Задача Коші для рівняння (2) полягає у відшуканні розв'язку цього рівняння, який задовольняє початкову умову $u(0,\cdot)=\lim\limits_{t\to+0}u(t,\cdot)$ (границя береться у просторі Φ').

Теореми 3–5 приводять до такого твердження.

Теорема 6. Задача Коші для рівняння (2) коректно розв'язана у просторі початкових даних $\left(S_{1/2,+}^{1/2,+}\right)'$. Її розв'язок подається формулою (3), яка описує усі нескінченно диференційовні по x на півосі $(0,\infty)$ функції, що задовольняють рівняння (2) і граничне співвідношення $u(t,\cdot)\to f$, $t\to+0$, у просторі $\left(S_{1/2,+}^{1/2,+}\right)'$. При цьому якщо $f\in\left(S_{1/2,+}^{\beta,+}\right)'$, $\beta>1$ і на деякому інтервалі $(a,b)\subset(0,\infty)$ узагальнена функція f збігається з неперервною функцією g, то $u(t,x)\to g(x)$ при $t\to+0$ рівномірно на довільному відрізку $[c,d]\subset(a,b)$.

Аналогічні твердження мають місце і у випадку рівняння

$$\frac{1}{\alpha(t)}\frac{\partial u}{\partial t}=4x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\left(2x\frac{f_0''(x)}{f_0(x)}+4x\frac{f_0'(x)}{f_0(x)}+1\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(2\frac{f_0'(x)}{f_0(x)}-x\right)u,\ (t,x)\in\Pi_T, \tag{4}$$

де f_0 – фіксована функція з простору $C^\infty((0,\infty))$, яка задовольняє такі умови:

1) f_0 – мультиплікатор у просторі $S_{1/2,+}^{1/2,+}$;

2) $\dfrac{1}{f_0}\in C^\infty((0,\infty))$ (якщо $f_0(x)=1$, $\forall x\in(0,\infty)$, то маємо рівняння (2)).

Усі нескінченно диференційовні по x розв'язки рівняння (4) описуються формулою

$$u(t,x)=\left\langle f,\frac{f_0(\cdot)}{f_0(x)}G_{\varphi(t),1,x}(\cdot)\right\rangle,\ (t,x)\in\Pi_T,$$

де $f\in\left(S_{1/2,+}^{1/2,+}\right)'$; $u(t,\cdot)\in S_{1/2,+}^{1/2,+}$ при кожному $t>0$ і $u(t,\cdot)\to f$, $t\to+0$, у просторі $\left(S_{1/2,+}^{1/2,+}\right)'$.

1. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. К., 1984. 2. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М., 1976. 3. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. М., 1958.

УДК 517.91

Грабовська Р.Г., Буряк Д.В.*, Крапива Н.В.*
Одеський державний університет,
*Одеський державний політехнічний університет

ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

The question of existence the periodic decision of some systems of the differential equations of the first order is investigating. The sufficient conditions of existence of

such decision for the specified systems are received. The geometrical methods were use at the decision of this question.

Досліджується питання існування періодичного розв'язку деяких систем диференціальних рівнянь першого порядку. Одержані достатні умови існування такого розв'язку для вказаних систем. При розв'язанні цього питання були використані геометричні методи.

Розглянемо таку систему диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} y_k' = f_k\left(x, y_1, \ldots, y_n\right), \\ k = \overline{1, n} \end{cases} \tag{1}$$

де $f_k\left(x, y_1, \ldots, y_n\right) \in \mathrm{C}^{0,1,\ldots,1}_{x, y_1, \ldots, y_n}\left(\mathrm{R}^{n+1}\right)$, $k = \overline{1, n}$, $\sum_{k=1}^{n} f_k^2\left(x, 0, \ldots, 0\right) > 0$ та існує $\omega = const$, $\omega > 0$, таке, що $f_k\left(x + \omega, y_1, \ldots, y_n\right) = f_k\left(x, y_1, \ldots, y_n\right)$, $k = \overline{1, n}$ – тобто f_k є ω-періодичними функціями за змінною x.

Відзначимо, що умова періодичності функцій за змінною x геометрично означає, що векторне поле, визначене системою (1), у «смугах», які містяться між гіперплощинами $x = a + (m-1)\omega$ та $x = a + m\omega$, тобто при $a + (m-1)\omega \le x \le a + m\omega$, $\forall\, a = const$, $a \in \mathbf{R}$, $\forall\, m \in \mathbf{Z}$, повторюються.

Ставиться задача: дати достатні умови існування ω-періодичного розв'язку системи (1).

При розв'язанні цього питання скористаємося тим, що довільна крива $L\left[x, y_1(x), \ldots, y_n(x)\right]$ у просторі $\mathbf{R}^{n+1}$ буде ω-періодичною за змінною x тоді і тільки тоді, коли координати $\left(y_1, \ldots, y_n\right)$ точок її перетину з площинами $x = a + (m-1)\omega$ та $x = a + m\omega$ $\left(\forall\, m \in \mathbf{Z}\right)$ збігаються. Це міркування лежить в основі подальших досліджень.

Теорема 1. Нехай для системи (1) існує функція Ляпунова $V\left(y_1, \ldots, y_n\right)$ така, що при достатньо великому $C_0 > 0$ $\left(C_0 = const\right)$ її похідна у силу системи (1)

$$W = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_k} \cdot f_k$$

зберігає знак на поверхні $V = C_0$, тобто $W \gtrless 0$ на $V = C_0$. Тоді система (1) має хоча б один ω-періодичний розв'язок.

Доведення. Введемо у розгляд вектор $\overline{N}$ – зовнішньої нормалі до поверхні $V = C_0$ у будь-якій її точці. Очевидно: $\overline{N} = \overline{grad} V = \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}, \frac{\partial V}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial y_n}, 0\right)$. З іншого боку, позначимо через $\overline{T}$ – вектор поля напрямів, який визначається системою (1) у тій самій точці. Очевидно $\overline{T} = \left(f_1, f_2, \ldots, f_n, 1\right)$.

Тоді геометрично $W = \left(\overline{N}, \overline{T}\right)$ і тому, якщо $W \gtrless 0$ на $V = C_0$, то поверхня $V = C_0$ є поверхнею без контакту для системи (1). Причому, якщо $W > 0$, то при зростанні (спаданні) x усі точки на поверхні $V = C_0$ є точками строгого виходу (входу), а якщо $W < 0$ — строгого входу (виходу).

Нехай для визначеності $W > 0$. Розглянемо у $\mathbf{R}^{n+1}$ область $D\left(a, \omega, C_0\right)$, обмежену поверхнями $x = a$; $x = a + \omega$; $V\left(y_1, \ldots, y_n\right) = C_0$. Тоді при спаданні x усі точки поверхні $V = C_0$ є точками строгого входу. І тому інтегральна крива, яка відповідає розв'язку системи (1), що проходить через будь-яку точку області $\overline{D}\left(a, \omega, C_0\right)$, при спаданні x не вийде за межі $D\left(a, \omega, C_0\right)$ і може бути продовжена до гіперплощини $x = a$.

З того, що розв'язок системи (1) неперервно залежить від початкових даних, одержимо неперервне відображення $\mathbf{A}$

$$\text{області } \begin{cases} 0 \le V \le C_0, \\ x = a + \omega \end{cases} \text{ в область } \begin{cases} 0 \le V \le C_0, \\ x = a \end{cases}.$$

Далі скористаємося відомим принципом Боля–Брауера нерухомої точки: якщо n-мірна ($n \ge 1$) замкнена куля або тіло, гомеоморфне їй, неперервно відображається у себе, тоді існує хоча б одна нерухома точка цього відображення, яка належить кулі (тілу).

Таким чином, нерухомій точці побудованого нами відображення $\mathbf{A}$ буде відповідати ω-періодичний розв'язок системи (1).

У випадку, коли $W < 0$, міркування аналогічні, але при зростанні x.

Отже, доведено, що система (1) має хоча б один ω-періодичний розв'язок.

Застосування теореми 1 пов'язане з побудовою функції Ляпунова $V\left(y_1, \ldots, y_n\right)$. Але, у загальному випадку, ніяких методів цієї побудови дати неможливо. У наступній теоремі розглянемо частковий випадок, коли $V = \sum_{k=1}^{n} y_k^2$.

Теорема 2. Нехай для системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} y_k' = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\left(x, y_1, \ldots, y_n\right) y_j + g_k\left(x, y_1, \ldots, y_n\right), \\ k = \overline{1, n} \end{cases} \tag{2}$$

виконуються такі умови:

(I) $a_{kj}\left(x, y_1, \ldots, y_n\right),\ g_k\left(x, y_1, \ldots, y_n\right) \in \mathbf{C}^{0,1,\ldots,1}_{x, y_1, \ldots, y_n}\left(\mathbf{R}^{n+1}\right),\ k, j = \overline{1, n};\ \sum_{k=1}^{n} g_k^2\left(x, 0, \ldots, 0\right) > 0;$

(II) $\exists\, 0 < \omega = const$: $a_{kj}\left(x + \omega, y_1, \ldots, y_n\right) = a_{kj}\left(x, y_1, \ldots, y_n\right),$

$$g_k\left(x + \omega, y_1, \ldots, y_n\right) = g_k\left(x, y_1, \ldots, y_n\right),\ k, j = \overline{1, n};$$

(III) $\exists\, 0 < \alpha_k = const$: $\left|a_{kk}\left(x, y_1, \ldots, y_n\right)\right| \ge \alpha_k,\ k = \overline{1, n},\ \forall \left(x, y_1, \ldots, y_n\right) \in \mathbf{R}^{n+1},$

тобто $\quad \left(a_{kk} \ge \alpha_k > 0\right) \vee \left(a_{kk} \le -\alpha_k < 0\right);$

(IV) $\exists 0 < M_k = const$, що в $\mathbf{R}^{n+1}$: $\left|g_k\left(x, y_1, ..., y_n\right)\right| \le M_k$, $k = \overline{1, n}$;

(V) $a_{kj}\left(x, y_1, ..., y_n\right) = -a_{jk}\left(x, y_1, ..., y_n\right)$, $\forall\left(x, y_1, ..., y_n\right) \in \mathbf{R}^{n+1}$, $\forall k \ne j$.

Тоді система (2) має хоча б один ω-періодичний розв'язок.

Доведення. Без обмеження загальності припустимо, що

$$a_{kk}\left(x, y_1, ..., y_n\right) \ge \alpha_k > 0, \ \forall\left(x, y_1, ..., y_n\right) \in \mathbf{R}^{n+1}, \ k = \overline{1, n}.$$

Розглянемо поверхню

$$V \equiv \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = r^2, \tag{3}$$

де $0 < r$ – поки що невизначена константа. Тоді, зберігаючи попередні позначення теореми 1, дістанемо

$$W = \sum_{k=1}^{n} 2y_k\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} y_j + g_k\right) = 2\sum_{k=1}^{n} a_{kk} y_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} y_k g_k.$$

Якщо тепер виконані умови (III), (IV), то на поверхні (3) маємо

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kk} y_k^2 \ge \left(\min_{k=\overline{1,n}} \alpha_k\right) \cdot r^2; \quad \left|\sum_{k=1}^{n} y_k g_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} M_k r.$$

Отже,

$$W \ge \min_{k=\overline{1,n}} \alpha_k \cdot r^2 - r\sum_{k=1}^{n} M_k = r^2\left(\min_{k=\overline{1,n}} \alpha_k - \frac{\sum_{k=1}^{n} M_k}{r}\right).$$

Позначимо через $\alpha = \min\limits_{k=\overline{1,n}} \alpha_k$. Підберемо r_0 настільки великим, щоб

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} M_k}{r} < \frac{\alpha}{2}, \text{ тоді } W \ge r_0^2\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r_0^2 \alpha}{2} > 0.$$

І тому за теоремою 1 система (2) має хоча б один ω-періодичний розв'язок.

Теорема доведена.

Зауваження. Бачимо, що умову (V) можна зняти, якщо зажадати, щоб $\left|a_{kj}\right| \le P_{kj}$ в $\mathbf{R}^{n+1}$, $\forall k \ne j$, $0 < P_{kj} = const$, та $\sum\limits_{k,j=1}^{n} P_{kj} < \frac{\alpha}{4}$.

У цьому випадку матимемо:

$$\left|\sum_{k \ne j=1}^{n} y_k y_j a_{kj}\right| \le r_0^2 \sum_{k \ne j=1}^{n} P_{kj} < \frac{r_0^2 \alpha}{4}.$$

Приклад 1. Розглянемо систему

$$\begin{cases} y_1' = \left(2\exp\left(y_2^4\right) + \sin x\right) y_1 - \exp\left(y_1^2\right) y_2 + \exp\left(\sin x - \left(y_1^2 + y_2^2\right)\right) \\ y_2' = \exp\left(y_1^2\right) y_1 + \left[y_1^4 + \ln\left(\exp\left(\sin^2 x + 1\right) + y_2^2\right)\right] y_2^2 + \dfrac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} + \ln\sqrt{y_1^2 + y_2^2} \end{cases} \tag{4}$$

Розв'язок. Розглянемо поверхню: $V \equiv y_1^2 + y_2^2 = C_0^2$. Шукатимемо C_0 $\left(C_0 > 0\right)$. Матимемо

$$\left(\frac{\overline{N}}{2}, \overline{T}\right) = \left(2\exp\left(y_2^4\right) + \sin x\right)y_1^2 + \left[y_1^4 + \ln\left(\exp\left(\sin^2 x + 1\right) + y_2^2\right)\right]y_2^2 +$$

$$+ y_1 \exp\left(\sin x - \left(y_1^2 + y_2^2\right)\right) + y_2\left(\frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} + \ln\sqrt{y_1^2 + y_2^2}\right) .$$

Оскільки

$$\left(2\exp\left(y_2^4\right) + \sin x\right)y_1^2 + \left[y_1^4 + \ln\left(\exp\left(\sin^2 x + 1\right) + y_2^2\right)\right]y_2^2 \geq y_1^2 + y_2^2. = C_0^2 > 0,$$

то

$$\left(\frac{\overline{N}}{2}, \overline{T}\right) \geq C_0^2\left[1 + \mathbf{O}\left(\frac{\exp\left(\sin x - C_0^2\right)}{C_0}\right) + \mathbf{O}\left(\frac{1 + \ln C_0}{C_0}\right)\right] \geq \frac{C_0^2}{2} > 0.$$

Тут скористаємось тим, що

$$\left(\lim_{C_0 \to +\infty} \frac{\exp\left(\sin x - C_0^2\right)}{C_0} = 0\right) \Rightarrow \left(\exists C_0 >> 1:\ \frac{\exp\left(\sin x - C_0^2\right)}{C_0} < \frac{1}{4}\right); \tag{5}$$

$$\left(\lim_{C_0 \to +\infty} \frac{1 + \ln C_0}{C_0} = 0\right) \Rightarrow \left(\exists C_0 >> 1:\ \frac{1 + \ln C_0}{C_0} < \frac{1}{4}\right).$$

Таким чином, можемо зробити висновок: система (4) диференціальних рівнянь має хоча б один 2π-періодичний розв'язок в області $V \equiv y_1^2 + y_2^2 \leq C_0^2$, де C_0 задовольняє умови (5).

Розглянемо ще одну теорему про системи диференціальних рівнянь з трикутною матрицею коефіцієнтів у відповідній скороченій системі рівнянь.

Теорема 3. Нехай для системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} y_k' = \sum\limits_{j=1}^{k} a_{kj}\left(x, y_1, \ldots, y_n\right)y_j + g_k\left(x, y_1, \ldots, y_n\right), \\ k = \overline{1, n} \end{cases} \tag{6}$$

виконані умови (I) – (IV) теореми 2, а також існують такі додатні сталі P_{kj}, що в $\mathbf{R}^{n+1}$: $\left|a_{kj}\left(x, y_1, \ldots, y_n\right)\right| \leq P_{kj}$, $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, k-1}$. Тоді система (6) має хоча б один ω-періодичний розв'язок.

Доведення. Як і раніше, без обмеження загальності припустимо, що

$$a_{kk}\left(x, y_1, \ldots, y_n\right) \geq \alpha_k > 0,\ \forall\left(x, y_1, \ldots, y_n\right) \in \mathbf{R}^{n+1},\ k = \overline{1, n}.$$

Розглянемо область $G\left(\delta_1, \ldots, \delta_n\right) = \begin{bmatrix} x \in \mathbf{R} \\ \left|y_k\right| \leq \delta_k \\ k = \overline{1, n} \end{bmatrix}$, де $0 < \delta_k$ – поки що невизначені константи. Тоді $\partial G = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \partial G_k$, де $\partial G_л = \begin{bmatrix} x \in \mathbf{R} \\ y_k^2 = \delta_k^2 \\ \left|y_j\right| \leq \delta_j,\ j \neq k \end{bmatrix}$.

Підберемо $\delta_л$, $k=\overline{1,n}$ так, щоб ∂G була для системи (6) поверхнею без контакту. На ∂G_k: $\dfrac{\overline{N}_k}{2}=\left(0,\ldots,0,y_k,0,\ldots,0\right)$, $k=\overline{1,n}$, де $\overline{N}_k\left(k\in\overline{1,n}\right)$ — вектор зовнішньої нормалі до поверхні ∂G_k $\left(k\in\overline{1,n}\right)$ у довільній її точці. Тоді

$$\left(\frac{\overline{N}_k}{2},\overline{T}\right)=a_{k1}y_1y_k+a_{k2}y_2y_k+\ldots+a_{kk}y_k^2+y_kg_k=$$

$$=\delta_k^2\left[a_{kk}+\frac{a_{k1}y_1y_k}{\delta_k^2}+\ldots+\frac{a_{k,k-1}y_{k-1}y_k}{\delta_k^2}+\frac{y_kg_k}{\delta_k^2}\right].$$

За умовами теореми та означення ∂G_k неважко бачити, що

$$a_{kk}\geq\alpha_k>0;\ \left|\frac{a_{kj}y_jy_k}{\delta_k^2}\right|\leq\frac{P_{kj}\delta_j}{\delta_k};\ \left|\frac{y_kg_k}{\delta_k^2}\right|\leq\frac{M_k}{\delta_k},\ k\in\overline{1,n};\ j=\overline{1,k-1}.$$

Підберемо тепер послідовно δ_k настільки великими, щоб

$$\sum^{k-1}\frac{P_{kj}\delta_j}{\delta_k}<\frac{\alpha_k}{4};\ \frac{M_k}{\delta_k}<\frac{\alpha_k}{4};\ k\in\overline{1,n}.$$

Тоді, $\forall x\in\mathbf{R}$ матимемо

$$\left|a_{kk}+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{a_{kj}y_jy_k}{\delta_k^2}+\frac{y_kg_k}{\delta_k^2}\right|\geq\alpha_k-\frac{\alpha_k}{4}-\frac{\alpha_k}{4}=\frac{\alpha_k}{2}>0.$$

Отже, поверхні ∂G_k $\left(k=\overline{1,n}\right)$ є поверхнями строгого входу при спаданні x, а це означає, що і ∂G є поверхнею строгого входу.

У результаті можна сказати, що до області, яка обмежена циліндричним паралелепіпедом G та гіперплощинами $x=a$ та $x=a+\omega$, може бути застосовано критерій існування ω-періодичного розв’язку, побудований на принципі Боля – Брауера нерухомої точки

Аналогічні міркування мають місце, коли $a_{kk}<-\alpha_k<0$ при зростанні x. Також очевидно, оскільки умови теореми правильні в $\mathbf{R}^{n+1}$, то якими б великими не були δ_k, $k=\overline{1,n}$, умови теореми існування Пікара – Коші залишаються правильними в області $\mathbf{G}\subset\mathbf{R}^{n+1}$.

Теорема доведена.

Зауваження. Неважко побачити, що за умовою теореми діагональні коефіцієнти можуть бути необмеженими за модулем зверху функціями в $\mathbf{R}^{n+1}$.

Приклад. Розглянемо систему

$$\begin{cases} y_1'=\left(2\exp\left(y_2^4\right)+\cos x\right)y_1-arctgy_2+\sin^2 x \\ y_2'=\exp(\sin x)y_1+\left(2+\sin x+y_1^2+y_2^2\right)y_2+\dfrac{y_1^2}{1+y_1^2}+\cos^2 x. \end{cases}$$

Тут в $\mathbf{R}^3$ маємо

$$a_{11}(x,y_1,y_2)=2+\exp(y_2^4)+\cos x\geq 1;\ a_{22}(x,y_1,y_2)=2+\sin x+y_1^2+y_2^2\geq 1,$$

тобто

$$\alpha_1=\alpha_2=1\ (\Leftrightarrow \alpha_k=1,\ k=1{,}2).$$

Далі

$$(a_{21}(x,y_1,y_2)=\exp(\sin x)\leq e)\Rightarrow (P_{21}=e);$$

$$\left(\left|g_1(x,y_1,y_2)\right|=\left|\sin^2 x-arctgy_2\right|\leq 1+\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \left(M_1=1+\frac{\pi}{2}\right);$$

$$\left(\left|g_2(x,y_1,y_2)\right|=\left|\frac{y_1^2}{1+y_1^2}+\cos^2 x\right|<2\right)\Rightarrow (M_2=2);\ k=1{,}2;\ j=\overline{1,k}.$$

Крім того, неважко бачити, що $a_{kj}, g_k \in \mathbf{C}^{0,1,1}_{x,y_1,y_2}(\mathbf{R}^3)$, $k=1{,}2$; $j=\overline{1,k}$. Іншими словами, усі умови теореми 3 виконуються.

Розглянемо область

$$\Omega=\begin{bmatrix}0\leq x\leq 2\pi\\ \left|y_k\right|\leq \delta_k\\ k=1{,}2\end{bmatrix}$$

– прямокутний паралелепіпед, звідки одержимо: $\partial\,\Omega=\partial\,\Omega_1\cup\partial\,\Omega_2$,

де $\partial\ \Omega_1=\begin{bmatrix}0\leq x\leq 2\pi\\ y_1^2=\delta_1^2\\ \left|y_2\right|\leq\delta_2\end{bmatrix}$; $\partial\ \Omega_2=\begin{bmatrix}0\leq x\leq 2\pi\\ y_2^2=\delta_2^2\\ \left|y_1\right|\leq\delta_1\end{bmatrix}$.

Знайдемо далі δ_1 і δ_2 такими, щоб:

$$\left(\frac{M_k}{\delta_k}<\frac{\alpha_k}{4},k=1{,}2\right)\Rightarrow\left(\frac{M_1}{\delta_1}<\frac{\alpha_1}{4};\frac{M_2}{\delta_2}<\frac{\alpha_2}{4}\right)\Leftrightarrow\left(\delta_1>\frac{4M_1}{\delta_1}=4\left(1+\frac{\pi}{2}\right)=4+2\pi;\delta_1>\frac{4M_2}{\delta_2}=4\cdot 2=8\right)$$

Крім того:

$$\left(\frac{P_{21}\delta_1}{\delta_2}<\frac{\alpha_2}{4}\right)\Rightarrow\left(\delta_2>\frac{4P_{21}\delta_1}{\alpha_2}\right)\Leftrightarrow\left(\delta_2>4e\delta_1>4e\cdot 4\left(1+\frac{\pi}{2}\right)=16\left(1+\frac{\pi}{2}\right)e\right).$$

Таким чином, коли $\delta_1>4+2\pi$ та $\delta_2>\max\left\{8;\,16\left(1+\frac{\pi}{2}\right)e\right\}=8(2+\pi)e$. (*)

За теоремою 3 одержимо, що початкова система диференціальних рівнянь має хоча б один 2π-періодичний розв’язок в області

$$\overline{\Omega}=\begin{bmatrix}x\in\mathbf{R}\\ \left|y_k\right|\leq\delta_k\\ k=1{,}2\end{bmatrix},$$

де δ_k $(k=1{,}2)$ задовольняють умови (*).