Г.Ф., Остиану Н.М. $(f\xi\eta\rho)$-структура на дифференцируемых многообразиях // Проблемы геометрии. Итоги науки и техники. 1975. 7. С.5–22. 5. Алшибая Э.Д. К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве // Труды Геометр. Семинара. Т.5. 1974. С.169–193. 6. Домбровський Р.Ф. Інтегральні підмноговиди многовидів майже напівкватерніонної структури // Матеріали міжнародн. матем. конф., присвяченої пам'яті Ганса Гана. 1995. С.61–71. 7. Домбровський Р.Ф. Індуковані структури на нормалізованому підмноговиді многовиду з аффінорною алгеброю // Матеріали міжнар. регіональної наук. конф. "Математика, її застосування та викладання". 1999. С.25–27. 8. Домбровський Р.Ф. Φ-структура на нормалізованому підмноговиді многовиду з O-деформованим аффінорним полем // Наук. вісник Чернівецького ун–ту: Зб. наук. праць. 1999. Вип. 46. С.29–35.

УДК 517.949

Дрінь М.М.
Чернівецький державний університет ім. Ю.Федьковича

ЧИСЛОВЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ СПРЯЖЕННЯ ДЛЯ СИСТЕМИ КВАЗІЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

The non-linear, linear explicit and non-explicit difference circuits are obtained for conjugation problem of parabolic quasilinear equations system.

Побудовано нелінійну, лінійну неявну та явну різницеві схеми для задачі спряження для системи параболічних квазілінійних рівнянь.

Розглянемо в області $Q=(0,T]\times(0,b)$ задачу спряження для системи параболічних квазілінійних рівнянь.

$$c^{\ell}(x)\rho^{\ell}(x)\frac{\partial u^{\ell}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{k=1}^{p}\chi^{\ell k}\left(u^{1},...,u^{p}\right)\frac{\partial u^{k}}{\partial x}\right)+f^{\ell}(t,x),\quad (t,x)\in Q,\quad \ell=\overline{1,p}, \tag{1}$$

$$u^{\ell}\Big|_{t=0}=\varphi^{\ell}(x),\quad x\in[0,b],\quad \ell=\overline{1,p}, \tag{2}$$

$$\left[u^{\ell}\right]\Big|_{x=\xi}=0,$$

$$\left[\sum_{k=1}^{p}\chi^{\ell k}\left(u^{1},...,u^{p}\right)\frac{\partial u^{k}}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=\xi}=-q^{\ell},\quad \xi\in(0,b),\quad t\in[0,T],\quad q^{\ell}=const,\quad \ell=\overline{1,p}, \tag{3}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{p}\chi^{\ell k}\left(u^{1},...,u^{p}\right)\frac{\partial u^{k}}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0}=-\alpha^{\ell}(t),$$

$$\left(\sum_{k=1}^{p}\chi^{\ell k}\left(u^{1},...,u^{p}\right)\frac{\partial u^{k}}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=b}=\beta^{\ell}(t),\quad t\in[0,T],\quad \ell=\overline{1,p}, \tag{4}$$

де через $[\psi]\big|_{x=\xi}$ – позначено скачок функції ψ в точці $x=\xi$. Функції $c^{\ell}, \rho^{\ell}, \chi^{\ell k}, f^{\ell}$, φ^{ℓ}, α^{ℓ}, β^{ℓ} можуть бути як неперервними, так і мати розриви 1-го роду.

Для числового розв'язання задачі (1) – (4) будемо використовувати інтегро-інтерполяційний метод, який проілюстрований в [1,2] на прикладі одного квазілінійного рівняння. Згідно з цим методом область Q розбиваємо рівномірною сіткою $\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$,

$$\omega_h = \left\{x_i = ih,\ h>0,\ i=\overline{0,\mathrm{N}-1},\ h\mathrm{N}=b\right\},\ \omega_\tau = \left\{t_j = j\tau,\ \tau>0,\ j=\overline{0,\mathrm{M}-1},\ \tau\mathrm{M}=\mathrm{T}\right\},$$

$$x_m = \xi, \quad 0<m<\mathrm{N}$$

і виписуємо систему рівнянь балансу в інтегральній формі

$$\int\limits_{x_{i-\frac12}}^{x_{i+\frac12}} c^l\rho^l\left[u^l(t_j,x)-u^l(t_{j-1},x)\right]dx = \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\sum_{k=1}^{p}\left[W^{lk}\left(t,x_{i-\frac12}\right)-W^{lk}\left(t,x_{i+\frac12}\right)\right]dt + \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\int\limits_{x_{i-\frac12}}^{x_{i+\frac12}} f^l(t,x)\,dx\,dt,\ l=\overline{1,p}, \tag{5}$$

де

$$x_{i-\frac12} = x_i - \frac{h}{2},\ x_{i+\frac12} = x_i + \frac{h}{2};$$

$$W^{lk} = -\chi^{lk}\left(u^1,\dots,u^p\right)\frac{\partial u^k}{\partial x}, \qquad l,k=\overline{1,p}. \tag{6}$$

Апроксимуючи інтеграли, які входять в (5), а також умови спряження (3) і крайові умови (4), можна отримати різні різницеві схеми, які апроксимують задачу (1)–(4).

Нелінійна різницева схема:

$$\begin{aligned}
&C_{0j}y_{0j} - B_{0j}y_{1j} = F_{0j},\\
&-A_{ij}y_{i-1,j} + C_{ij}y_{ij} - B_{ij}y_{i+1,j} = F_{ij}, \quad i=\overline{1,\mathrm{N}-1},\\
&-A_{Nj}y_{N-1,j} + C_{Nj}y_{Nj} = F_{Nj},\\
&y_{i0} = \varphi_i, \quad i=\overline{0,\mathrm{N}},
\end{aligned} \tag{7}$$

де $j=\overline{1,M}$, а матриці, які входять в систему (7), мають вигляд:

$$A_{ij} = \left\{\gamma a_{ij}^{lk}\right\}_{l,k=\overline{1,p}}, \qquad A_{Nj} = \left\{2\gamma a_{Nj}^{lk}\right\}_{l,k=\overline{1,p}},$$

$$B_{ij} = \left\{\gamma a_{i+1,j}^{lk}\right\}_{l,k=\overline{1,p}}, \qquad B_{0j} = \left\{2\gamma a_{1j}^{lk}\right\}_{l,k=\overline{1,p}},$$

$$C_{0j} = \left\{2\gamma\, a_{1j}^{lk} + \delta_{lk}c_0^l\rho_0^l\right\}_{l,k=\overline{1,p}}, \qquad C_{ij} = \left\{\gamma\left(a_{ij}^{lk}+a_{i+1,j}^{lk}\right)+\delta_{lk}c_i^l\rho_i^l\right\}_{l,k=\overline{1,p}},$$

$$C_{Nj} = \left\{2\gamma\, a_{Nj}^{lk} + \delta_{lk}c_N^l\rho_N^l\right\}_{l,k=\overline{1,p}}, \qquad F_{0j} = \left\{c_0^l\rho_0^l y_{0,j-1}^l + \tau f_{0j}^l + \frac{2\tau}{h}\alpha_j^1\right\}_{l=\overline{1,p}}, \tag{8}$$

$$F_{ij} = \left\{c_i^l\rho_i^l y_{i,j-1}^l + \tau f_{ij}^l + \delta_{im}\tau q^l\right\}_{l=\overline{1,p}} \qquad F_{Nj} = \left\{c_N^l\rho_N^l y_{N,j-1}^l + \tau f_{Nj}^l + \frac{2\tau}{h}\beta_j^l\right\}_{l=\overline{1,p}},$$

$$a_{ij}^{lk} = \chi^{lk}\left(\frac{y_{ij}^1 + y_{i-1,j}^1}{2},\dots,\frac{y_{ij}^p + y_{i-1,j}^p}{2}\right);\ y_{ij} = \left(y_{ij}^1,\dots,y_{ij}^p\right)^{\mathrm{T}}, \quad \varphi_i = \left(\varphi_i^1,\dots,\varphi_i^p\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\gamma = \frac{\tau}{h^2}, \quad \delta_{im} = \begin{cases}1, & i=m,\\ 0, & i\neq m.\end{cases}$$

Нелінійну систему (7) розв'язуємо методом простої ітерації:

$$
\begin{aligned}
& C^k_{0j} y^{k+1}_{0j} - B^k_{0j} y^{k+1}_{1j} = F_{0j}, \\
& -A^k_{ij} y^{k+1}_{i-1,j} + C^k_{ij} y^{k+1}_{ij} - B^k_{ij} y^{k+1}_{i+1,j} = F_{ij}, \qquad i = \overline{1, \mathrm{N}-1}, \\
& -A^k_{Nj} y^{k+1}_{N-1,j} + C^k_{Nj} y^{k+1}_{Nj} = F_{Nj}, \\
& y_{i0} = \varphi_i, \quad i = \overline{0, N}
\end{aligned}
$$

де $j = \overline{1, \mathrm{M}}$, $k = 0,1,2,\ldots$, $y^0_{ij} = y_{i,j-1}$. На кожному кроці ітераційного процесу одержується лінійна система, яку при кожному $j = \overline{1, M}$ розв’язуємо методом матричної прогонки [3]. Ітераційний процес продовжуємо доти, доки для заданого $\varepsilon > 0$ і кожного $j = \overline{1, \mathrm{M}}$

$$
\max_i \left(\left\| y^k_{ij} - y^{k+1}_{ij} \right\| \right) \le \varepsilon .
$$

Лінійна неявна різницева схема:

$$
\begin{aligned}
& C_{0,j-1} y_{0j} - B_{0,j-1} y_{1j} = F_{0j}, \\
& -A_{i,j-1} y_{i-1,j} + C_{i,j-1} y_{ij} - B_{i,j-1} y_{i+1,j} = F_{ij}, \qquad i = \overline{1, \mathrm{N}-1}, \\
& -A_{N,j-1} y_{N-1,j} + C_{N,j-1} y_{Nj} = F_{Nj}, \\
& y_{i0} = \varphi_i, \quad i = \overline{0, \mathrm{N}},
\end{aligned} \tag{9}
$$

де $j = \overline{1, \mathrm{M}}$, а коефіцієнти і праві частини системи (9) визначені у (8).

Оскільки коефіцієнти системи (9) при $t = t_j$ виражаються через значення розв’язку при $t = t_{j-1}$, то система (9) є лінійною. При кожному $j = \overline{1, \mathrm{M}}$ її розв’язуємо методом матричної прогонки.

Явна різницева схема:

$$
\begin{aligned}
& y_{0j} = -\overline{C}_{0,j-1} y_{0,j-1} + \overline{B}_{0,j-1} y_{1,j-1} + \overline{F}_{0j}, \\
& y_{ij} = \overline{A}_{i,j-1} y_{i-1,j-1} - \overline{C}_{i,j-1} y_{i,j-1} + \overline{B}_{i,j-1} y_{i+1,j-1} + \overline{F}_{ij}, \quad i = \overline{1, \mathrm{N}-1}, \\
& y_{Nj} = \overline{A}_{N,j-1} y_{N-1,j-1} - \overline{C}_{N,j-1} y_{N,j-1} + \overline{F}_{Nj}, \\
& y_{i0} = \varphi_i, \quad i = \overline{0, \mathrm{N}},
\end{aligned} \tag{10}
$$

де $j = \overline{1, \mathrm{M}}$, матриці, які входять в систему (10), мають вигляд:

$$
\overline{A}_{i,j-1} = \left\{ \gamma \lambda^l_i a^{lk}_{i,j-1} \right\}_{l,k=\overline{1,p}}, \qquad \overline{A}_{N,j-1} = \left\{ 2\gamma \lambda^l_N a^{lk}_{N,j-1} \right\}_{l,k=\overline{1,p}},
$$

$$
\overline{B}_{0,j-1} = \left\{ 2\gamma \lambda^l_0 a^{lk}_{1,j-1} \right\}_{l,k=\overline{1,p}}, \qquad \overline{B}_{i,j-1} = \left\{ \gamma \lambda^l_i a^{lk}_{i+1,j-1} \right\}_{l,k=\overline{1,p}},
$$

$$
\overline{C}_{0,j-1} = \left\{ 2\gamma \lambda^l_0 a^{lk}_{1,j-1} - \delta_{lk} \right\}_{l,k=\overline{1,p}}, \qquad \overline{C}_{i,j-1} = \left\{ \gamma \lambda^l_i \left(a^{lk}_{i,j-1} + a^{lk}_{i+1,j-1} \right) - \delta_{lk} \right\}_{l,k=\overline{1,p}},
$$

$$
\overline{C}_{N,j-1} = \left\{ 2\gamma \lambda^l_N a^{lk}_{N,j-1} - \delta_{lk} \right\}_{l,k=\overline{1,p}}, \qquad \overline{F}_{0j} = \left\{ \tau \lambda^l_0 \left(f^l_{0j} + \frac{2}{h} \alpha^l_j \right) \right\}_{l=\overline{1,p}},
$$

$$
\overline{F}_{ij} = \left\{ \tau \lambda^l_i \left(f^l_{ij} + \delta_{im} q^l \right) \right\}_{l=\overline{1,p}}, \qquad \overline{F}_{Nj} = \left\{ \tau \lambda^l_N \left(f^l_{Nj} + \frac{2}{h} \beta^l_j \right) \right\}_{l=\overline{1,p}},
$$

$$
a^{lk}_{i,j-1} = \chi^{lk} \left(\frac{y^1_{i,j-1} + y^1_{i-1,j-1}}{2}, \ldots, \frac{y^p_{i,j-1} + y^p_{i-1,j-1}}{2} \right), \qquad \lambda^l_i = \frac{1}{c^l_i \rho^l_i} .
$$

Згідно з формулою (10) значення розв'язку при $t = t_j$ виражається через значення розв'язку при $t = t_{j-1}$.

Зауважимо, що для квазілінійних рівнянь використання явних різницевих схем не є доцільним, якщо коефіцієнт теплопровідності $\chi^{lk}\left(u^1,...,u^p\right)$ є швидкозмінною функцією, оскільки умова стійкості потребує малого кроку по часу.

Нелінійна і лінійна неявна різницеві схеми є стійкими і мають точність $o\left(\tau + h^2\right)$.

Якщо коефіцієнти, які входять у систему (1), є розривними, то сітку вибирають так, щоб вузол попав у точку розриву, а у відповідних формулах потрібно брати півсуму граничних значень коефіцієнтів зліва і справа.

Із різницевих схем (7), (9), (10) як частинні випадки можна отримати відомі лінійну неявну і явну різницеві схеми для рівняння теплопровідності із сталими коефіцієнтами.

Різницеві схеми (7), (9), (10) реалізовані на ЕОМ у випадку як одного рівняння, так і системи рівнянь.

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., 1977. 2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1977. 3. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.

УДК 517.956.4+955.2

Дрінь Р.Я., Дрінь Я.М., Лучко В.М.
Чернівецький державний університет ім. Ю.Федьковича

КОРЕКТНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З РОЗРИВНИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ

The correct solvability of Couchy problem for the parabolic pseudodifferential equation with discontinuities of the first kind initial condition in the spaces of bounded differentiable functions is proved.

Доведена коректна розв'язність задачі Коші для параболічного псевдодиференціального рівняння з розривною початковою умовою в класі неперервно диференціальних обмежених функцій.

Теорія псевдодиференціальних операторів (ПДО) є предметом багатьох досліджень: сучасна теорія фракталів, яка останнім часом бурхливо розвивається, теорія випадкових процесів.

У даній роботі вивчається задача Коші для параболічного псевдодиференціального рівняння (ППДР), яке містить ПДО, побудований за символом $|\sigma|$, $\sigma \in \mathbf{R}$. Фундаменталь-