{Q})$, $j=1,\ldots,m$, задовольняють умови

$$L^{r_j}f_j\big|_{\partial G}=0,\ r_j=0,1,\ldots,[h_j/2],\quad j=1,\ldots,m, \tag{23}$$

де $h_j=2\big(3p/4+\gamma_2+\omega_j+H(2n-\tilde n+2\theta)\big)$, $\omega_j=\max\{\alpha,\gamma_1+\gamma_2+H\big(3n-2-n_j+2\tilde N-\tilde n+2\theta\big)\}$, $j=1,\ldots,m$, $\tilde n=\min_{1\leq j\leq m}\{n_j\}$, $\tilde N=\max_{1\leq j\leq m}\{n_j\}$, $\theta=\big(n^2-n_1^2-\ldots-n_m^2\big)/2$, α – стала з нерівності (9). Тоді існує розв'язок задачі (1)–(3), який належить простору $\overline{C}^{(\tilde n,2H)}(\overline{Q})$ і неперервно залежить від функцій $f_i(t,x), i=1,\ldots,m.$

Доведення. З формул (16), (17) одержимо такі асимптотичні оцінки:

$$\left|D_{i,j}(\lambda_k)\right|\leq c_3\lambda_k^{H(\theta-\tilde n)},\ i,j=1,\ldots,n, \tag{24}$$

$$\left|E_{r;i,j}(\lambda_k)\right|\leq c_4\lambda_k^{H(n_r-1)},\ r=1,\ldots,m, \tag{25}$$

$$|D(\lambda_k)|\geq c_5\lambda_k^{\theta H}, \tag{26}$$

$$|E_s(\lambda_k)|\geq c_6\lambda_k^{n_sH},\ s=1,\ldots,m. \tag{27}$$

Тепер із формули (20) та оцінок (6),(7),(9),(10),(21),(22),(24)–(27) одержимо

$$\max_{0\le t\le T}\left|u_{kj}^{(q)}(t)\right| \le c_7\lambda_k^{\sigma_j+Hq}\sum_{s=1}^{m}\max_{0\le t\le T}\left|f_{ks}(t)\right|,\quad q=0,1,\dots,n_j,\ \ j=1,\dots,m, \tag{28}$$

де $\sigma_j=\gamma_2+\omega_j+H(2n-1-n_j-\tilde{n}+\theta),\ j=1,\dots,m.$

Якщо функції $f_j(t,x),\ j=1,\dots,m,$ задовольняють умови теореми, то з (11) та (23) знаходимо, що

$$\max_{0\le t\le T}\left|f_{kj}(t)\right| \le c_8\lambda_k^{-h_j/2}\left\|f_j\right\|_{C^{(0,h_j)}(\overline{Q})},\ \ j=1,\dots,m, \tag{29}$$

Остаточно з (4), (19), враховуючи оцінки (6),(28),(29), отримаємо таку оцінку для норми розв’язку задачі (1)–(3):

$$\|u\|_{\overline{C}^{(\tilde{n},2H)}(\overline{Q})} \le c_9\sum_{j=1}^{m}\left\|f_j\right\|_{C^{(0,h_j)}(\overline{Q})}\sum_{k=1}^{\infty}k^{1/2-h_j/p+2(\sigma_{j1}+H(1+n_j))/p}.$$

Із збіжності рядів у правій частині останньої нерівності випливає доведення теореми.

4. Проаналізуємо можливість виконання оцінок (21), (22).

Теорема 3. Нехай існує стала β>0 не залежна від λ_k, така, що для усіх (крім скінченного числа) $\lambda_k\in\Lambda$ виконуються нерівності

$$\operatorname{Re}\eta_j(\lambda_k)\ge-\beta\ln\lambda_k,\ \ j=1,\dots,n. \tag{30}$$

Тоді для майже усіх (відносно міри Лебега в **R**) чисел T і для довільних фіксованих чисел μ та a_{sq}^{jr} нерівності (21) виконуються при $\gamma_1>p/2+\beta T$ для усіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k\in\Lambda$.

Доведення. Використовуючи (30) та нерівність $\sin x\ge 2x/\pi$, яка правильна для усіх $\forall x\in[0,\pi/2]$, отримаємо оцінки знизу

$$\left|1-\mu\exp\left(\eta_j(\lambda_k)T\right)\right|\ge|\mu|\exp\left(\operatorname{Re}\eta_j(\lambda_k)T\right)\left|\sin\left(\psi+\operatorname{Im}\eta_j(\lambda_k)T\right)\right|\ge$$
$$\ge 2|\mu|\lambda_k^{-\beta T}\left|\left(\psi+\operatorname{Im}\eta_j(\lambda_k)T\right)/\pi-d_j(\lambda_k)\right|,\ \ j=1,\dots,n,$$

де $\psi=\arg\mu$, а $d_j(\lambda_k)\in\mathbf{Z}$ – число, для якого $\left|\left(\psi+\operatorname{Im}\eta_j(\lambda_k)T\right)/\pi-d_j(\lambda_k)\right|\le 1/2.$

З леми 2.4 з [1, розд.1] випливає, що для усіх (крім скінченного числа) $\lambda_k\in\Lambda$ і для майже всіх (відносно міри Лебега) чисел T виконуються оцінки

$$\left|1-\mu\exp\left(\eta_j(\lambda_k)T\right)\right|\ge 2|\mu|T^{-1}\lambda_k^{H-\beta T}\left|\frac{\psi T\pi^{-1}+\operatorname{Im}\eta_j(\lambda_k)T^2\pi^{-1}}{\lambda_k^H}-\frac{Td_j(\lambda_k)}{\lambda_k^H}\right|\ge$$
$$\ge 2|\mu|T^{-1}\lambda_k^{-p/2-\beta T-\delta},\ \ j=1,\dots,n.,$$

де δ – довільне додатне число. Теорему доведено.

Позначимо через $\mathbf{Y}\in\mathbf{R}^{\chi}$, $\chi=nm(H+1)$, вектор, складений з дійсних та уявних частин коефіцієнтів a_{sq}^{jr} системи (1).

Теорема 4. Для майже усіх (відносно міри Лебега в просторі $\mathbf{R}^{\chi},\chi=nm(H+1)$, векторів **Y** при $\gamma_2\ge\left(p/2+H(1-n)(m+n-3)\right)/2$ нерівності (23) виконуються для усіх (крім скінченного числа) $\lambda_k\in\Lambda$.

Доведення теореми проводиться за схемою доведення теореми 4.5 з [1, розд.2]

1. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1984. 2. Ільків В.С., Пташник Б.Й. Зображення та дослідження розв'язків нелокальної крайової задачі для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними // Укр. мат. журн. 1996. Т.48. № 2. С.184–194. 3. Гой Т.П., Пташник Б.Й. Нелокальні крайові задачі для систем лінійних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. 1997. Т.49. № 11. С.1478–1487. 4. Ільків В.С. Задача з інтегральними умовами для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними і змінними коефіцієнтами // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". 1999. № 364. С.318–323. 5. Ильин В.А., Шишмарев И.А. Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1960. Т. 24. С. 883–896. 6. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1983.

УДК 519.6

Голуб Б.М., Оліярник Ю.П.
Львівський національний університет ім. І. Франка

АДАПТИВНИЙ ТУНЕЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ПОШУКУ ГЛОБАЛЬНОГО МІНІМУМУ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

This article deals with the method of finding the global minimizer of the univariate differentiable function which is based on the step-by-step transition from the already found local minimizer to another one with the lower target function value. The transition is implemented by means of the tunneling function (filled function) with the variable parameters. The optimal parameters choice encreases the area of attraction of minimizer being searched for the local optimization methods and thus increases the efficiency of the global minimizer search.

Розглядається метод пошуку глобального мінімуму неперервно-диференційовної функції однієї змінної, який полягає у поетапному переході від деякого вже знайденого локального мінімуму до наступного з меншим значенням цільової функції. Для організації такого переходу використовується тунельна функція (функція наповнення) із змінними параметрами. Оптимальний вибір параметрів збільшує область збіжності алгоритмів локальної мінімізації до шуканого екстремуму, що збільшує ефективність пошуку глобального мінімуму.

1. Формулювання задачі та основні означення. Розглянемо задачу глобальної мінімізації

$$f(x) \to \min_X, \; X = \{x \in R^1 : \; -\infty < a \le x \le b < +\infty\}, \; f(x) \in C^1(X). \qquad (1)$$

Вважаємо, що функція $f(x)$ має скінченну кількість локальних мінімумів на X. Тоді усі локальні мінімуми будуть строгими. Очевидно, що у цьому випадку $f(x)$ задовольняє умову