ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 601, 2007, с. 18–27

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 601, 2007, p. 18–27

ЧАСТКОВО ВИРОДЖЕНІ ТА ВИРОДЖЕНІ КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Р.М. Тацій[a], М.Ф. Стасюк[a], О.О. Власій[b], М. Живічиньскі[c]

[a] *Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
вул. Клепарівська, 35, 79058, м.Львів, Україна
[b] *Прикарпатський національний університет ім. В.Стефаника*
вул. Шевченка, 27, 76000, Івано-Франківськ, Україна
[c] *Університет ім. Каземира Великого в Бидгощі*
вул. Вейсенхоффа 11, 85-072, м. Бидгощ, Польща

(Отримано 11 жовтня 2007 р.)

Вивчаються спеціальні класи квазідиференціальних рівнянь довільного порядку з узагальненими функціями в коефіцієнтах і правих частинах. Загальні розв'язки таких рівнянь будуються в явній формі, що проілюстровано на конкретних прикладних задачах.

Ключові слова: вироджені та частково-вироджені квазідиференціальні рівняння, інтеграл Рімана-Стільтьєса, крайові задачі

2000 MSC: 34B60

УДК: 517.912

Вступ

Створення математичних моделей реальних фізичних явищ, які враховують дискретну і неперервну їх природу, приводить до виникнення так званих квазідиференціальних рівнянь (КДР), які містять узагальнені функції в коефіцієнтах.

Однією з ідей дослідження таких КДР є зведення їх до коректних узагальнених систем диференціальних рівнянь з мірами. При цьому застосовується апарат концепції квазіпохідних (напр., [1] – [4]). Практичний інтерес становлять такі КДР, розв'язок яких можна одержати у явному вигляді. У статті розглядаються два класи КДР – частково вироджені та вироджені КДР. Спочатку наведено необхідні теоретичні відомості, на які опирається подальше дослідження. Вводяться поняття частково вироджених та вироджених КДР, для яких надалі:

- досліджено структуру матриці Коші;
- подано конструктивний вигляд розв'язків початкової задачі, задачі Валле-Пуссена, крайової задачі;
- встановлено скінченність спектра задач на власні значення.

Кожна із наведених частин ілюструється відповідним прикладом.

I. Додаткові відомості

Тут подаються необхідні відомості з теорії узагальнених квазідиференціальних рівнянь та відповідних їм систем диференціальних рівнянь першого порядку [1], [2], [5]. Усі функції, що розглядаються в статті, вважатимемо дійснозначними.

Нехай I – відкритий (скінченний чи нескінченний) інтервал дійсної осі, $BV^+_{loc}(I)$ –клас неперервних справа функцій локально обмеженої на I варіації, $AC(I)$ – клас абсолютно неперервних на I функцій. Розглядається квазідиференціальний вираз

$$L_{mn}[y] \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\left(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\right)^{(m-j)}$$

і відповідне квазідиференціальне рівняння (КДР)

$$L_{mn}[y] = \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{i+1}f_i^{(i+1)}(x), \tag{1}$$

де коефіцієнти $a_{ij}(x)$ і функції $f_i(x)$ справджують такі умови:

1) $a_{00}^{-1}(x)$ – локально обмежена і вимірна на I функція;
2) $a_{i0}(x), a_{0j}(x) \in L_2(I), i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m$;
3) $a_{ij}(x) = b'_{ij}(x)$, $b_{ij}(x) \in BV^+_{loc}(I)$;
4) $f_i(x) \in BV^+_{loc}(I)$, $f_i^{(i+1)}(x)$ – їх узагальнені похідні, $i=0,\ldots,m-1$.

Для рівняння (1) вводяться квазіпохідні $y^{[k]}(x)$ за формулами

$$\begin{gathered} y^{[k]}(x) = y^{(k)}(x), i=1,\ldots,n-1; \\ y^{[n]}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{i0}(x)y^{(n-i)}(x); \\ y^{[n+k]}(x) = \left(f_{m-k}(x) - y^{[n+k-1]}(x)\right)' + \\ + \sum_{i=0}^{n} a_{ik}(x)y^{(n-i)}(x), k=1,\ldots,m, \end{gathered} \tag{2}$$

за допомогою яких КДР (1) зводиться до системи диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\overline{Y}'(x) = C'(x)\overline{Y}(x) + \overline{F}'(x), \tag{3}$$

де $\overline{Y}(x) = \left(y(x), y^{[1]}(x), \ldots, y^{[n+m-1]}(x)\right)^{\top}$, $\overline{F}(x) = (0, \ldots, 0, f_{m-1}(x), \ldots, f_1(x), f_0(x))^{\top}$, $C(x), \overline{F}(x) \in BV^{+}_{loc}(I)$ і виконуються умови (коректності)

$$\forall x \in I \quad (\Delta C(x))^2 = 0, \quad \Delta C(x)\Delta\overline{F}(x) = 0. \tag{4}$$

Зауважимо, що умови коректності (4) гарантуються вимогами 1) – 4) на коефіцієнти КДР (1). Система (3) називається системою, що відповідає КДР (1).

При початковій умові

$$\overline{Y}(x_0) = \overline{Y}_0, \tag{5}$$

де $\overline{Y}(x_0) = \left(y(x_0), y^{[1]}(x_0), \ldots, y^{[n+m-1]}(x_0)\right)^{\top}$, $\overline{Y}_0 = (y_0, y_1, \ldots, y_{n+m-1})^{\top}$ існує єдиний розв'язок задачі (3), (5), причому $y^{[k]}(x) \in AC(I), k = 0, 1, \ldots, n-1$, $y^{[n+k]}(x) \in BV^{+}_{loc}(I), k = 0, 1, \ldots, m-1$, а в точках x_s розривів функцій $b_{ij}(x)$ і $f_i(x)$ квазіпохідні мають стрибки, що визначаються формулами

$$\Delta y^{[n+k-1]}(x_s) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta b_{n+i,k}(x_s) y^{[i]}(x_s) + \Delta f_{m-k}(x_s).$$

Для відповідної однорідної системи

$$\overline{Y}'(x) = C'(x)\overline{Y}(x) \tag{6}$$

існує фундаментальна матриця (матриця Коші) $B(x, \alpha)$, що за змінною x справджує відповідне (6) матричне рівняння

$$\frac{d}{dx} B(x, \alpha) = C'(x) B(x, \alpha)$$

і має такі властивості:

1. $B(\alpha, \alpha) = E$;
2. $B(x, \alpha) = (E + \Delta C(x))\, B(x-0, \alpha)$, де E – одинична матриця;
3. (властивість гармонічності)
$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I \quad B(x_3, x_2) B(x_2, x_1) = B(x_3, x_1);$$
4. розв'язок початкової задачі (3), (5) зображається у вигляді (у формі Коші)
$$\overline{Y}(x) = B(x, x_0)\overline{Y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} B(x, t)\, d\overline{F}(t), \tag{7}$$
де $x_0, x \in I$.

Зауваження 1. Під розв'язком КДР (1) будемо розуміти першу координату $y(x)$ вектора $\overline{Y}(x)$, за допомогою якого це рівняння зводиться до коректної системи диференціальних рівнянь першого порядку (3).

II. Частково вироджені та вироджені квазідиференціальні рівняння

Уточнимо тепер структуру коефіцієнтів КДР (1). Припустимо, що $a_{00}(x), a_{i0}(x), a_{0j}(x), i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ – кусково-сталі на інтервалі $[a; b) \subset I$ функції, які можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} a_{00}(x) &= \sum_{s=0}^{p} a^s_{00} \cdot \Theta_s(x), \\ a_{i0}(x) &= \sum_{s=0}^{p} a^s_{i0} \cdot \Theta_s(x), \\ a_{0j}(x) &= \sum_{s=0}^{p} a^s_{0j} \cdot \Theta_s(x), \end{aligned} \tag{8}$$

де $a^s_{00}, a^s_{i0}, a^s_{0j} \in \mathbb{R}$, $\Theta_s(x)$ – *характеристична функція* проміжку $[x_s; x_{s+1}), s = 0, 1, \ldots, p$, тобто

$$\Theta_s(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_s; x_{s+1}), \\ 0, & x \notin [x_s; x_{s+1}). \end{cases} \tag{9}$$

$x_1, \ldots, x_s, \ldots, x_p$ – точки розривів коефіцієнтів $a_{00}(x), a_{i0}(x), a_{0j}(x)$.

Коефіцієнти $a_{ij}(x), i \cdot j \neq 0$ мають такий вигляд:

$$a_{ij}(x) = \sum_{s=1}^{p+1} a^s_{ij} \delta(x - x_s), \tag{10}$$

де $a^s_{ij} \in \mathbb{R}$, $\delta(x - x_s)$ – функція Дірака з носієм у точці x_s. Припустимо також, що функції, які знаходяться в правій частині КДР (1), подаються у вигляді

$$f_i(x) = \sum_{s=1}^{p} f^s_i \eta(x - x_s), \tag{11}$$

де $f^s_i \in \mathbb{R}$, $\eta(x - x_s)$ – зміщена функція Хевісайда: $\eta'(x - x_s) = \delta(x - x_s)$.

Означення 1. Квазідиференціальне рівняння (1), коефіцієнти якого $a_{ij}(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m$ і функції $f_i(x), i = 0, 1, \ldots, m-1$ мають зображення (8), (10), (11) називатимемо частково виродженим (ЧВКДР).

Означення 2. Нехай справедливими є зображення (10), (11). Виродженим квазідиференціальним рівнянням (ВКДР) називатимемо рівняння вигляду

$$\left(a_{00}(x) y^{(n)}(x)\right)^{(m)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (-1)^{m-j} \left(a_{ij}(x) y^{(n-i)}\right)^{(m-j)} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{i+1} f_i^{(i+1)}(x).$$

Очевидно, що ЧВКДР і ВКДР є частинними випадками КДР (1), коефіцієнти якого задовольняють умови 1)-4), тому для них справедливі всі властивості, описані у попередньому пункті. З іншого боку, специфічна структура їх коефіцієнтів дозволяє будувати матрицю Коші, яка використовується в застосуваннях, в замкненому вигляді.

III. Структура матриці Коші систем, що відповідають ЧВКДР і ВКДР

Розглянемо однорідне ЧВКДР

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\left(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\right)^{(m-j)}=0 \qquad (12)$$

і відповідну йому систему диференціальних рівнянь першого порядку (6). За умов (8), (10) матриця $\Delta C(x_s)$ має вигляд

$$\Delta C(x_s)=\begin{pmatrix} O_n & O_{nm} \\ C_s & O_{mn}\end{pmatrix} \qquad (13)$$

де O_n – нульова матриця n-го порядку, O_{pq} – нульові матриці розміру $p\times q$, матриця C_s має вигляд

$$C_s=\begin{pmatrix} a^s_{n1} & a^s_{n-1,1} & \dots & a^s_{11} \\ a^s_{n2} & a^s_{n-1,2} & \dots & a^s_{12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^s_{nm} & a^s_{n-1,m} & \dots & a^s_{1m}\end{pmatrix}$$

тобто стрибки системи (6) за умов (8), (10) є лише в носіях x_s функцій Дірака $\delta(x-x_s)$. Поряд з системою (6) розглянемо систему диференціальних рівнянь першого порядку з кусково-сталими коефіцієнтами, породженими формулами (8)

$$\overline{Y}'=\left(\sum_{s=0}^{p}A_s\Theta_s(x)\right)\overline{Y}, \qquad (14)$$

де квадратні матриці A_s – сталі на проміжках $[x_s;x_{s+1})$, а $\Theta_s(x)$ – характеристичні функції (9) цих проміжків.

Система (14) індукує на кожному з проміжків $[x_s;x_{s+1})$ систему диференціальних рівнянь

$$\overline{Y}'_s=A_s\overline{Y}_s, s=0,1,\dots,p. \qquad (15)$$

Позначимо матрицю Коші системи (15) через $\tilde{B}_s(x,\alpha)$ і вважатимемо її відомою для довільного $s=0,1,\dots,p$. Тоді справедлива

Теорема 1. *Матриця Коші системи диференціальних рівнянь (6), що відповідає ЧВКДР, при $\alpha=a$ має вигляд*

$$B(x,a)=\sum_{s=0}^{p}B_s(x,a)\Theta_s(x) \qquad (16)$$

де матриці $B_s(x,a)$ обчислюються з рекурентних співвідношень

$$\begin{gathered}B_0(x,a)=\tilde{B}_0(x,a), x\in[a;x_1);\\ B_s(x,a)=\tilde{B}_s(x,x_s)\left(E+\Delta C(x_s)\right)B_{s-1}(x_s-0,a), x\in[x_s;x_{s+1}).\end{gathered} \qquad (17)$$

□ *Доведення.* Доведення проведемо методом математичної індукції за p. Перевіримо справедливість формули (16) при $p=1$. На проміжку $[a;x_1)$ $B_0(x,a)=\tilde{B}_0(x,a)$. Для продовження її на проміжок $[x_1;b)$ скористаємося з властивості гармонічності

$$B_1(x,a)=\tilde{B}_1(x,x_1)B_0(x_1,a).$$

Враховуючи властивість 2 матриці Коші, одержимо формулу

$$B_1(x,a)=\tilde{B}_1(x,x_1)(E+\Delta C(x_1))B_0(x_1-0,a).$$

Очевидно, що на проміжку $[a;b)$ матриця Коші $B(x,a)$ подається у вигляді

$$B(x,a)=B_0(x,a)\Theta_0(x)+B_1(x,a)\Theta_1(x).$$

Припустимо, що формула (16) справедлива при $p=k$, тобто існує зображення

$$B(x,a)=\sum_{s=0}^{k}B_s(x,a)\Theta_s(x), \qquad (18)$$

а з (17), зокрема, слідує, що при $x\in[x_k;x_{k+1})$

$$B_k(x,a)=\tilde{B}_k(x,x_k)\left(E+\Delta C(x_k)\right)B_{k-1}(x_k-0,a). \qquad (19)$$

Неахай $p=k+1$, тобто інтервал $[a;b)$ містить $k+1$ точок – носіїв узагальнених коефіцієнтів відповідного ЧВКДР. При $x\in[x_{k+1};b)$ за властивістю гармонічності маємо

$$B_{k+1}(x,a)=B(x,x_{k+1})B(x_{k+1},a),$$

Звідки

$$B_{k+1}(x,a)=B(x,x_{k+1})(E+\Delta C(x_{k+1})B(x_{k+1}-0,a).$$

При $x\in[x_{k+1};b)$ маємо, що $B(x,x_{k+1})=\tilde{B}_{k+1}(x,x_{k+1})$. Оскільки інтервал $(x_{k+1}-0,a)$ містить k точок – носіїв узагальнених коефіцієнтів відповідного ЧВКДР, то справедливими є зображення (18), (19), звідки слідує справедливість формул (16) та (17) для $p=k+1$. ■

Наслідок 1. Якщо $x\in[x_s;x_{s+1})\subset I$, то для фундаментальної матриці системи (6), що відповідає однорідному ЧВКДР (12), справедливе таке мультиплікативне представлення:

$$B_s(x,x_0)=\tilde{B}_s(x,x_s)\prod_{i=0}^{s-1}(E+\Delta C(x_{s-i}))\tilde{B}_{s-i-1}(x_{s-i},x_{s-i-1}). \qquad (20)$$

Структура матриці Коші системи що відповідає однорідному ВКДР

$$\left(a_{00}(x)y^{(n)}(x)\right)^{(m)} + \\ + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{m-j} \left(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\right)^{(m-j)} = 0 \tag{21}$$

теж має вигляд (16), але в цьому конкретному випадку матриці $\tilde{B}_s(x,\alpha)$ однакові на всіх проміжках $[x_s; x_{s+1})$ і будуються в явному вигляді [4].

Лема 1. *Функція Коші КДР*

$$\left(a_{00}(x)y^{(n)}\right)^{(m)} = 0, \tag{22}$$

відповідного ВКДР (21), має вигляд

$$K(x,\alpha) = (-1)^{m-1} \frac{1}{(n-1)!(m-1)!} \int_{\alpha}^{x} a_{00}^{-1}(t)(x-t)^{n-1}(t-\alpha)^{m-1} dt. \tag{23}$$

□ *Доведення.* Формула (23) доводиться безпосередньою перевіркою шляхом послідовного диференціювання правої частини за параметром x і врахування вигляду квазіпохідних (2). ■

Позначимо

$$I_{pq}(x,\alpha) = \frac{1}{p!q!} \int_{\alpha}^{x} a_{00}^{-1}(t)(x-t)^p(t-\alpha)^q dt.$$

Лема 2. *Матриця Коші системи, що відповідає однорідному ВКДР (21), має вигляд*

$$B_c(x,\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & x-\alpha & \dots & \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} & I_{n-1,0}(x,\alpha) & \dots & (-1)^{m-1} I_{n-1,m-1}(x,\alpha) \\ 0 & 1 & \dots & \frac{(x-\alpha)^{n-2}}{(n-2)!} & I_{n-2,0}(x,\alpha) & \dots & (-1)^{m-1} I_{n-2,m-1}(x,\alpha) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & I_{0,0}(x,\alpha) & \dots & (-1)^{m-1} I_{0,m-1}(x,\alpha) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & (-1)^{m-1} \frac{(x-\alpha)^{m-1}}{(m-1)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

□ *Доведення.* Достатньо зауважити , що перший рядок в (24) утворює фундаментальну систему розв'язків КДР (21), а інші рядки – послідовні квазіпохідні за змінноюx. ■

IV. Застосування

A Початкові задачі

Для ефективного застосування формули (7) необхідно уточнити структуру інтеграла Рімана-Стільтьєса в її правій частині, враховуючи спеціальний вигляд вектор-функції $\overline{F}'(x)$. Оскільки $\overline{F}(x) = (0,\dots,0,f_{m-1},\dots,f_1,f_0)^\top$, то

$$\overline{F}(x) = \sum_{s=1}^{p+1} \overline{\Phi}_s \eta(x-x_s), \tag{25}$$

де $\overline{\Phi}_s = (0,\dots,0,f_{m-1}^s,\dots,f_1^s,f_0^s)^\top$, тобто

$$\overline{F}'(x) = \sum_{s=1}^{p} \overline{\Phi}_s \delta(x-x_s).$$

Лема 1. *Якщо вектор-функція $\overline{F}(x)$ має вигляд (25), то інтеграл Рімана-Стільтьєса у формулі (7) (яка відповідає ЧВКДР чи ВКДР) обчислюється так:*

$$\int_{x_0}^{x} B(x,t)d\overline{F}(t) = \sum_{s=0}^{p} \left(\sum_{l=0}^{s} B_l(x,x_l)\overline{\Phi}_l \right) \Theta_s(x) \tag{26}$$

де $\overline{\Phi}_0 = 0$.

□ *Доведення.* Доведення проводиться методом математичної індукції за p. ■

Зауваження 1. З урахуванням формул (16) і (26) формулу (7) для розв'язування початкової задачі (3), (5) можна подати в зручному для практичного користування вигляді:

$$\overline{Y}(x) = \sum_{s=0}^{p} \left(B_s(x,x_0)\overline{Y}_0 + \sum_{l=0}^{s} B_l(x,x_l)\overline{\Phi}_l \right) \Theta_s(x) \tag{27}$$

Зауваження 2. Враховуючи формулу (27), розв'язок відповідної початкової задачі для ЧВКДР, зважаючи на зауваження 1, можна подати у вигляді:

$$y(x) = \sum_{s=0}^{p} \left(\sum_{i=0}^{n+m-1} K_s^{\{i\}}(x,x_0) y_0^{[n+m-i-1]} + \sum_{l=0}^{s} \sum_{i=0}^{m+1} K_l^{\{i\}}(x,x_l) f_i^l \right) \Theta_s(x), \tag{28}$$

де $K_l^{\{i\}}(x,x_l)$ – елементи матриці $B_l(x,x_l)$.

Приклад 1. Розглянемо неоднорідне ЧВКДР

$$y'' + \left(1 + \frac{1}{6}\delta\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8}\delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) y = \delta\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tag{29}$$

з початковою умовою

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \tag{30}$$

Квазіпохідна у цьому випадку збігається із звичайною похідною, тобто $y^{[1]}(x) = y'(x)$. Задача (29), (30) зводиться до задачі Коші для диференціальної системи першого порядку вигляду (3), (5), де:

$$C'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(1 + \frac{1}{6}\delta\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8}\delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) & 0 \end{pmatrix};$$

$$\overline{F}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix};$$

$$\overline{Y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Можна переконатися, що функція Коші для "неперервної частини" рівняння (29), тобто для рівняння $y''(x) + y = 0$ обчислюється за формулою $K(x, \alpha) = \sin(x - \alpha)$. Фундаментальна матриця, відповідна цьому рівнянню, матиме вигляд:

$$\tilde{B}(x, \alpha) = \begin{pmatrix} cos(x-\alpha) & sin(x-\alpha) \\ -sin(x-\alpha) & cos(x-\alpha) \end{pmatrix}$$

Отже,

$$\tilde{B}_0(x, 0) = \begin{pmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{pmatrix}$$

Згідно з рекурентними співвідношеннями (17) знаходимо вигляд матриць Коші $B_1(x, 0)$ та $B_2(x, 0)$:

$$B_1(x, 0) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 13cosx - sinx & cosx + 11sinx \\ -cosx - 13sinx & 11cosx - sinx \end{pmatrix}$$

$$B_2(x, 0) = \frac{1}{96}\begin{pmatrix} -8sinx + 103cosx & 88sinx + 19cosx \\ -8cosx - 103sinx & 88cosx - 19sinx \end{pmatrix}$$

Тоді, використовуючи зображення (28), знайдемо розв'язок задачі (29), (30):

$$y(x) = y_0(x) \cdot \Theta_0(x) + y_1(x) \cdot \Theta_1(x) + y_2(x) \cdot \Theta_2(x),$$

де $\Theta_0(x)$, $\Theta_1(x)$, $\Theta_2(x)$ – характеристичні функції інтервалів $\left[0; \frac{\pi}{4}\right)$, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ та $\left[\frac{\pi}{2}; \infty\right)$ відповідно, а

$$y_0(x) = sinx;$$

$$y_1(x) = \frac{1 - 6\sqrt{2}}{12}cosx + \frac{11 + 6\sqrt{2}}{12}sinx;$$

$$y_2(x) = \frac{11 + 6\sqrt{2}}{12}sinx - \frac{173 + 42\sqrt{2}}{96}cosx.$$

B Крайові задачі

Позначимо $a = x_0, b = x_{p+1}$. Розглянемо крайові умови для неоднорідного ЧВКДР:

$$\sum_{k=1}^{n+m}\left(r_{pk}y^{[k-1]}(a) + s_{pk}y^{[k-1]}(b)\right) = u_p, \quad p = 1, \ldots, n+m, \tag{31}$$

де $r_{pk}, s_{pk}, u_p \in \mathbb{R}$. Тоді для відповідної узагальненої диференціальної системи (3) крайова умова набуде вигляду

$$R\overline{Y}(a) + S\overline{Y}(b) = \overline{U}, \tag{32}$$

де $R = \{r_{pk}\}_{k,p=1}^{n+m}$, $S = \{-s_{pk}\}_{k,p=1}^{n+m}$ – дійснозначні матриці $(n+m)$-го порядку, $\overline{U} = \{u_p\}_{p=1}^{n+m}$ – діснозначний вектор.

Лема 2. *Якщо*

$$Det(R + SB(b, a)) \neq 0, \tag{33}$$

то існує єдиний розв'язок крайової задачі (3), (32) для системи, що відповідає ЧВКДР, який зображається у вигляді:

$$\overline{Y}(x) = \sum_{s=0}^{p}\left(B_s(x, a)(R + SB_p(b, a))^{-1}\left(\overline{U} - S\sum_{l=0}^{p+1}B_l(b, x_l)\overline{\Phi}_l\right) + \sum_{l=0}^{s}B_l(x, x_l)\overline{\Phi}_l\right)\Theta_s(x), \tag{34}$$

де

$$B_p(b, a) = \prod_{l=0}^{p}(E + \Delta C(x_{p+1-l}))\tilde{B}_{p-l}(x_{p+1-l}, x_{p-l}).$$

□ *Доведення.* Для доведення застосуємо метод зведення крайової задачі до початкової. Згідно з (7) маємо

$$\overline{Y}(b) = B(b,a)\overline{Y}(a) + \int_a^b B(b,t)d\overline{F}(t).$$

Звідки

$$S\overline{Y}(b) = SB(b,a)\overline{Y}(a) + S\int_a^b B(b,t)d\overline{F}(t).$$

Враховуючи крайову умову (32), можна одержати рівність:

$$\overline{Y}(a)=(R+SB(b,a))^{-1}\left(\overline{U} - S\int_a^b B(b,t)dF(t)\right). \quad (35)$$

Виконання умови (33) забезпечує існування оберненої матриці $(R + SB(b,a))^{-1}$, а, отже, рівність (35) має зміст. Отже, крайова задача (3), (32) для ЧВКДР звелася до задачі Коші (3), (35), розв'язок якої існує і єдиний та подається у формі Коші (7). Враховуючи формулу (35) для початкового значення $\overline{Y}(a)$ та зображення (16) і (26), одержимо формулу (34). ■

Приклад 2. Розглянемо неоднорідне ВКДР

$$y^{IV} - \left(\left(2\delta\left(x-\frac{1}{4}\right)+\delta\left(x-1\right)\right)y'\right)' + \left(3\delta\left(x-\frac{1}{4}\right)+2\delta\left(x-1\right)\right)y = -5\delta\left(x-\frac{1}{4}\right)+2\delta'\left(x-1\right) \quad (36)$$

із крайовими умовами

$$\begin{array}{c} y(0) = y'(0) = 0; \\ y^{[2]}(1) = y^{[3]}(1) = 0. \end{array} \quad (37)$$

Згідно з формулами (2) квазіпохідні в цьому випадку матимуть вигляд

$$\begin{array}{c} y^{[1]}(x) = y'(x); \\ y^{[2]}(x) = y''(x); \\ y^{[3]}(x) = 2\delta\left(x-1\right) - y'''(x) + \\ + \left(2\delta\left(x-\frac{1}{4}\right)+\delta\left(x-1\right)\right)y'(x) \end{array}$$

За допомогою цих квазіпохідних задача (36), (37) зводиться до задачі вигляду (3), (32), для якої

$$C'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_1(x) & 0 & -1 \\ a_2(x) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

де

$$a_1(x) = 2\delta\left(x-\frac{1}{4}\right)+\delta\left(x-1\right),$$

$$a_2(x) = 3\delta\left(x-\frac{1}{4}\right)+2\delta\left(x-1\right);$$

$$\overline{F}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\eta(x-1) \\ 5\eta\left(x-\frac{1}{4}\right) \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} E_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 \end{pmatrix}; S = \begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ O_2 & E_2 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

$$\overline{U} = O_{41},$$

E_2, O_2 – одинична та нульова матриці 2-го порядку відповідно, O_{41} – 4-вимірний нульовий вектор. Функція Коші відповідного КДР $y^{IV} = 0$ буде обчислюватися за формулою: $K(x,\alpha) = -\frac{(x-\alpha)^3}{6}$. Отже, зважаючи на структуру [6] фундаментальної матриці, одержимо вигляд матриці Коші, відповідної даному рівнянню:

$$\tilde{B}(x,\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & x-\alpha & \frac{(x-\alpha)^2}{2} & -\frac{(x-\alpha)^3}{6} \\ 0 & 1 & x-\alpha & -\frac{(x-\alpha)^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -(x-\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (39)$$

Використовуючи формулу (34) і виписавши з неї перший рядок, одержимо розв'язок задачі (36), (37):

$$y(x) = y_0(x)\Theta_0(x) + y_1(x)\Theta_1(x) + y_2(x)\Theta_2(x),$$

де $\Theta_0(x)$, $\Theta_1(x)$, $\Theta_2(x)$ – характеристичні функції проміжків $[0;\frac{1}{4})$, $[\frac{1}{4};1)$, $[1;\infty)$ відповідно, а

$$y_0(x) = -\frac{1930160}{3080129}x^2 + \frac{2128128}{3080129}x^3;$$

$$y_1(x) = \frac{12134}{9240387} - \frac{1184864}{9240387}x - \frac{603904}{3080129}x^2 - \frac{190050}{3080129}x^3;$$

$$y_2(x) = -\frac{106969489}{1182769536} - \frac{173501837}{394256512}x - \frac{73}{128}x^2 + \frac{275}{384}x^3$$

C Багатоточкові задачі

Розглянемо багатоточкову задачу (задачу Валле-Пуассена) для неоднорідного ЧВКДР:

$$y(x_i) = y_i, i = 0, \ldots, n+m-1.$$

Тоді для відповідної диференціальної системи (3) ставиться така багатоточкова умова:

$$\sum_{i=0}^{n+m-1} R_i \overline{Y}(x_i) = \overline{U}, \tag{40}$$

де R_i – матриця $(n+m)$-го порядку, елементами якої є нулі, окрім $a_{i+1,1}, = 1$, $\overline{U} = (y_0, y_1, \dots, y_{n+m-1})^\top$.

Лема 3. *Якщо виконується умова*

$$Det\left(R_0 + \sum_{i=1}^{n+m-1} R_i B(x_i, x_0)\right) \neq 0, \tag{41}$$

то існує єдиний розв'язок багатоточкової задачі (3), (40), який зображається у вигляді:

$$\overline{Y}(x) = \sum_{s=0}^{p}\left(B_s(x,x_0)\overline{Y}_0 + \sum_{l=0}^{s} B_l(x,x_l)\overline{\Phi}_l\right)\Theta_s(x) \tag{42}$$

де

$$\overline{Y}(x_0) = \left(R_0 + \sum_{i=1}^{n+m-1} R_i B_i(x_i,x_0)\right)^{-1}\left(\overline{U} - \sum_{i=1}^{n+m-1} R_i \sum_{l=0}^{i} B_l(x_i,x_l)\overline{\Phi}_l\right).$$

□ *Доведення.* Скориставшись представленням розв'язку початкової задачі для системи диференціальних рівнянь першого порядку у формі Коші (7), одержимо:

$$\overline{Y}(x_i) = B(x_i,x_0)\overline{Y}(x_0) + \int_{x_0}^{x_i} B(x_i,t)d\overline{F}(t), i = 0,\dots,n+m-1.$$

Домножимо i-ту рівність на R_i і використаємо багатоточкову умову (40), одержимо рівність, з якої знайдемо $\overline{Y}(x_0)$:

$$\overline{Y}(x_0) = \left(R_0 + \sum_{i=1}^{n+m-1} R_i B(x_i,x_0)\right)^{-1}\left(\overline{U} - \sum_{i=1}^{n+m-1} R_i \int_{x_0}^{x_i} B(x_i,t)d\overline{F}(t)\right). \tag{43}$$

За виконання умови (41) остання рівність має зміст, а, отже, існує єдиний розв'язок початкової задачі (3), (43), а значить і відповідної задачі (3), (40). Враховуючи формулу (35) для початкового значення $\overline{Y}(x_0)$ та зображення (16) і (26), одержимо формулу (42). ■

Приклад 3. Розглянемо однорідне ВКДР 4-го порядку

$$y^{IV} - \left(5\delta\left(x - \frac{1}{2}\right)y'\right)' + 7\delta(x-1)y = 0 \tag{44}$$

разом із 4-точковою умовою:

$$y(0) = 1; y\left(\frac{1}{4}\right) = -1; y\left(\frac{1}{2}\right) = 2; y(1) = -\frac{1}{2}. \tag{45}$$

За допомогою квазіпохідних

$$y^{[1]}(x) = y'(x);$$
$$y^{[2]}(x) = y''(x);$$
$$y^{[3]}(x) = -y'''(x) + 5\delta\left(x - \tfrac{1}{2}\right)y'$$

вказаним вище методом зводимо цю задачу до багатоточкової задачі вигляду (6), (40) із відповідним вектором

$$\overline{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -\frac{1}{2}. \end{pmatrix}$$

Фундаментальна матриця $\tilde{B}(x,\alpha)$, що відповідає "неперервній" частині КДР (44) має вигляд (39). Тоді вираз для початкового вектора має вигляд:

$$\overline{Y}(0) = \left(R_1 + R_2\tilde{B}\left(\frac{1}{4},0\right) + \right.$$

$$\left. + R_3\Delta_1\tilde{B}\left(\frac{1}{2},0\right) + R_4\Delta_2\tilde{B}\left(1,\frac{1}{2}\right)\Delta_1\tilde{B}\left(\frac{1}{2},0\right)\right)^{-1}\overline{U}$$

де

$$\Delta_1 = E + \Delta C\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_2 = E + \Delta C(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Отже,

$$\overline{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1855}{72} \\ \frac{1039}{6} \\ \frac{1118}{3} \end{pmatrix}$$

Розв'язок задачі (44), (45) подається таким сплайном:

$$y(x) = y_0(x)\Theta_0(x) + y_1(x)\Theta_1(x) + y_2(x)\Theta_2(x),$$

де

$$y_0(x) = 1 - \frac{1855}{72}x + \frac{1039}{12}x^2 - \frac{559}{9}x^3;$$

$$y_1(x) = \frac{29}{24} - \frac{1945}{72}x + \frac{1069}{12}x^2 - \frac{574}{9}x^3;$$
$$y_2(x) = \frac{5}{8} - \frac{1819}{72}x + \frac{262}{3}x^2 - \frac{2275}{36}x^3;$$

$\Theta_0(x)$, $\Theta_1(x)$, $\Theta_2(x)$ – характеристичні функції проміжків $\left[0;\frac{1}{2}\right)$, $\left[\frac{1}{2};1\right)$, $[1;\infty)$ відповідно.

D Задачі на власні значення

Розглянемо ЧВКДР довільного парного порядку

$$L_{2n} \equiv L_{nn}[y] - \lambda L_{n-1,n-1}[y] = 0, \qquad (46)$$

де λ – скалярний (комплексний) параметр,

$$L_{nn}[y] \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\left(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\right)^{(n-j)};$$

$$L_{n-1,n-1}[y] \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\left(b_{ij}(x)y^{(n-i)}\right)^{(n-j)},$$

причому коефіцієнти $a_{ij}(x)$ задовольняють умови (8), (10), а

$$b_{ij}(x) = \sum_{s=1}^{p+1} b_{ij}^s \delta(x-x_s), \quad b_{ij}^s \in \mathbb{R}.$$

Додатково вимагатимемо виконання умов:

$$\forall i,j \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x), b_{ij}(x) = b_{ji}(x).$$

Для квазідиференціального виразу $L_{nn}[y]$ введемо квазіпохідні так:

$$\begin{gathered} y^{[k]}(x) = y^{(k)}(x), k = 0,1,\ldots,n-1; \\ y^{[n]}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{i0}(x)y^{(n-i)}(x); \\ y^{[n+k]}(x) = a_{0k}(x)y^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n}(a_{ik}(x) - \lambda b_{ik}(x))y^{(n-i)}(x) - \left(y^{[n+k-1]}(x)\right)', k = 1,\ldots,n-1. \end{gathered} \qquad (47)$$

Рівняння (46) будемо розглядати разом з крайовими умовами:

$$\sum_{k=1}^{2n}\left(r_{pk}y^{[k-1]}(a) + s_{pk}y^{[k-1]}(b)\right) = 0, p = 1,\ldots,2n. \qquad (48)$$

За допомогою вектора $\overline{Y} = \left(y, y^{[1]}, \ldots, y^{[2n-1]}\right)^\top$, складеного з квазіпохідних (47), задача (46), (48) зводиться до задачі на власні значення для системи диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\overline{Y}' = (A' + \lambda B')\,\overline{Y}. \qquad (49)$$

$$R\overline{Y}(a) + S\overline{Y}(b) = 0. \qquad (50)$$

Зауважимо, що матриця $B(x)$ є кусково-сталою зі скінченною кількістю розривів першого роду. Виберемо косоермітову матрицю

$$J = \begin{pmatrix} O_n & -E_n \\ E_n & O_n \end{pmatrix}$$

і надалі вимагатимемо виконання рівності

$$RJ^{-1}R^\top = SJ^{-1}S^\top. \qquad (51)$$

Тоді задача (46), (48) зводиться до узагальненої схеми Аткінсона [7]. Звідси, зокрема, випливає дійсність спектра цієї задачі. Більш того, із специфічної структури матриці $B(x)$ випливає скінченність цього спектра.

Лема 4. *За виконання умови (51) задача (46), (48) має не більше, ніж скінченну кількість власних значень.*

□ *Доведення.* Довільний розв'язок системи (49) подається у вигляді

$$\overline{Y}(x) = B(x,a,\lambda)\overline{Y}(a),$$

зокрема

$$\overline{Y}(b) = B(b,a,\lambda)\overline{Y}(a).$$

З останньої рівності та з крайових умов (50) одержимо:

$$-R\overline{Y}(a) = SB(b,a,\lambda)\overline{Y}(a).$$

Щоб шуканий розв'язок не був тривіальним, накладаємо умову

$$Det(R + SB(b,a,\lambda)) = 0, \qquad (52)$$

яка і дає характеристичне рівняння для відшукання власних значень. Розглянемо детальніше цю умову. Враховуючи формулу стрибка розв'язку системи (49), одержимо, що для всіх точок $x_{k-1}, x_k \in I$ таких, що $x_{k-1} < x_k \in I$, справедлива формула

$$B(x_k, x_{k-1}, \lambda) = (E + \Delta A(x_k) + \lambda\Delta B(x_k))B(x_k - 0, x_{k-1}, \lambda).$$

Фундаментальна матриця $B(x_k - 0, x_{k-1}, \lambda)$ відповідає системі

$$Y'(x) = B'(x)Y(x),$$

то очевидно, що ця матриця не залежить від параметра λ. Враховуючи мультиплікативне представлення фундаментальної матриці (20), одержимо, що характеристичне рівняння (52) набуває вигляду

$$\mathcal{P}_N(\lambda) = 0,$$

де $\mathcal{P}_N(\lambda)$ – поліном деякого степеня N , а, отже, кількість власних значень (і відповідних власних функцій) є скінченною. ■

Приклад 4. Розглянемо задачу про вільні коливання консольної невагомої балки змінного поперечного перерізу, що в точках $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ несе зосереджені вантажі з масами $M_1 = \frac{1}{4}$ і $M_2 = \frac{1}{2}$ і відповідними моментами інерції $I_1 = \frac{3}{4}$ і $I_2 = 1$:

$$\left(\frac{1}{1+x^2}y''\right)'' - \lambda\left(-\left(\left(\frac{3}{4}\delta\left(x-\frac{1}{2}\right)+\delta(x-1)\right)y'\right)' + \left(\frac{1}{4}\delta\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\delta(x-1)\right)y\right) = 0, \tag{53}$$

крайові умови мають вигляд:

$$\begin{aligned} y(0) = y^{[1]}(0) = 0; \\ y^{[2]}(1) = y^{[3]}(1) = 0. \end{aligned} \tag{54}$$

Квазіпохідні у цьому випадку матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} y^{[1]}(x) &= y'(x); \\ y^{[2]}(x) &= \tfrac{1}{1+x^2}y''(x); \\ y^{[3]}(x) &= -\left(y^{[2]}(x)\right)' - \lambda\left(\tfrac{3}{4}\delta\left(x-\tfrac{1}{2}\right)+\delta(x-1)\right)y'. \end{aligned} \tag{55}$$

Тоді задача з (53), (54) зводиться до задачі виду (6), (50), для якої матриці R та S матимуть вигляд (38), а

$$C'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+x^2 & 0 \\ 0 & -\lambda a_1(x) & 0 & -1 \\ -\lambda a_2(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

де

$$a_1(x) = \left(\frac{3}{4}\delta\left(x-\frac{1}{2}\right)+\delta(x-1)\right),$$

$$a_2(x) = \left(\frac{1}{4}\delta\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\delta(x-1)\right)$$

Функцію Коші рівняння $\left(\frac{1}{1+x^2}y''\right)'' = 0$ знаходимо, враховуючи формулу (23):

$$K(x,\alpha) = -\int_\alpha^x (1+t^2)(x-t)(t-\alpha)dt.$$

Тоді згідно з (24) фундаментальна матриця, відповідна цьому рівнянню, матиме вигляд:

$$\tilde{B}(x,\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & x-\alpha & \int\limits_\alpha^x (1+t^2)(x-t)dt & -\int\limits_\alpha^x (1+t^2)(x-t)(t-\alpha)dt \\ 0 & 1 & \int\limits_\alpha^x (1+t^2)dt & -\int\limits_\alpha^x (1+t^2)(t-\alpha)dt \\ 0 & 0 & 1 & -(x-\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Значення матриці $B(1,0)$ знайдемо, користуючись мультиплікативним представленням (20):

$$B(1,0) = (E+\Delta C(1))\,\tilde{B}_1\left(1,\frac{1}{2}\right)\left(E+\Delta C\left(\frac{1}{2}\right)\right)\tilde{B}_0\left(\frac{1}{2},0\right),$$

де

$$\tilde{B}_0\left(\frac{1}{2},0\right) = \tilde{B}\left(\frac{1}{2},0\right), \tilde{B}_1\left(1,\frac{1}{2}\right) = \tilde{B}\left(1,\frac{1}{2}\right),$$

$$\Delta C\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ C_1 & O_2 \end{pmatrix}; \quad \Delta C(1) = \begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ C_2 & O_2 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4}\lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}; \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ -\frac{1}{2}\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Знайшовши корені відповідного характеристичного рівняння (52), одержимо власні значення задачі (53), (54):

$$\lambda_1 = 0.588; \lambda_2 = 4.083; \lambda_3 = 61.263; \lambda_4 = 226.449.$$

Висновки

Специфічна структура коефіцієнтів ЧВКДР та ВКДР дозволяє не тільки знаходити вигляд відповідної матриці Коші, а й конструктивно зобразити розв'язки таких рівнянь, зокрема, у вигляді сплайнів. Практичний інтерес такі КДР можуть становити при застосуванні їх до наближеного розв'язання узагальнених (та й звичайних) КДР. Деякі застосування ЧВКДР та ВКДР наведені, наприклад, у роботах [8],[9].

Література

[1] Стасюк М., Тацій Р. Матричні інтегральні рівняння та диференціальні системи з мірами // Вісник НУ "Львівська політехніка": сер. "Фіз.-мат. науки". – 2006. – №566. – С. 33-40.

[2] Тацій Р.М. Дискретно-неперервні крайові задачі для диф.рівнянь з мірами: Автореф. дис... д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.02./ Льв. держ. ун-тет – Львів, 1994. – 34 с.

[3] Тацій Р.М., Мазуренко В.В. Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь

парного порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, №1. – С. 43-53.

[4] Кісілевич В., Стасюк М., Тацій Р. Конструкція елементів фундаментальної матриці квазідиференціальних рівнянь з узагальненими коефіцієнтами // Вісник НУ "Львівська політехніка": сер. "Фіз.-мат. науки". – 2004. – №518. – С. 30-35.

[5] Тацій Р.М., Пахолок Б.Б. Про порядок узагальнених функцій в правих частинах квазідиференціальних рівнянь // Доп. АН УРСР. – Сер. А. – 1991. – №1. – С. 16–19.

[6] Тацій Р.М., Пахолок Б.Б. Про структуру фундаментальної матриці квазідиференціального рівняння // Доп. АН УРСР. – Сер. А. – 1989. – №4. – С. 25–28.

[7] Мазуренко В.В. Про звідність дисретно-неперервної крайової задачі до узагальненої схеми Аткінсона // Доп. НАН України. – 2001. – №8. – С. 19–22.

[8] Стасюк М.Ф., Власій О.О. Рекурентне співвідношення для узагальненого квазідиференціального рівняння другого порядку Вісник НУ "Львівська політехніка": сер."Прикладна матем". – 2000. – №407. – С. 82-87.

[9] Тацій Р.М., Власій О.О. Еквівалентна рекурентна формула для узагальненого квазідиференціального рівняння 4-го порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, №4. – С. 49-55.

TEMPLATE OF THE ARTICLE

R.M. Tatsij[a], M.F. Stasjuk[a], O.O. Vlasij[b], M. Zhyvichynsky[c]

[a] *Lviv State University of vital activity safety ,*
35 Kleparivska Str., 79058 Lviv, Ukraine
[b] *Pricarpathion National Stephanyk University*
27 Shevchenko Str., 76000, Ivano-Frankivsk, Ukraine
[c] *Universytet Kazimierza Wielkiego w Bydgoszczy,*
pl. Weyssenhoffa 11, 85-072, Bydgoszcz, Polska

The special classes of quasidifferential equations of arbitrary order with generalized functions in coefficients and second members of equation are examined. The general solutions of such equations can be constructed in explicit form, which is exemplified in applied problems.

Keywords: confluent and partial-confluent quasidifferential equations, integral Riemann-Stieltjes, boundary-value problems

2000 MSC: 34B60

UDK: 517.912