УДК 517.947

Горбачук О.Л.
Львівський національний університет ім. І. Франка

РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОРІДНОГО ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ІЗ САМОСПРЯЖЕНИМ ОПЕРАТОРОМ НА $(0,\infty)$

The solution of equation $\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t)$, where A is a selfadjoint operator in the Hielbert space are described.

Описано розв'язки рівняння $\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t)$, де A – самоспряжений оператор у гільбертовому просторі на $(0,\infty)$.

Нехай H – гільбертовий простір і A – замкнений оператор. Твердження і факти, які пов'язані з негативними і позитивними просторами і аналітичними цілими, коаналітичними векторами, подаються у монографіях [1], [2]. У книзі [2] (теорема 4.3) описуються розв'язки однорідного еволюційного рівняння у випадку, коли A недодатний, самоспряжений оператор. Нагадаємо, що оператор A називають недодатним (невід'ємним), коли для довільного $f \in H$ $(Af, f) \le 0$ $((Af, f) \ge 0)$, і позначають $A \le 0$ $(A \ge 0)$. Вектор f з гільбертового простору H називається аналітичним для оператора A (див. [2], с. 69), коли для деякого $t > 0$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left\| A^n f \right\|}{n!} t^n < \infty$. Якщо ця нерівність виконується для усіх t, тоді вектор f називається цілим вектором оператора A.

Розглянемо однорідне еволюційне рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t), \quad t>0, \tag{1}$$

і опишемо розв'язки його на півосі $(0,\infty)$**,** коли A – самоспряжений опратор.

Лема 1. Якщо розв'язки $y_1(t)$ і $y_2(t)$ рівняння (1), де оператор $A \ge 0$, збігаються у деякій точці $T \in (0,\infty)$, то $y_1(t) \equiv y_2(t)$ для всіх $t \in (0,T]$.

Доведення. У силу лінійності рівняння (1) досить довести, що коли розв'язок y(t) перетворюється у нуль в точці T, то $y(t) \equiv 0$, де $t \in (0,T]$. Нехай розв'язок y(t) такий, що $y(T) = 0$. Оскільки $(y'(t), y(t)) = (Ay(t), y(t)) \ge 0$, то $(y'(t), y(t)) = \mathrm{Re}(y'(t), y(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y(t), y(t))$, де $\mathrm{Re}(\cdot)$ – дійсна частина $(\cdot)$. Звідси отримаємо, що

$$\left\| y(T) \right\|^2 - \left\| y(t) \right\|^2 = 2\int_t^T (y'(s), y(s))ds = 2\int_t^T (Ay(s), y(s))ds \ge 0.$$ Маємо $\left\| y(t) \right\|^2 \le 0$ для t<T,

тобто $y(t) \equiv 0$.

Лема доведена.

Доведення наступної леми, у якій подається характеризація цілого вектора f, проводиться аналогічно до теореми 2.4 з монографії [2], у якій це показано у випадку аналітичного вектора, тільки деяке α замінюється довільним.

Лема 2. Вектор f буде цілим вектором оператора A тоді і тільки тоді, коли $f \in \bigcap_{t\in(0,\infty)} D(e^{At})$.

Теорема 1. Вектор-функція y(t) буде розв'язком рівняння (1), де A – невід'ємний самоспряжений оператор, тоді і тільки тоді, коли $y(t) = e^{At} f$, де f – цілий вектор оператора A.

Доведення. Якщо f – цілий вектор оператора A, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n f}{n!} t^n$ збігається абсолютно для довільного t. Неважко перевірити, що цей ряд буде розв'язком рівняння (1) і дорівнюватиме $e^{At} f$ (див. [2], с. 69–70).

Нехай A – невід'ємний самоспряжений оператор і y(t) – розв'язок рівняння (1). Розглянемо розв'язок y(t) на проміжку $[a,\infty)$, де a>0. Неважко перевірити, що на проміжку $[a,\infty)$ розв'язком буде функція $e^{(t-a)A} y(a)$ (див. [2], с. 88), яка при t=a набуває значення y(a). За лемою 1 $y(t) = e^{(t-a)A} y(a)$ для $t \le a$. Звідси отримаємо, що $e^{(t-a)A} y(a) = e^{tA}(e^{-aA} y(a))$ для довільного $t \in (0,\infty)$. За лемою 2 вектор $e^{-aA} y(a) = f$ – цілий вектор і $y(t) = e^{tA} f$.

Теорема доведена.

Ця теорема стверджує, що простір цілих векторів можна вважати простором початкових даних задачі Коші для еволюційноо рівняння (1) з невід'ємними операторами.

Описання розв'язків рівняння (1), де A – самоспряжений оператор буде зведено до теореми 1 і теореми 4.3 з книги [2]. Як відомо, самоспряжений оператор має спектральний розклад $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda$ (див., наприклад, [3]). Позначимо через $A_+ = \int_{0}^{\infty} \lambda dE_\lambda$ і $A_- = \int_{-\infty}^{0} \lambda dE_\lambda$.

Зауважимо, що якщо 0 є точкою спектра, то тільки в один з інтегралів потрібно включати точку 0, а інший розглядається без включення нуля, так щоб $A = A_+ + A_-$.

Теорема 2. Вектор-функція y(t) буде розв'язком рівняння (1), де A – самоспряжений лінійний оператор, тоді і тільки тоді, коли $y(t) = e^{A_+ t} f_1 + e^{\hat{A}_- t} f_2$, де f_1 – цілий вектор оператора A_+ і f_2 – коаналітичний вектор оператора $\hat{A}_-$, а $\hat{A}_-$ – розширення оператора A_- в просторі коаналітичних векторів $U'(A_-)$ (спряженому до простору аналітичних векторів $U(A_-)$) (див. [2],с. 88).

Доведення. Лінійний самоспряжений оператор $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda$, де E_λ – проектори, і $E_{\lambda_1} \le E_{\lambda_2}$, коли $\lambda_1 < \lambda_2$, $E_{-\infty} = 0, E_\infty = I$, де I – тотожний оператор.

Розглянемо два ортогональні проектори E_0 і $I - E_0$. Через H_1 і H_2 позначимо, відповідно, $H_1 = E_0 H$ і $H_2 = (I - E_0)H$. Неважко побачити, що $H = H_1 \oplus H_2$ (ортогональна сума). Дія оператора A на H_1 дорівнює A_-, відповідно на H_2 – операторові A_+. Наше рівняння (1) розпадається на два рівняння у просторах H_1 і H_2 $\frac{dy_1(t)}{dt} = A_- y_1(t)$ і $\frac{dy_2(t)}{dt} = A_- y_2(t)$, де $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ (прямий ортогональний розклад), $y_1(t) \in H_1$, $y_2(t) \in H_2$.

З теореми 4.3 монографії [2] випливає, що $y_1(t) = e^{\hat{A}_- t} f_2$, де f_2 – коаналітичний вектор оператора A_-, а $\hat{A}_-$ – розширення оператора A_- у просторі коаналітичних векторів $U'(A_-)$ (див. [2]). З теореми 2 випливає, що $y_2(t) = e^{\hat{A}_= t} f_1$, де f_1 – цілий вектор оператора A_+. Звідси $y(t) = y_1(t) + y_2(t) = e^{A_= t} f_1 + e^{\hat{A}_- t} f_2$.

Теорема доведена.

Вважаємо, що початкові дані задачі Коші для рівняння (1) із самоспряженим оператором A складаються з пар (f_1, f_2), де f_1 – цілий вектор оператора A_+ і f_2 – коаналітичний вектор оператора A_- (див. [2]).

Зауваження. Замість інтервалу $(0, \infty)$ можна було б розглядати інтервал $(0, b)$, де $b \leq \infty$ (так робиться у монографії [2]), і усі твердження залишаться в силі.

1. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям сопряженных операторов. К., 1965. 2. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально операторных уравнений. К., 1984. 3. Рудин И. Функциональный анализ. М., 1975.

УДК 517.98

Городецький В.В., Юдченко С.С.
Чернівецький державний університет ім. Ю. Федьковича
Чернівецький торговельно-економічний інститут
Київського Державного торговельно-економічного університету

ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ГАУССА-ВЕЙЄРШТРАССА ФОРМАЛЬНИХ РЯДІВ ФУР'Є-ЛАГЕРРА

Fourier-Laguerre formal series which are identified with generalized infinite order functions of Gevrey ultradistribution type are considered. Gauss-Weierstrass type transformation properties of the indicated series are studied. Analogue of the known localization principle is discovered for such series in rather wide generalized functions class. Usage of the received results for the parabolyc type equations with partial derivatives with orderly growing coefficients is presented.

Розглядаються формальні ряди Фур'є-Лагерра, що ототожнюються із узагальненими функціями нескінченного порядку типу ультрарозподілів Жевре.