Згідно з формулою (10) значення розв’язку при $t = t_j$ виражається через значення розв’язку при $t = t_{j-1}$.

Зауважимо, що для квазілінійних рівнянь використання явних різницевих схем не є доцільним, якщо коефіцієнт теплопровідності $\chi^{lk}\left(u^1,...,u^p\right)$ є швидкозмінною функцією, оскільки умова стійкості потребує малого кроку по часу.

Нелінійна і лінійна неявна різницеві схеми є стійкими і мають точність $o\left(\tau + h^2\right)$.

Якщо коефіцієнти, які входять у систему (1), є розривними, то сітку вибирають так, щоб вузол попав у точку розриву, а у відповідних формулах потрібно брати півсуму граничних значень коефіцієнтів зліва і справа.

Із різницевих схем (7), (9), (10) як частинні випадки можна отримати відомі лінійну неявну і явну різницеві схеми для рівняння теплопровідності із сталими коефіцієнтами.

Різницеві схеми (7), (9), (10) реалізовані на ЕОМ у випадку як одного рівняння, так і системи рівнянь.

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., 1977. 2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1977. 3. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.

УДК 517.956.4+955.2

Дрінь Р.Я., Дрінь Я.М., Лучко В.М.
Чернівецький державний університет ім. Ю.Федьковича

КОРЕКТНА РОЗВ’ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З РОЗРИВНИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ

The correct solvability of Couchy problem for the parabolic pseudodifferential equation with discontinuities of the first kind initial condition in the spaces of bounded differentiable functions is proved.

Доведена коректна розв’язність задачі Коші для параболічного псевдодиференціального рівняння з розривною початковою умовою в класі неперервно диференціальних обмежених функцій.

Теорія псевдодиференціальних операторів (ПДО) є предметом багатьох досліджень: сучасна теорія фракталів, яка останнім часом бурхливо розвивається, теорія випадкових процесів.

У даній роботі вивчається задача Коші для параболічного псевдодиференціального рівняння (ППДР), яке містить ПДО, побудований за символом $|\sigma|$, $\sigma \in \mathbf{R}$. Фундаментальний розв’язок задачі Коші для такого ППДР явно виписується і трактується як густина розподілу ймовірностей випадкової величини (розподіл Коші).

Розглянуте рівняння належить до лінійних ППДР з негладкими символами, які були визначені С.Д.Ейдельманом і Я.М.Дрінем на початку 70-х років, а основоположними були праці С.Д.Едельмана [1], Г.І.Ескіна і М.І. Вішика [2]. Важливу роль у подальшому розвитку цієї теорії відіграла праця А.Н.Кочубея [3], в якій він уперше звернув увагу на те, що ПДО з негладкими символами можуть трактуватися як ГСІО. Це дало можливість при дослідженні задачі Коші для таких рівнянь використовувати добре розвинену теорію ГСІО [4]. Більш загальні рівняння вивчаються в [5].

1. Список основних позначень і скорочень

$\mathbf{R}^n$ – n-вимірний евклідів простір, $\mathbf{R}^1 \equiv \mathbf{R}$;

$\Pi_T \equiv \{(t,x) | \tau < t < T, x \in R\}$, де $T > 0$ задане число, $\tau \geq 0$;

$S(\mathbf{R}^n)$ – простір основних функцій;

$\widehat{f}(\sigma) \equiv F_{x\to\sigma}[f] \equiv (2\pi)^{-(n/2)} \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x) e^{-i(x,\sigma)} dx$, $\sigma \in \mathbf{R}^n$ – операція прямого і $f(x) \equiv F^{-1}_{\sigma\to x}\left[\widehat{f}(\sigma)\right]$ операція оберненого перетворення Фур’є функції $f \in S(\mathbf{R}^n)$;

ПДО – псевдодиференціальна операція з символом $|\sigma|$, $\sigma \in \mathbf{R}^n$, для $f \in S(\mathbf{R}^n)$ визначається так: $A_1 f \equiv F^{-1}_{\sigma\to x}\left[|\sigma| F_{x\to\sigma}[f]\right]$. Структура ПДО з однорідними символами вивчена в [2,с. 29];

$C(\mathbf{R}^n)$ і $C(\Pi_T)$ – простори неперервних і обмежених функцій в $\mathbf{R}^n$ і Π_T, відповідно;

$C^{11}_{t,x}(\Pi_T)$ – простір неперервно-диференційовних функцій в Π_T.

ГСІО – гіперсингулярна інтегральна операція для $f \in C^1(\mathbf{R}^n)$ визначається в [5].

$$A_1 f(x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \mathbf{R}\to\infty}} \frac{1}{\pi} \int\limits_{\varepsilon \leq |h| \leq \mathbf{R}} \frac{f(x+h) - f(x)}{|h|^{n+1}} dh, \ x \in \mathbf{R}^n.$$

Якщо $f \in S(\mathbf{R}^n)$, то ПДО з символом $|\sigma|$ збігається з ГСІО [4, с.63].

Фундаментальний розв’язок задачі Коші для рівняння

$$Lu \equiv u_t(t,x) + A_1 u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_T \tag{1}$$

є функція [5, с.34]

$$G(t,x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)}/2} \frac{t}{\left(t^2 + |x|^2\right)^{(n+1)/2}}, \quad (t,x) \in \Pi_T. \tag{2}$$

2. Постановка задачі Коші

Нехай $U : \Pi_T \to \mathbf{R}$, $U \in C^{1,1}_{t,x}(\Pi_T)$. Розглянемо таку задачу Коші:

$$LU = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_T, \tag{3}$$

$$U(t,x)\big|_{t=\tau} = \varphi(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{4}$$

f, φ – відомі функції.

3. Результати

Правильними є такі твердження:

а) нехай $n=1$, $f(t,x)\equiv 0$ і $\varphi(x)=\begin{cases} T_0, x\in(-\infty,0), \\ \dfrac{T_0+T_1}{2}, x=0, \\ T_1, x\in(0,\infty). \end{cases}$ Тоді розв'язок задачі Коші (3), (4) набуде вигляду

$$U(t,x)=\frac{T_0+T_1}{2}+\frac{T_1-T_0}{\pi}arctg\,\frac{x}{t-\tau}\,,\quad t>\tau\,,\ x\in\mathbf{R}$$

стабілізується при $t\to\infty$ до початкової функції φ, тобто $\forall x\in\mathbf{R}\ \lim\limits_{t\to+\infty}u(t,x)=\varphi(x)$;

б) нехай $\varphi\in C(\mathbf{R})$, $f\in C(\Pi_T)$, $\left|f(t,x)-f(t,y)\right|\le C|x-y|^{\lambda}$, де C – стала, незалежна від $x,\ y,\ t,\ 0<\lambda<1$. Тоді розв'язок задачі Коші (3), (4) буде мати вигляд [3, с.926]

$$U(t,x)=\int\limits_{\mathbf{R}^n}G(t-\tau,x-\xi)\varphi(\xi)d\xi+\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\mathbf{R}^n}G(t-\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi\equiv U_1+U_2\,,\ (t,x)\in\Pi_T\,; \tag{5}$$

в) нехай $\forall(t,\ x)\in\Pi_T$ функція $U_1(t,\tau,x)\equiv\int\limits_{\mathbf{R}^n}G(t-\tau,x-\xi)\varphi(\xi)d\xi$ є розв'язком задачі Коші (1), (4). Якщо $\forall\,x\in\mathbf{R}^n\ \varphi(x)\ge l$ і $\forall\,t>\tau\ U(t,x)\to l$ при $|x|\to+\infty,$ то $\forall\,x\in\mathbf{R}^n,\ t\in[\tau,T]$ функція $U(t,x)\ge l.$

г) Якщо n = 1, $\varphi(x)=\begin{cases}\varphi_i(x), x\in(a_i,a_{i+1}),\ i\in\{0,1,...,k\}, a_0\equiv-\infty, a_{k+1}\equiv+\infty, \\ \dfrac{\varphi_i(a_i-0)+\varphi_{i+1}(a_i+0)}{2}, x\in a_i,\{i\in\{1,...,k\}\},\end{cases}$

де φ_i, $i\in\{1,\ldots,k\}$ є неперервними і обмеженими функціями, то $\forall\,x\in\mathbf{R}$ $\lim\limits_{t\to\tau}U_1(t,\tau,x)=\varphi(x).$

д) задача (1), (4) має не більше одного розв'язку $U(t,x)\ge l,\ (t,x)\in\Pi_{T,}\ U(t,x)\to l$ при $|x|\to+\infty,\ t>\tau.$

4. Доведення. Твердження а) перевіряється, безпосередньо враховуючи (2) і те, що $G_t=-A_1G.$ Доведемо твердження б). У формулі (5) основним доданком є об'ємний потенціал U_2. Інтеграл, яким визначається функція U_2, абсолютно збігається в Π_T і функція U_2 є неперервною і обмеженою. Існування похідної по t від U_2 і формула для $\dfrac{\partial}{\partial t}U_2$ доведена в [7, 8] (див. також [3, с.921, формула (31)]. Доведення аналогічне випадкові параболічних диференціальних рівнянь [1].Формула для A_1U_2 доведена в [3, с. 922, формула (35)], де ГСІО A_1U_2 існує у сенсі умовної збіжності [3, с.911, формула (6)]. У нашому випадку розглядається "двостороння" умовна збіжність.

Твердження в) є аналогом леми 7 із [3], де l = 0 і, отже, функція φ і розв'язок u є невід'ємними. Тут розглянуто випадок функцій, обмежених знизу сталою $l\ge 0$.

Твердження г) в точках неперервності початкової функції $\varphi(x), x \in \mathbf{R} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} a_i$ доводиться аналогічно, як у [6, с.213]. Нехай $x = a_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$ – точки розриву першого роду функції φ. Зафіксуємо $i \in \{1, \dots, k\}$ і окіл V_{a_i} точки $x = a_i$ так, щоб у околі V_{a_i} була лише одна ця точка розриву.

Розглянемо функцію $\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) - \dfrac{\varphi(a_i + 0) - \varphi(a_i - 0)}{2}, & x \geq a_i, \\ \varphi(x) + \dfrac{\varphi(a_i + 0) - \varphi(a_i - 0)}{2}, & x < a_i, \end{cases}$

яка є визначеною і неперервною $\forall\ x \in V_{a_i}$, причому $\psi(a_i) = \dfrac{\varphi(a_i + 0) + \varphi(a_i - 0)}{2}$. Тоді $\forall\ \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що коли $|x - a_i| < \delta(\varepsilon)$, то $|u(t, x) - \psi(a_i)| < \varepsilon$.

Твердження д) є наслідком твердження в). Нехай $l = 0$. Випадок $l > 0$ розглядається аналогічно. Припустимо, що існують два різні невід'ємні при $t > \tau$, $x \in \mathbf{R}^n$ розв'язки u_1 і u_2 задачі Коші (1), (4), які монотонно прямують до нуля при $|x| \to +\infty$. Тоді функції $u_1(t, x) - u_2(t, x)$ та $u_2(t, x) - u_1(t, x)$, $(t,\ x) \in \Pi_T$ також є розв'язками задачі Коші для рівняння (1) з нульовою початковою умовою, які монотонно прямують до нуля при $|x| \to +\infty$. Згідно з висновком в) $\forall (t, x) \in [\tau, T] \times \mathbf{R}^n$, ці функції є неперервними, тобто $u_1(t, x) \geq u_2(t, x)$ і $u_2(t, x) \geq u_1(t, x)$, а звідси випливає, що $u_1(t, x) \equiv u_2(t, x)$.

1. Эйдельман С.Д. Параболические системы. М., 1964. 2. Эскин Г.И. Краевые задачи для эллиптических псевдодиференциальных уравнений. М., 1973. 3. Кочубей А.Н. Параболические псевдодиференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1988 Т.52. № 5. С.909–934. 4. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987. 5. Eidelman S.D., Drin' R.Ya. About the investigation of the action of the pseudo-differential operators over the special classes of test functions. // Don. НАН України. 1997. № 3. С.32–37. 6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1972. 7. Дринь Я.М. Фундаментальное решение задачи Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. Сер.А. 1977. № 3. С.198–203. 8. Эйдельман С.Д., Дринь Я.М. Построение и исследование классических фундаментальных решений задачи Коши для равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений // Математические исследования. 1981. Вып.63. С.18–33.