УДК 517.956

Довганик І.Д.
Львівський національний університет ім. І.Франка

УЗАГАЛЬНЕНІ ГРАНИЧНІ ЗНАЧЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО РІВНЯННЯ В ЗГОРТКАХ

The necessary and sufficient condition in order that the regular inside solution of the equation

$$\frac{\partial^{2\alpha}u}{\partial x_1^{2\alpha}}+\frac{\partial^{2\alpha}u}{\partial x_2^{2\alpha}}+\frac{\partial^{2\alpha}u}{\partial x_3^{2\alpha}}=0,\ \ \alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right]$$

achieves of generalized boundary values from *D'*(*S*) on the boundary *S* is established.

Виведено необхідну та достатню умову того, щоб регулярний в середині області $\Omega\subset R^3$ розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^{2\alpha}u}{\partial x_1^{2\alpha}}+\frac{\partial^{2\alpha}u}{\partial x_2^{2\alpha}}+\frac{\partial^{2\alpha}u}{\partial x_3^{2\alpha}}=0,\ \ \alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right]$$

набував на межі *S* узагальнених граничних значень із *D'*(*S*).

Нехай Ω – область в R^3,обмежена замкненою поверхнею S класу C^∞, $\gamma(x)$ – від зовнішньої нормалі до поверхні S у точці x.

В Ω розглянемо рівняння:

$$Lu(x)\equiv\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^{2\alpha}u(x)}{\partial x_i^{2\alpha}}=\sum_{i=1}^{3}\left(f_{(2-2\alpha)h_i}*u(x)\right)_{x_ix_i}=0,\qquad \alpha\in\left(\frac{1}{2};1\right]. \tag{1}$$

Тут

$$f_{\alpha_i}(x_i)=\begin{cases}\dfrac{\theta(x_i)}{\Gamma(\alpha_i)}x_i^{\alpha_i-1},\alpha_i>0,\\ f'_{\alpha_{i+1}}(x_i),\alpha_i\le 0.\end{cases}$$

$$h_1=(1;0;0),\ \ h_2=(0;1;0),\ \ h_3=(0;0;1),$$

де символом * позначено операцію згортки, * – згортку узагальненої функції з основною, $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функція, $\theta(x_i)$ – одинична функція Хевісайда.

В [1] було показано, що фундаментальний розв'язок (1) $\omega(x)$ є порядку $O\left(|x|^{2\alpha-3}\right)$. Також було виведено формули Гріна. У цій роботі використано другу формулу Гріна:

$$\int_\Omega\left(Lu\varphi-u\hat{L}\varphi\right)dx=\int_S\left(B_\alpha u\varphi-uB_\alpha\varphi\right)dS$$

де

$$\left(B_\alpha\varphi\right)(x)=\sum_{i=1}^{3}\left(f_{(2-2\alpha)h_i}*\varphi\right)_{x_i}\gamma_i(x),$$

$$\left(\hat{B}_\alpha\varphi\right)(x)=\sum_{i=1}^{3}\left(f_{(2-2\alpha)h_i}\,\hat{*}\,\varphi\right)_{x_i}\gamma_i(x).$$

Нехай $\bigcup\limits_{j=1}^{m}Q_j$ покриття поверхні $S, Q_j\subset R^3, V_j=Q_j\bigcap S, (\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\xi',\xi_3)$ – розправляючі координати в Q_j, Q – одна з множин $Q_{j,}$ $V=Q\bigcap S$.

Лема 1. Для будь-яких $r\in N$, функцій $\varphi_i\in C^\infty(V)$ існують такі $\varphi_i\in C^\infty(V)$, $i=\overline{2,r+1}$ і обмежена нескінченно диференційовна функція $\varphi_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3),(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\varepsilon\Omega$, що

$$L\left(\sum_{i=1}^{r+1}\xi_3^i\varphi_i(\xi')\right)=\xi_3^r\varphi(\xi_1,\xi_2,\xi_3).$$

Доведення. В рівнянні (1) зробимо заміну змінних**:**

$$\xi_1=x_1;\ \xi_2=x_2;\ \xi_3=x_3-g(x_1,x_2)\,\mathbf{.}$$

Тоді:

$$\left.\begin{aligned}
&u_{x_i}=\tilde{u}_{\xi_i}-\tilde{u}_{\xi_3}\cdot g_{\xi_i},i=1,2;\\
&u_{x_3}=\tilde{u}_{\xi_3};\\
&u_{x_3}=\tilde{u}_{\xi_3};\\
&u(x_1,x_2,x_3)=u(\xi_1,\xi_2,\xi_3+g(\xi_1,\xi_2))=\tilde{u}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\tilde{u}(\xi',\xi_3)\\
&u_{x_ix_i}=\tilde{u}_{\xi_i\xi_i}-2\tilde{u}_{\xi_3\xi_i}\cdot g_{\xi_i}+\tilde{u}_{\xi_3\xi_3}\cdot g_{\xi_i}^2-g_{\xi_i\xi_i}\cdot\tilde{u}_{\xi_3},\ i=1,2;
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&\left(f_{(2-2\alpha)h_i}*u\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(2-2\alpha)}\int_0^\infty t^{1-2\alpha}\cdot u(x_1-t,x_2,x_3)dt=\\
&=\frac{1}{\Gamma(2-2\alpha)}\int_0^\infty t^{1-2\alpha}\cdot u(\xi_1-t,\xi_2,\xi_3+g(x_1,x_2))dt=\left(f_{(2-2\alpha)h_1}*\tilde{u}\right)(\xi',\xi_3)
\end{aligned}\tag{3}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned}
&f_{(2-2\alpha)h_3}*u(x)=\frac{1}{\Gamma(2-2\alpha)}\int_0^\infty t^{1-2\alpha}u(x_1,x_2,x_3-t)dt=\\
&\frac{1}{\Gamma(2-2\alpha)}\int_0^\infty t^{1-2\alpha}u(\xi_1,\xi_2,\xi_3+g(x_1,x_2)-t)dt=(f_{(2-2\alpha)h_3}*u)(\xi',\xi_3+g(\xi_1,\xi_2)
\end{aligned}\tag{4}$$

Враховуючи (2), (3), (4), запишемо рівняння (1) у вигляді:

$$Lu=\sum_{i=1}^{2}\left(f_{(2-2\alpha)h_i}*(\tilde u_{\xi_i\xi_i}-2\tilde u_{\xi_3\xi_i}g_{\xi_i}+\tilde u_{\xi_3\xi_3}g_{\xi_i}^2-g_{\xi_i\xi_i}\tilde u_{\xi_3})\right)(\xi',\xi_3)+$$

$$+\left(f(2-2\alpha)h_3*\tilde u_{\xi_3\xi_3}\right)(\xi',\xi_3)=\frac{\partial^2}{\partial\xi_3^2}\left(\sum_{i=1}^{2}\left(f_{(2-2\alpha)h_i}*\tilde u g_{\xi_i}^2\right)(\xi',\xi_3)+\left(f_{(2-2\alpha)h_3}*\tilde u\right)(\xi',\xi_3)\right)- \qquad (5)$$

$$-\frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\sum_{i=1}^{2}\left(f_{(2-2\alpha)h_i}*\left(2\tilde u_{\xi_i}g_{\xi_i}+\tilde u g_{\xi_i\xi_i}\right)\right)(\xi',\xi_3)\right)+\sum_{i=1}^{2}\left(f_{(2-2\alpha)h_i}*\tilde u_{\xi_i\xi_i}\right)(\xi',\xi_3).$$

Нехай $\tilde u(\xi',\xi_3)=\sum_{j=0}^{r+1}\xi_3^j\cdot\varphi_j(\xi'),$ тоді вираз (5) перепишеться:

$$\sum_{j=2}^{r+1}j(j-1)\cdot\xi_3^{j-2}\cdot\sum_{i=1}^{2}\left(f_{(2-2\alpha)h_i}*\left(\varphi_j g_{\xi_i}^2\right)\right)(\xi')+$$

$$+\sum_{j=2}^{r+1}j(j-1)\cdot\left(f_{(2-2\alpha)}*\left((\xi_3+g(\xi'))^{j-2}\varphi_j\right)\right)(\xi_3+g(\xi'))-$$

$$-\sum_{j=1}^{r+1}j\xi_3^{j-1}\cdot\sum_{i=1}^{2}\left(f_{(2-2\alpha)h_i}*\left(2\varphi_{j_{\xi_i}}g_{\xi_i}+\varphi_j g_{\xi_i\xi_i}\right)\right)(\xi')+$$

$$+\sum_{j=0}^{r+1}\xi_3^j\cdot\sum_{i=1}^{2}\left(f_{(2-2\alpha)h_i}*\varphi_{j\xi_i\xi_i}\right)(\xi')=$$

$$=\sum_{j=0}^{r-1}\frac{(j+2)!}{j!}\xi_3^j\cdot\sum_{i=1}^{2}\left(f_{(2-2\alpha)h_i}*\left(\varphi_{j+2}g_{\xi_i}^2\right)\right)(\xi')+\sum_{j=0}^{r-1}\frac{(j+2)!}{\Gamma(1-2\alpha+j)}\cdot(\xi_3+g(\xi'))^{j-2\alpha}\cdot\varphi_{j+2}(\xi')-$$

$$-\sum_{j=0}^{r}(j+1)\cdot\xi_3^j\cdot\sum_{i=1}^{2}\left(f_{(2-2\alpha)h_i}*\left(2\varphi_{(j+1)_{\xi_i}}g_{\xi_i}+\varphi_{j+1}g_{\xi_i\xi_i}\right)\right)(\xi')+$$

$$+\sum_{j=0}^{r+1}\xi_3^j\cdot\sum_{i=1}^{2}\left(f_{(2-2\alpha)h_i}*\varphi_{j_{\xi_i\xi_i}}\right)(\xi').$$

Щоб згрупувати доданки за степенями ξ_3, зауважимо, що:

$$(\xi_3+g(\xi'))^{-2\alpha}=g(\xi')^{-2\alpha}+\frac{-2\alpha\cdot\xi_3}{g(\xi')^{2\alpha+1}}+o\left(\xi_3^2\right),$$

$$(\xi_3+g(\xi'))^j=g(\xi')^j\left(1+\frac{\xi_3}{g(\xi')}+\ldots+\frac{\xi_3{}^j}{g(\xi')^j}\right)$$

Введемо позначення:

$$(P_0\varphi)(\xi')=\sum_{i=1}^{2}\left(f_{(2-2\alpha)h_i}*\varphi g_{\xi_i}^2\right)(\xi');\qquad (P_1\varphi)(\xi')=\sum_{i=1}^{2}\left(f_{(2-2\alpha)h_I}*\left(2\varphi_{\xi_i}g_{\xi_i}+\varphi g_{\xi_i\xi_i}\right)\right)(\xi');$$

$$(P_2\varphi)(\xi')=\sum_{i=1}^{2}\left(f_{(2-2\alpha)h_I}*\varphi_{\xi_i\xi_i}\right)(\xi).$$

Тоді одержимо:

$$L\left(\sum_{j=0}^{r+1}\xi_3^{\,j}\cdot\varphi_j(\xi')\right)=\sum_{j=0}^{r-1}\frac{(j+2)!}{j!}\cdot\xi_3^{\,j}\cdot\left(P_0\varphi_{j+2}\right)(\xi')+$$

$$+\sum_{j=0}^{r-1}\frac{(j+2)!}{\Gamma(j-2\alpha+1)}\cdot g(\xi')^{j-2\alpha}\left(1+\frac{C_1\xi_3}{g(\xi')}+\frac{C_2\xi_3^{\,2}}{g(\xi')^2}+\ldots+\frac{C_j\xi_3^{j+1}}{g(\xi')^{j+1}}+o\left(\xi_3^2\right)\right)\cdot\varphi_{j+2}(\xi')-$$

$$-\sum_{j=0}^{r}(j+1)\xi_3^j\left(P_1\varphi_{j+1}\right)(\xi')+\sum_{j=0}^{r+1}\xi_3^j\left(P_2\varphi_j\right)(\xi'), \tag{6}$$

де C_j, $j=\overline{0, r-1}$ – константи.

В (6) прирівняємо коефіцієнти біля $\xi_3^0,\xi_3^1,\ldots,\xi_3^{r-1}$ до нуля:

$$\xi_3^0:\ 2\left(P_0\varphi_2\right)(\xi')+\sum_{j=0}^{r-1}\frac{(j+2)!}{\Gamma(j-2\alpha+1)}g(\xi')^{j-2\alpha}\cdot\varphi_{j+2}(\xi')-\left(P_1\varphi_1\right)(\xi')+\left(P_2\varphi\right)_0(\xi')=0;$$

$$\xi_3^1:\ 6\left(P_0\varphi_3\right)(\xi')+\sum_{j=0}^{r-1}\frac{(j+2)!}{\Gamma(j-2\alpha+1)}g(\xi')^{j-2\alpha-1}C_1\cdot\varphi_{j+2}(\xi')-2\left(P_1\varphi_2\right)(\xi')+\left(P_2\varphi\right)_1(\xi')=0;$$

......

$$\xi_3^{r-1}:\ r(r+1)\left(P_0\varphi_{r+1}\right)(\xi')+\sum_{j=r-2}^{r-1}\frac{(j+2)!}{\Gamma(j-2\alpha+1)}g(\xi')^{j-2\alpha-r+1}C_{r-1}\cdot\varphi_{j+2}(\xi')-r\left(P_1\varphi_r\right)(\xi')+$$

$$+\left(P_2\varphi_{r-1}\right)(\xi')=0.$$

Це система інтегральних рівнянь Вольтера II-го роду з неперервними ядрами, яка має неперервний розв’язок

$$\varphi_j=\varphi_j\left(\varphi_0,\ldots\varphi_{j-1},\frac{\partial^j}{\partial\xi_i^{\,j}}\varphi_0,\ldots,\frac{\partial}{\partial\xi_i}\varphi_{j-1}\right)j=\overline{2,r+1},\ \ i=\overline{1,2}. \tag{7}$$

Ненульовий доданок в (6) буде мати вигляд:

$$\xi_3^\kappa\left((r+1)(P_1\varphi_{r+1})(\xi')+(P_2\varphi_r)(\xi')+\xi_3(P_2\varphi_{r+1})(\xi')+\frac{C_r}{g(\xi')^r}\varphi_{r+1}(\xi')+o(\xi_3^{\,2})\right)=\xi_3^r\cdot\varphi(\xi),$$

де $\varphi(\xi)$ – нескінченно диференційовна і обмежена функція, що й треба було довести.

Через $D(S)$ позначимо простір дійсних нескінченно диференційовних функцій φ на S (простір основних функцій). Через $D'(S)$ позначимо простір лінійних неперервних функціоналів на $D(S)$ (простір узагальнених функцій). Результат дії узагальненої функції F на основну функцію φ будемо позначати $\langle\varphi,F\rangle$.

У [1] сформульовано узагальнену задачу Діріхле для рівняння (1).

Нехай $F_1\in D'(S)$, знайти таку $u(x)\in D'\left(\overline{\Omega}\right)$, що

$$\tilde{u}(x)=\begin{cases}u(x), & x\in\Omega;\\ 0, & x\notin\Omega.\end{cases}$$

і задовольняє рівняння:

$$Lu = -F_2 + \hat{B}_\alpha * F_1, \tag{8}$$

де F_2 – невідома узагальнена функція із $D'(S)$. В [1] показано як її знайти. У цій же статті доведено існування і єдність розв'язку рівняння (8), який можна подати у вигляді: $u(x) = \omega * \left(\hat{B}_\alpha * F_1 - F_2\right)$.

Можна задачу Діріхле розглядати в іншому формулюванні: знайти регулярний розв'язок *u(x)* рівняння (1) в області Ω, що задовольняє умову:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi u dS = \langle \varphi, F \rangle \ \forall \varphi \in D(S).$$

Надалі, якщо функція $u(x)$ на межі *S* області Ω задовольняє цю умову, то вважатимемо, що *u(x)* набуває на *S* заданих узагальнених граничних значень F_1.

Нехай S - поверхня з класу C^∞, $r(x)-$ відстань від т. x до межі *S* області Ω.

Теорема 1. Для того, щоб регулярний в середині області Ω розв'язок рівняння *Lu(x)* = 0 набував на *S* узагальнених граничних значень, необхідно і досить, щоб для деякого $k \geq 0$

$$\int_\Omega r^k(x)|u(x)|dx < \infty. \tag{9}$$

Доведення. Необхідність. Враховуючи, що $\omega(x) = O\left(|x|^{2\alpha-3}\right)$ з [1],

$B_\alpha * \omega \leq C\, ln|x| r(x)^\varepsilon$, $F_2 = \sum_{|m|<d} D^m f_m$, $F_1 = \sum_{|\beta|<l} D^\beta f_\beta$, – як узагальнені функції в f_m, f_β

обмеженій області Ω [2], де f_m, f_β – звичайні функції, оцінимо

$$\int_\Omega r^k(x)\cdot C_1 dx - \int_\Xi r^k(x)\cdot C_2|x|^{2\alpha-3-l}dx \leq$$

$$\leq C'\int_S \sum_{|m|\leq d} |f_m(y)| \int_\Omega r^k(x)|x-x_0|^{-|m|}\left(1+|x-y|^\varepsilon\right)dxdS -$$

$$-C''\int_S \sum_{|p|\leq d} |f_p(y)| \int_\Omega r^k(x)|x-y|^{2\alpha-3-|p|}dxdS \leq C^*.$$

При $k > l - 2\alpha, k > d - 3$, де C', C'', C^* – деякі константи.

Достатність. Маємо умову (11) для узагальненої функції *u(x)*. Розглянемо $Q_j \subset \Omega$ і локальну систему координат $\xi^{(j)}$ у ній з початком в деякій точці поверхні *S* і віссю ξ_3, спрямованою за нормаллю до поверхні *S* у цій точці. У цій частині $\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \bigcap \Omega$ області Ω побудуємо паралельну поверхню S_ε до поверхні *S*. Область, що розташована між *S* і S_ε, позначимо через Ω_ε. Очевидно, що

$$\int_\Omega r^k(x)|u(x)|dx = \int_\Omega \xi_3{}^k|u(\xi)|dx < \infty \tag{10}$$

Розглянемо функцію $\Phi_\varepsilon(\xi) = \sum_{j=0}^{r+1} \varphi_j(\xi')\cdot(\xi_3+\varepsilon)^j$. За лемою 1 маємо:

$$\left(L\Phi_\varepsilon\right)(\xi)=(\xi_3+\varepsilon)^r\cdot\varphi(\xi)\,.$$

Застосуємо II-гу формулу Гріна до *u(x)* і $\Phi_\varepsilon(\xi)$ в $\Omega\setminus\Omega_\varepsilon$

$$\int\limits_{\Omega_1\setminus\Omega_\varepsilon}\left(Lu(\xi)\cdot\Phi_\xi(\xi)-u(\xi)\cdot L\Phi_\varepsilon(\xi)\right)d\xi = \;=\int\limits_{S_\varepsilon}\left(B_\alpha u\cdot\Phi_\varepsilon-u\cdot\hat{B}_\alpha\Phi_\varepsilon\right)dS+\int\limits_{S_1}\left(B_\alpha u\cdot\Phi_\varepsilon-u\cdot\hat{B}_\alpha\Phi_\varepsilon\right)dS\,.$$

Враховуючи, що *Lu(x)* = 0, продовжимо $\varphi(x)$ на S_1 так, щоб $\varphi(x)$ =0 на S_1, враховуючи (13) та те, що $\xi_3+\varepsilon=0$ S_ε, отримаємо:

$$\int\limits_{S_\varepsilon}B_\alpha u\cdot\varphi_0 dS-\int\limits_{S_\varepsilon}u\cdot\sum_{i=1}^{3}\left(f_{(2-2\alpha)h_i}*\sum_{j=0}^{r+1}\left(\xi_3+\varepsilon\right)^j\varphi_j\right)_{\xi_i}\gamma_i(\xi)dS=-\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon}u(\xi)\left(\xi_3-\varepsilon\right)^r\varphi(\xi)d\xi\,.$$

Оскільки:

$$\int\limits_{S_\varepsilon}\sum_{i=1}^{3}\left(f_{(2-2\alpha)h_i}*\sum_{j=0}^{r+1}\left(\xi_3+\varepsilon\right)^j\varphi_j\right)_{\xi_i}\gamma_i(\xi)dS=$$

$$=\int\limits_{S_\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^{2}\left(f_{(2-2\alpha)h_i}*\varphi_{0_{\xi_i}}\right)\gamma_i(\xi)+\sum_{j=0}^{r+1}j\Gamma(j)\varphi_j(\xi')f_{(2-2\alpha+j)}\left(g(\xi')\right)\right)dS\,,$$

то вибравши $\varphi_0\equiv 0$, $\varphi_1\neq 0$ із (14), отримаємо:

$$\int\limits_{S_\varepsilon}u\cdot\sum_{j=1}^{r+1}\Gamma(j+1)\varphi_j f_{(3-2\alpha+j)}\left(g(\xi')\right)=\int\limits_{\Omega\setminus\Omega\varepsilon}\left(\xi_3+\varepsilon\right)^r u\varphi d\xi\,. \tag{11}$$

Оскільки за лемою 1 φ_j, j = 2, …,*r*+1 – нескінченно диференційовні функції, що виражаються через $\varphi_1,\varphi(\xi)$ – нескінченно диференційовна і обмежена функція, то при $\varepsilon\to 0$ існує

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon}u\cdot\sum_{j=1}^{r+1}(j+1)!\,\varphi_j f_{(3-2\alpha+j)}\left(g(\xi')\right)=\int\limits_{\Omega}r^k(x)u\varphi dx$$

для довільної $\varphi_1(\xi')\in D_0(S)$.

Визначаємо функціонал *T'* на *D*(*S*):

$$\left\langle\varphi_1,T'\right\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon}uA\varphi_1 dS\,,$$

де *A* – дотичний диференціальний оператор на *S*,

$$\left(A\varphi_1\right)(\xi')=\sum_{j=1}^{r+1}j!\,\varphi_j(\xi')f_{(2-2\alpha+j)}\left(g(\xi')\right).$$

Із (11) випливає, що визначений функціонал *T'* є лінійний та неперервний на *D*(*S*), а отже,є узагальненою функцією із *D'*(*S*).

Можна показати, що існує розв’язок псевдодиференціального рівняння $A\varphi_1=\varphi$ на *S*. Тоді для будь-якого $\varphi\in D(S)$ існує

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} u\varphi\, dS = \langle \varphi, T' \rangle .$$

Визначимо порядок сингулярності *T'*. Із (15) випливає

$$\left|\int_{S_\varepsilon} u(\xi)\cdot\sum_{j=1}^{r+1}(j+1)!\,\varphi_j(\xi')f_{(3-2\alpha+j)}\big(g(\xi')\big)dS\right| \le \int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon}|\xi_3-\varepsilon|^r\cdot|u(\xi)|\cdot|\varphi(\xi)|d\xi . \qquad (12)$$

З леми 1 відомо, що $\varphi(\xi)$ нескінченно диференційовна функція і обмежена, яка виражається через $\varphi_1(\xi')$ та її похідні до r+2-го порядку, тобто :

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon}|\xi_3-\varepsilon|^r\cdot|u(\xi)|\cdot|\varphi(\xi)|d\xi \le C_1\sum_{|l|\le k+2}\max_{\xi}\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^l\varphi_1(\xi')\right|,$$

де C – деяка константа. Тоді

$$\max_{\xi}|\varphi(\xi)| \le C\sum_{|l|\le k+2}\max_{\xi}\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^l\varphi_1(\xi')\right|. \qquad (13)$$

Врахувавши (16) і (18), отримаємо:

$$\left|\langle T', \varphi \rangle\right| = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} u(\xi)\cdot\sum_{j=1}^{r+1}(j+1)!\,\varphi_j(\xi')\,f_{(3-2\alpha+j)}\big(g(\xi')\big) \le C_1\sum_{|l|\le k+2}\max_{\xi}\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^l\varphi_1(\xi')\right|. \qquad (14)$$

З (19) та означення узагальненої функції порядку $\le\alpha$ випливає $\alpha\le k+2$.

1. Лопушанська Г.П. Основні граничні задачі для одного рівняння в дробових похідних // Укр. мат. журн. 1999. 51. № 1. С.48–57. 2. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальний курс. М., 1984. 3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.М., 1981.

УДК 514.76

Домбровський Р.Ф., Осадца І.С.
Чернівецький державний університет ім. Ю.Федьковича

ДО ГЕОМЕТРІЇ РОЗПОДІЛУ ГІПЕРПЛОЩИННИХ ЕЛЕМЕНТІВ НАПІВКВАТЕРНІОННОГО ПРОСТОРУ

A classification of normalized distribution of hyperplane elements in the half-quaternion space is suggested.

Пропонується класифікація нормалізованих розподілів гіперплощинних елементів у напівкватерніонному просторі.

1. Зовнішні диференціальні форми ω^I будуть головними формами точкового $4n$-вимірного дійсного напівкватерніонного простору $H_{4n}(U,V)$, якщо вони задовольняють структурні рівняння [1]: