УДК 548/946

Гук В.М., Костишин Л.П.
НУ "Львівська політехніка", кафедра вищої математики
Прикарпатський університет ім. В. Стефаника, Ів-Франківськ

КРАТНІ РІЗНОВИДИ БАГАТОПАРАМЕТРИЧНИХ АГРЕГАТИВНО-ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

The technic applied for the investigation of iterated aggregation methods and the construction of new and known iterated methods are proposed for multiple aggregative-iterated algorithms.

Для кратних агрегативно-ітераційних алгоритмів запропоновано методику придатну для дослідження методів ітеративного агрегування та для побудови нових і відомих ітераційних методів.

Серед методів багатопараметричного ітеративного агрегування можна виокремити алгоритми кратного [1, 2] агрегування як найпростіші з різновидів багатопараметричних агрегативно-ітераційних методів. Для кратних алгоритмів за допомогою методики із [3, 4] отримують такі ж результати, які характерні для однопараметричного випадку. Ці результати наближені до відповідних результатів із [3,4].

Виклад будемо проводити для системи лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду

$$x = Ax + b. \tag{1}$$

Будемо вважати, що матрицю A (яку ототожнюємо з оператором A) можна подати у вигляді $A=A_1+A_2$ таким способом, що для матриці A_1 задані власні числа λ_i і відповідні їм власні вектотри φ_i матриці A_1^*, спряженої з матрицею A_1 та власні вектори ψ_i матриці A_1 ($i = \overline{1,R}$, $R \le N$). Розглянемо ситуацію, коли власні числа λ_i є простими. Будемо вважати, що характерно для симетричної матриці A_1, що λ_i – дійсні, а системи векторів φ_i та ψ_i є ортонормованими. Записавши систему (1) у вигляді

$$x = A_1 x + A_2 x + b \tag{2}$$

і враховуючи, що можна вважати, що

$$A_1 = \sum_{i=1}^{R} \lambda_i B_i, \quad B_i = \varphi_i^T \psi_i, \tag{3}$$

використовуватимемо також для системи рівнянь (1) запис вигляду

$$x = \sum \lambda_i \varphi_i^T \psi_i x + A_2 x + b.$$

До цієї системи приєднуємо додаткову систему

$$y = \Lambda y - (\varphi, A_2 x)_R - (\varphi, b)_R, \Lambda = diag\{\lambda_1, \dots, \lambda_R\} \tag{4}$$

Запис $(\varphi, x)_R$ означає, що $(\varphi, x)_R = diag\{(\varphi_1, x), \dots, (\varphi_R, x)\}$

Припустимо, що $\left(x^*, y^*\right)$ є розв'язком системи (1), (4). Тоді, маючи на увазі (2), (3), отримаємо:

$$\left(\varphi, x^*\right)_R + y^* = \left(\varphi, A_1 x^* + A_2 x^* + b\right)_R + \Lambda y^* - \left(\varphi, A_2 x^*\right)_R - (\varphi, b)_R =$$
$$= \left(A_1^* \varphi, x^*\right)_R + \left(\varphi, A_2 x^*\right)_R + (\varphi, b)_R = \Lambda\left(\varphi, x^*\right)_R + \Lambda y^*.$$

Якщо $\lambda \neq 1 \quad \left(i = \overline{1, R}\right)$, то звідси випливає для $x = x^*, \quad y = y^*$ рівність $(\varphi, x)_R + y = \theta_R$, де θ_R – нульова матриця розмірності R x R.

Нехай $\varepsilon_R = \{(x, y) \mid x \in E_N, y \in E_R\}$ де E_N, E_R – евклідові векторні простори розмірності R та N відповідно. Наведені щойно міркування оформимо у вигляді окремого твердження.

Лема 1. Якщо $\{x^*, y^*\}$ – розв'язок системи (1), (4), то $\{x^*, y^*\} \in \varepsilon_R$.

Сформульована лема дає змогу дослідити ітераційний процес

$$x^{(n+1)} = A_1 x^{(n)} + A_2 x^{(n)} + a^{(n)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + b, \tag{6}$$

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} + \alpha_0^{(n)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) - \left(\varphi, A_2 x^{(n)}\right)_R - (\varphi, b)_R \tag{7}$$

із стартовим наближенням $\left\{x^{(0)}, y^{(0)}\right\} \in \varepsilon_R$. Квадратну матрицю $\alpha_0^{(n)}$ розмірності R та прямокутну матрицю $a^{(n)}$ шириною R та висотою N підпорядковуємо вимозі, щоб

$$\left(\varphi, a^{(n)}\right)_R + \alpha_0^{(n)} = \Lambda \qquad (n = 0, 1, \dots) \tag{8}$$

Залежність $a^{(n)}$ та $\alpha_0^{(n)}$ від n є істотним фактором, який дає змогу охопити множиною алгоритмів вигляду (6), (7) відповідні методи саме ітеративного агрегування (див., наприклад, [3, 4]).

Результат, сформульований у вигляді такої леми, є вирішальним фактором, який справджує доцільність розгляду алгоритмів вигляду (6), (7), і використовується при дослідженні їх збіжності.

Лема 2. Якщо $\left\{x^{(0)}, y^{(0)}\right\} \in \varepsilon_R$, то $\left\{x^{(n)}, y^{(n)}\right\} \in \varepsilon_R \, (n = 0, 1, \dots)$

Доведення. Зроблені припущення дають змогу скористатися з такого рівняння:

$$\left(\varphi, x^{(n+1)}\right)_R + y^{(n+1)} = \left(\varphi, A_1 x^{(n)}\right)_R + \left(\varphi, a^{(n)}\right)_R \left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + \left(\varphi, A_2 x^{(n)}\right)_R - (\varphi, b)_R =$$
$$= \left(A_1^* \varphi, x^{(n)}\right)_R + \left[\left(\varphi, a^{(n)}\right)_R + \alpha_0^{(n)}\right] y^{(n)} + \left[\Lambda - \left(\varphi, a^{(n)}\right)_R - \alpha_0^{(n)}\right] y^{(n+1)} = \Lambda\left[\left(\varphi, x^{(n)}\right)_R + y^{(n)}\right],$$

Якщо n = 0, то звідси випливає, що $\left\{x^{(1)}, y^{(1)}\right\} \in \varepsilon_R$. Оскільки таке ж міркування годиться і для переходу від n до n+1, то покликанням на принцип індукції можна завершити доведення.

З лем 1 та 2 випливає, що для великої матриці вигляду

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 d_{11} \dots \lambda_R d_{1R} \\ \lambda_1 d_{N1} \dots \lambda_R d_{NR} \end{pmatrix} \overset{df}{=} \left(\lambda_1 d_1, \dots, \lambda_R d_R\right) \tag{9}$$

будемо мати

$$D\left[\left(\varphi, x^{(n)} - x^*\right)_R + y^{(n)} - y^*\right] = \theta_N, \tag{10}$$

де θ_N – нульова матриця розмірності NxN. Рівність (10) дає змогу отримувати при $\left\{x^{(0)}, y^{(0)}\right\} \in E_N$ із (1), (4), (6), (7) рівності

$$y^{(n+1)} - y^* = -\left(I_R - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1}\left(A_2^*\varphi,\, x^{(n)} - x^*\right) + \\ + \left(I_R - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1} \alpha_0^{(n)} \left(y^{(n)} - y^*\right), \tag{11}$$

$$x^{(n+1)} - x^* = A_1\left(x^{(n)} - x^*\right) + A_2\left(x^{(n)} - x^*\right) + \left(I_R - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1} a^{(n)} \left(A_2^*\varphi, x^{(n)} - x^*\right)_R + \\ + \left(I_R - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1}\left(I_R - \Lambda\right) a^{(n)} \left(y^{(n)} - y^*\right), \tag{12}$$

де I_R – одинична матриця порядку R. Поєднання рівностей (11), (12) з (10) дає змогу отримувати ті чи інші достатні умови збіжності ітераційного процесу (6), (7). Наведемо один з прикладів такого поєднання. При $d_i = \varphi_i$ $\left(i = \overline{1, R}\right)$ рівність (12) можна подати у вигляді

$$x^{(n+1)} - x^* = A_2\left(x^{(n)} - x^*\right) + \left(I_R - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1} a^{(H)} \left(A_2^*\varphi,\, x^{(H)} - x^*\right)_R + \\ + \left(I_R - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1}\left(I_R - \Lambda\right)\left(a^{(n)} - A_1\right)\left(y^{(n)} - y^*\right).$$

Якщо, зокрема, власні числа λ_i і відповідні їм власні вектори φ_i та ψ_i матриць A і A_1 збігаються, то для збіжності послідовності $\left\{x^{(n)}\right\}$ до x* достатньо, щоб був меншим за одиницю спектральний радіус $\rho(A_2)$ матриці A_2. Ітераційний процес (6), (7) в такому випадку можна звести до формули

$$x^{(n+1)} = A_1 x^{(n)} + A_2 x^{(n)} + b \tag{13}$$

з додатковою умовою

$$\left(\varphi, x^{(n)}\right)_R = \theta_R \,(n = 0, 1, \ldots). \tag{14}$$

При цьому для $\rho(A) > 1$, $\rho(A_2) < 1$ рівності (14) можна отримати як контрольні, використовуючи їх для коригування ітерацій для забезпечення стійкості реального ітераційного процесу.

При

$$\left|\lambda_N\right| \le \ldots \le \left|\lambda_R\right| \le \ldots \le \left|\lambda_1\right| < 1 \tag{15}$$

формули (13) і (14) для n = 0 забезпечують прискорення збіжності методу послідовних наближень (13) для системи (1), яке можна характеризувати відношенням $\tau = \dfrac{\left|\lambda_R\right|}{\left|\lambda_1\right|}$ порівняно із методом послідовних наближень (13) задовільного початкового наближення $x^{(0)}$ з N-мірного евклідового простору E_N.

1. Петрович Р.Й., Шувар Б.А. Агрегативно-ітеративні алгоритми для розв'язування рівнянь в банахових просторах // Матер. Всеукр. наук. конф. "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях" присвяченої 70-річчю від дня народження проф. П.С.Казімірського. 5-7 червня 1995 р. 2. Петрович Р.Й., Шувар Б.А. Метод багатократного ітеративного агрегування для лінійних рівнянь з обмеженими операторами // Математика та психологія у системі: Зб. статей за матер. І Міжнар. наук.-практ. конф. Ч.1. Одеса, 1996. С.108-109. 3. Шувар Б.А. Один способ приближенного решения системы линейных алгебраических уравнений. Рукопись деп. в Укр НИИНТИ 10.06.88, № 1472-4 к 88. 4. Шувар Б.А. Обобщение метода итеративного агрегирования. Рукопись деп. в Укр НИИНТИ 15.01.92. № 43 – Ук 92. 5. Красносельський М.А. и др. Позитивные линейные системы. М., 1985.