УДК 517. 946+511.37

**Дасюк Я.І., Ільків В.С., Пукач П.Я.**
НУ “Львівська політехніка”, кафедра обчислювальної математики і програмування

# КРАЙОВА ДВОТОЧКОВА НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ



**We consider time nonlocal two-point boundary value problem for general linear partial system with variable coefficients in cartesian product of time interval and space multidimensional torus. Existence conditions are connected with the problem of small denominators. The estimates for small denominators which appear by using the metrical number theory.**

**Розглядається крайова задача із загальними двоточковими нелокальними за часовою змінною умовами для безтипної нормальної системи лінійних диференціальних рівнянь зі змінними за часом коефіцієнтами в області, яка є декартовим добутком часового відрізка і багатовимірного просторового тора. Досліджуються умови існування та єдиності розв’язку цієї задачі в шкалі гільбертових просторів, періодичних за просторовими змінними функцій. Існування розв’язку пов’язане із проблемою малих знаменників. Оцінки знизу таких знаменників одержані за допомогою метричної теорії чисел.**

Розглядається система диференціальних рівнянь з частинними похідними та залежними від змінної $t$ коефіцієнтами

$$L\left(t,\frac{\partial}{\partial t},D\right)u \equiv \frac{\partial^n u}{\partial t^n} + \sum_{|\hat{s}|\le N, s_0<n} A_{\hat{s}}(t) D^s \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = 0 \tag{1}$$

та двоточкові нелокальні умови

$$\sum_{|\hat{s}|\le N_J, s_0<n} a_{\hat{s}}^j D^s \left.\frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}}\right|_{t=0} + \sum_{|\hat{s}|\le N_J, s_0<n} b_{\hat{s}}^j D^s \left.\frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}}\right|_{t=T} = \varphi_j, \quad j=\overline{1,nm}, \tag{2}$$

де $A_s(t)$ – квадратні розміри $m$ матриці із комплексними неперервними на відрізку $[0,T]$ елементами; $a_{\hat{s}}^j$ та $b_{\hat{s}}^j$ – комплексні вектор-рядки розміру $m$, $N \ge n-1$, $N_j \ge n-1$ $\left(j=\overline{1,nm}\right)$, $T>0$, $\hat{s}=\left(s_0,s_1,\dots,s_p\right)=\left(s_0,s\right)$, $|\hat{s}|=s_0+s_1+\dots+s_p$, $D=\left(D_1,\dots,D_p\right)$, $D_j=-i\,\partial/\partial x_j$ $\left(j=\overline{1,p}\right)$. Вважаємо, що задачі функції $\varphi_j(x)$ та шукана вектор-функція $u=u(t,x)=\left(u_1,\dots,u_m\right)$ є $2\pi$ -періодичними за змінною $x=\left(x_1,\dots,x_p\right)$.

Будемо використовувати лінійні псевдодиференціальні операції $F(D)$, що діють за змінною $x$, а саме, $F(D)e^{ikx}=F(k)e^{ikx}$, де $\{F(k)\}_{k\in\mathbf{Z}^p}$ – деяка послідовність комплексних чисел $kx=\left(k_1x_1+\dots+k_px_p\right)$. Зокрема послідовності $\tilde{k}=\sqrt{1+k_1^2+\dots+k_p^2}$ ставимо у відповідність операцію $\tilde{D}$, а послідовності $\hat{k} = \left(k / \tilde{k}, 1 / \tilde{k}\right)$ – операцію $\hat{D}$. Позначимо через $\mathbf{E}_{q,l}\left(q, l \in \mathbf{R}\right)$ – гільбертовий простір функцій, який отриманий в результаті поповнення множини тригонометричних поліномів $\varphi(x) = \sum \hat{\varphi}(k) e^{ikx}$ за нормою $\|\varphi\|^2_{\mathbf{E}_{q,l}} = (2\pi)^p \sum\limits_{k \in \mathbf{Z}^p} e^{2q\tilde{k}^l} \left|\hat{\varphi}(k)\right|^2$. Очевидно, що $\|\varphi\|^2_{\mathbf{E}_{q,l}} = \left\| e^{q\tilde{D}^l} \varphi \right\|^2_0$, де $\|\cdot\|^2_0 = \|\cdot\|^2_{\mathbf{E}_{0,0}}$. Вектор-функція $\varphi$ належить простору $\mathbf{E}_{q,l}$, якщо кожна з її компонент $\varphi_j$ належить простору $\mathbf{E}_{q,l}$ і $\|\varphi\|^2_{\mathbf{E}_{q,l}} = \sum\limits_j \left\|\varphi_j\right\|^2_{\mathbf{E}_{q,l}}$.

Частинні випадки задачі (1), (2) вивчалися, зокрема, у працях [1-3].

Введемо змінну $v = \left(u, \partial u / \partial t, \dots, \partial^{n-1} u / \partial t^{n-1}\right)$ і розглянемо нелокальну крайову задачу для системи диференціальних рівнянь першого порядку за часовою змінною $t$

$$\partial v / \partial t = L(t, D) v, \qquad A(D) v\big|_{t=0} + B(D) v\big|_{t=T} = \varphi, \tag{3}$$

де $\varphi = \mathrm{col}\left(\varphi_1, \dots, \varphi_{nm}\right)$, оператор-матриця $A(D) = \left( \sum\limits_{|\hat{s}| \le N_j} a^j_{\hat{s}} D^s \right)_{j=\overline{1,nm}, s_0=\overline{0,n-1}}$, оператор-матриця $B(D)$ визначається аналогічно через коефіцієнти $b^j_{\hat{s}}$, оператор-матриця $L(t, D)$ – побудована за коефіцієнтами $A_{\hat{s}}(t)$ системи (1).

Нехай для матриці $\left(L(t, D) + L^*(t, D)\right)/2$, де $L^*$ – ермітово спряжена до $L$ матриця

$$l(t, \lambda, D) = \lambda^{nm} + \sum_{i=1}^{nm} l_i(t, D) \lambda^{n-i}$$

характеристичний многочлен, причому многочлен $l_i(t, D) = \sum\limits_{|s| \le n_i} c_{i,s}(t) D^s$, $n_i$ – його степінь ($n_i = -\infty$, якщо $l_i(t, D) \equiv 0$) і $n_L = \max\limits_{n_i \ge 0} n_i / i$.

Якщо $E\left(t, \hat{D}\right)$ – фундаментальна матриця системи $\partial E / \partial t = \tilde{D}^{n_L} l\left(t, \hat{D}\right) E$, де $l\left(t, \hat{D}\right) = \tilde{D}^{-n_L} L\left(t, D / \tilde{D} \cdot \left(I / \tilde{D}\right)^{-1}\right)$, яка нормована одиничною матрицею так, що $E\left(t\left(\hat{D}\right), \hat{D}\right) = I_{nm}$ при деякому $0 \le t\left(\hat{D}\right) \le T$, то формальний розв'язок задачі (3) має такий вигляд

$$v(t, x) = E\left(t, \hat{D}\right) \left( A(D) E\left(0, \hat{D}\right) + B(D) E\left(t, \hat{D}\right) \right)^{-1} \varphi. \tag{4}$$

Нехай множини $K_1, \dots, K_p$ утворюють неперетинне розбиття множини $\mathbf{Z}^p$ таке, що $k \in K_j$ тоді і тільки тоді, коли $k_j > k_r$ $\left(r = \overline{1, j-1}\right)$ і $k_j \ge k_r$ $\left(r = \overline{j+1, p}\right)$. Позначимо через $Z_1\left(k_j\right) A_j Z_2^{-1}\left(k_j\right)$ і $Z_1\left(k_j\right) B_j Z_2^{-1}\left(k_j\right)$ головні частини матриць $A(k)$ і $B(k)$ стосовно змінної $k_j$, причому нехай $\alpha_j = \left(\alpha_{jr}\right)_{r=\overline{1,nm}}$ і $\beta_j = \left(\beta_{jr}\right)_{r=\overline{1,nm}}$ позначають головні діагоналі матриці $A_j$ та матриці $B_j$, де $Z_1(h) = \mathrm{diag}\left(h^{N_1},\ldots,h^{N_{nm}}\right)$, $Z_1(h) = \mathrm{diag}\left(I_m, hI_m,\ldots,h^{n-1}I_m\right)$.

Звідси випливає, що при $Z_1 = Z_1\left(\tilde{k}\right)$, $Z_2 = Z_2\left(\tilde{k}\right)$ матриці $\hat{A}(D) = Z_1^{-1}A(D)Z_2$ і $\hat{B}(D) = Z_1^{-1}B(D)Z_2$ мають обмежені норми.

Перетворимо формулу (4) до такого вигляду $v(t,x) = Z_2\hat{E}\left(t,\hat{D}\right)F^{-1}\left(\hat{D}\right)Z_1^{-1}\varphi$, який дає змогу записати таку оцінку [2]:

$$\left\|Z_2^{-1}v(t,\cdot)\right\|_{\mathbf{E}_{q,l}} \le \left\|\sqrt{F\left(t,\hat{D}\right)F_1\left(\hat{D}\right)}Z_1^{-1}\varphi\right\|_{\mathbf{E}_{q,l}}, \tag{5}$$

де

$$\hat{E}\left(t,\hat{D}\right) = Z_2^{-1}E\left(t,\hat{D}\right)Z_2, \quad F\left(\hat{D}\right) = \hat{A}\left(\hat{D}\right)\hat{E}\left(0,\hat{D}\right) + \hat{B}\left(\hat{D}\right)\hat{E}\left(T,\hat{D}\right),$$
$$F_1\left(\hat{D}\right) = \mathrm{tr}\left[F^*\left(\hat{D}\right)F\left(\hat{D}\right)\right], \quad F\left(t,\hat{D}\right) = \mathrm{tr}\left[\hat{E}^*\left(t,\hat{D}\right)\hat{E}\left(t,\hat{D}\right)\right],$$

$\mathrm{tr}[\cdot]$ – слід матриці. Для оператора $F_1\left(\hat{D}\right)$ справедлива формула

$$F_1\left(\hat{D}\right) \le C_1\left[\max\left(F\left(0,\hat{D}\right), F\left(T,\hat{D}\right)\right)\right]^{nm-1}\left|\det F\left(\hat{D}\right)\right|^{-2}, \tag{6}$$

а функція $F\left(t,\hat{D}\right) \equiv \mathrm{tr}\left[E^*\left(t,\hat{D}\right)E\left(t,\hat{D}\right)\right]$ задовольняє звичайне диференціальне рівняння $F'\left(t,\hat{D}\right) \equiv \tilde{D}^{n_L}\,\mathrm{tr}\left[E^*\left(t,\hat{D}\right)\left(l^*\left(t,\hat{D}\right) + l\left(t,\hat{D}\right)\right)E\left(t,\hat{D}\right)\right]$ та умову $F\left(t\left(\hat{D}\right),\hat{D}\right) = nm$.

Якщо $2\Lambda\left(t,\hat{D}\right)$ та $2\lambda\left(t,\hat{D}\right)$ відповідно максимальне і мінімальне власні значення матриці $l^*\left(t,\hat{D}\right) + l\left(t,\hat{D}\right)$, то із останнього диференціального рівняння отримаємо нерівності $2\tilde{D}^{n_L}\lambda\left(t,\hat{D}\right)F\left(t,\hat{D}\right) \le F'\left(t,\hat{D}\right) \le 2\tilde{D}^{n_L}\Lambda\left(t,\hat{D}\right)F\left(t,\hat{D}\right)$.

Інтегруючи, отримаємо оцінку

$$F\left(t,\hat{D}\right) \le nm\cdot\exp\left(2\tilde{D}^{n_L} f\left(t,\hat{D}\right)\right), \tag{7}$$

де $f\left(t,\hat{D}\right) = \int\limits_{t(\hat{D})}^{t}\Lambda\left(\tau,\hat{D}\right)d\tau$ при $t \ge t\left(\hat{D}\right)$ і $f\left(t,\hat{D}\right) = \int\limits_{t(\hat{D})}^{t}\lambda\left(\tau,\hat{D}\right)d\tau$ при $t \le t\left(\hat{D}\right)$.

Для отримання оцінки визначника матриці $F\left(\hat{D}\right)$ використаємо метричний підхід [4–6], вважаючи $F\left(\hat{D}\right)$ функцією вектора $\gamma = \mathrm{col}\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_p,\beta_1,\ldots,\beta_p\right)$, причому, не обмежуючи загальності, вважаємо, що кожен коефіцієнт вектора $\gamma$ міститься у крузі $B$ радіуса $1/\sqrt{\pi}$ із центром у початку координат комплексної площини. Доведемо оцінку знизу $\left|\det F\left(\hat{D}\right)\right|^2$ для усіх $\gamma \in B^{2nmp}$ за винятком деякої множини, міра якої не більша за наперед задане мале число $\varepsilon$.

**Теорема 1.** Для кожного $\varepsilon > 0$ існує деяка множина $B_\varepsilon$ така, що $\mathrm{mes}\,B_\varepsilon \le \varepsilon$ *і*

$$\left|\det F\left(\hat{D}\right)\right|^2 \ge C_2(\eta)\varepsilon^{nm}\tilde{D}^{-2nm\eta}\exp\left(2\tilde{D}^{n_L} f_1\left(\hat{D}\right)\right) \tag{8}$$

*при* $\det F(0) \neq 0$, $\eta > p/2$, *де* $f_1(\hat{D}) = \max\limits_{t=0,T} \int\limits_{t(\hat{D})}^{t} l_1(\tau, \hat{D}) \tilde{D}^{-n_L} d\tau$, $2nmpC_3^2(\eta) \sum\limits_{k \in \mathbf{Z}^p} \tilde{k}^{2\eta} = 1$ *і*

$C_2(\eta) = \max\left( |\det F(0)|^2 \varepsilon^{-nm}, nmC_3^{2nm}(\eta) / p^{N_1 + \cdots + N_{nm}} \right)$.

**Доведення.** Для кожного $k \in K_j$ $\left( j = \overline{1, p} \right)$ факторизуємо матрицю $F(\hat{k})$ двома способами:

$$F(\hat{k}) = Z_1(k_j / \tilde{k}) G_j(\hat{k}) \hat{E}(0, \hat{k}) Z_2^{-1}(k_j / \tilde{k}), \quad F(\hat{k}) = Z_1(k_j / \tilde{k}) H_j(\hat{k}) \hat{E}(T, \hat{k}) Z_2^{-1}(k_j / \tilde{k}),$$

причому $G_j(\hat{k}) = A_j + \cdots$, $H_j(\hat{k}) = B_j + \cdots$, де три крапки означають доданки, що не залежать від елементів матриць $A_j$ і $B_j$ відповідно. Визначники матриць $Z_1(k_j / \tilde{k})$ і $Z_2^{-1}(k_j / \tilde{k})$ обмежені знизу сталими $\sqrt{1 / p^{N_1 + \cdots + N_{nm}}}$ і 1 відповідно. Крім того, за формулою Якобі

$$\left| \det \hat{E}(t, \hat{k}) \right|^2 \equiv \left| \det E(t, \hat{k}) \right|^2 = nm \exp\left( 2\tilde{k}^{n_L} \int\limits_{t(\hat{k})}^{t} l_1(\tau, \hat{k}) d\tau \right).$$

Нехай $\Delta_{jr}(\hat{k}) \neq 0$, $\delta_{jr}(\hat{k}) \neq 0$ – мінори матриць $G_j(\hat{k})$ і $H_j(\hat{k})$, які розміщені у рядках і стовпцях із номерами $r, r+1, \ldots, nm$ відповідно, тоді для $r = \overline{1, nm}$ маємо

$$\Delta_{jr}(\hat{k}) = \Delta_{j,r+1}(\hat{k}) \left( \alpha_{jr} - \Delta'_{jr}(\hat{k}) \right) \quad \text{і} \quad \delta_{jr}(\hat{k}) = \delta_{j,r+1}(\hat{k}) \left( \beta_{jr} - \delta'_{jr}(\hat{k}) \right),$$

де $\Delta'_{jr}(\hat{k})$ і $\delta'_{jr}(\hat{k})$ не залежать від змінної $\alpha_{jr}$ і $\beta_{jr}$, а $\Delta_{j,nm+1}(\hat{k}) = \delta_{j,nm+1}(\hat{k}) = 1$. Звідси отримаємо, що $\det G_j(\hat{k}) = \prod\limits_{r=1}^{nm} \left| \alpha_{jr} - \Delta'_{jr}(\hat{k}) \right|$, $\det H_j(\hat{k}) = \prod\limits_{r=1}^{nm} \left| \beta_{jr} - \delta'_{jr}(\hat{k}) \right|$.

Введемо множини

$$B_{jr}(k) = \left\{ \gamma \in B^{2nmp} : \left| \alpha_{jr} - \Delta'_{jr}(\hat{k}) \right| \leq \sqrt{\varepsilon} C_3(\eta) \tilde{k}^{-\eta} \right\},$$

$$B_{jr}(k) = \left\{ \gamma \in B^{2nmp} : \left| \alpha_{jr} - \Delta'_{jr}(\hat{k}) \right| \leq \sqrt{\varepsilon} C_3(\eta) \tilde{k}^{-\eta} \right\},$$

кожна з яких має міру $\varepsilon\pi C_3^2(\eta) \tilde{k}^{-2\eta}$ і вибравши за $B_\varepsilon$ об’єднання цих множин за індексами $j$, $r$, $k$, маємо нерівність $\operatorname{mes} B_\varepsilon \leq 2\varepsilon\pi nmpC_3^2(\eta) \sum\limits_{k \in \mathbf{Z}^p} \tilde{k}^{-2\eta}$. Для усіх векторів $\gamma \in B^{2nmp} \setminus B_\varepsilon$ виконуються протилежні нерівності

$$\left| \det G_j(\hat{k}) \right|, \quad \left| \det H_j(\hat{k}) \right| \geq \varepsilon^{nm/2} C_3^{nm}(\eta) \tilde{k}^{-nm\eta},$$

для усіх $k \neq 0$. Зібравши усі оцінки для множників розкладу матриці $F(\hat{k})$ разом, отримаємо нерівність (8). Теорема доведена.

Нехай $q(t) = \sup_{k \in \mathbf{Z}^p} \min_{0 \le t(\hat{k}) \le T} \left( f\left(t, \hat{k}\right) + (nm-1) \max\left( f\left(0, \hat{k}\right), f\left(T, \hat{k}\right)\right) - f_1\left(\hat{k}\right)\right)$. Тоді для всіх векторів $\gamma \in B^{2nmp} \setminus B_\varepsilon$ справедлива теорема про існування, єдиність та гладкість і неперервну залежність розв'язку задачі (1), (2) від правих частин крайових умов (2).

**Теорема 2.** Якщо $\tilde{D}^{\eta - N_j} \varphi_j \in \mathbf{E}_{q, n_L}$ для $\eta > p/2$, то існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) такий, що $\tilde{D}^{-j} \dfrac{\partial^j u}{\partial t^j}(t, \cdot) \in \mathbf{E}_{q-q(t), n_L}$.

**Доведення.** Доведення теореми випливає із нерівностей (6)–(8) та утвореної із них нерівності

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left\| \tilde{D}^{-j} \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(t, \cdot) \right\|^2_{\mathbf{E}_{q-q(t), n_L}} \le \varepsilon^{nm} C_4(\eta) \sum_{j=1}^{nm} \left\| \tilde{D}^{\eta - N_j} \varphi_j \right\|^2_{\mathbf{E}_{q, n_L}},$$

де $C_4(\eta)$ – деяка стала.

*1. Ільків В.С., Дасюк Я.І., Пелех Я.М. Крайова задача з нелокальними умовами для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними і змінними коефіцієнтами // Міжнар. наук. конф.”Сучасні проблеми механіки і математики”. Львів, 1998. С.133. 2. Ільків В.С., Дасюк Я.І., Салига Б.О. Крайова задача з нелокальними умовами для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними і змінними коефіцієнтами // Вісн. ДУ ”Львівська політехніка”. 1998. № 337. С.104–106. 3. Ільків В.С. Дослідження нелокальної крайової задачі для рівняння з частинними похідними за допомогою мінімізації в соболєвських просторах // Матем. студії. 1999. 11. № 2. С.167–176. 4. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1984. 5. Берник В.И., Пташник Б.И., Салыга Б.О. Аналог многоточечной задачи для гиперболических уравнений с частными производными // ДУ. 1977. Т.13. № 4. С.637-645. 6. Ільків В.С. Нелокальна крайова задача для нормальних анізотропних систем із частинними похідними і сталими коефіцієнтами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-матем. 1999. Вип.54. С.84–95.*

**УДК 517.948**

**Дашко О.М.**

НУ "Львівська політехніка", кафедра обчислювальної математики і програмування

## ПСЕВДОЧАПЛИГІНСЬКІ І ПСЕВДОКУРПЕЛЕВІ ДВОСТОРОННІ ІТЕРАЦІЙНІ ПРОЦЕСИ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ



**The proposed information concerns application of two-sided algorithms, the idea of which belongs to B. Shoowar and which don's require differentiation of the right side of the equation $x'(t) = f(t, x)$ with respect to $x$.**