З іншого боку, з мультиплікативності φ випливає, що

$$\varphi(f^2)=(\varphi(f))^2=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(P_n)\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m(P_m)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}\varphi_n(P_n)\varphi_{k-n}(P_{k-n}).$$

Порівнюючи дві останні формули, отримуємо, що $\varphi_n=\varphi_1^n$ для будь-якого n. Крім того, з того, що норма мультиплікатиного функціоналу дорівнює одиниці, випливає, що $\|\varphi_1\|=1$. Враховуючи, що лінійний функціонал $\varphi_1\in E'$ визначається деяким елементом $x\in E$, отримаємо, що всякий лінійний мультиплікативний функціонал на W задається значенням в деякій точці одиничної сфери. Топологія Гельфанда на цій сфері задається як найслабша топологія, в якій всі функції з $W(B)$ є неперервними.

1. Diestel J., Jarchow H., Tonge A. Absolutely Summing Operators, Cambrige studies in advanced mathematics, 43. 2. Dineen S. Complex Analysis in Locally Convex Spaces // Math. Studies. 1981. 3. Holub J.R., Retheford J.R. Some curious bases for c_0 and $C[0,1]$ // Studia Math. 34, 1970. P.227-240. 4. Holub J.R. Thensor product bases and thensor diagonals // Trans. Amer. Math. Soc., 1970. P.563-579.

УДК 517.927

Захарійченко Ю.О.
Інститут математики НАН України

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ І ОБМЕЖЕННЯМИ

Application of iterative and projection-iterative methods to the boundary problem for the system of differential equations with an impulse effect in fixed moments of time and with parameters is sufficiently substantiated.

Обґрунтовується застосування ітераційного і проекційно-ітеративного методів до крайової задачі для системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу та параметрами.

Останнім часом набули поширення проекційно-ітеративні методи [2,3], які поєднують в собі ідею як проекційних, так й ітеративних методів. Нижче розглядається система диференціальних рівнянь з параметрами в імпульсних умовах та обмеженнями, до якої застосовуються метод послідовних наближень та модифікований проекційно-ітеративний метод.

1. Формулювання задачі. Розглянемо крайову задачу

$$\frac{dx}{dt}+A(t)x=F(t,x)\quad, \tag{1}$$

$$x(t_i+0)=S_i x(t_i-0)+\lambda_i, i=\overline{1,l}, \tag{2}$$

$$\Phi_s(x) = \alpha_s, s = \overline{0,l}, \tag{3}$$

де $A(t)$ – неперервна при $t \in I$, де $I = [0,T]$, матриця розміру $m \times m$, $F: I \times R^m \to R^m$, S_i – сталі матриці розміру $m \times m$, $\Phi_s(x) = \{\Phi_1^s(x), \Phi_2^s(x), ..., \Phi_m^s(x)\}$, де $\Phi_j^s(x)$, $j = \overline{1,m}$, $s = \overline{0,l}$ – лінійні неперервні функціонали, $\alpha_s \in R^m$, $s = \overline{0,l}$ і $t_i \in (0,T)$ – фіксовані моменти імпульсного впливу.

Ставиться задача знайти вектор-функцію $x(t)$ і параметри $\lambda_i \in R^m$ такі, щоб задовольнялась система диференціальних рівнянь (1) при $t \in I \setminus \{t_i\}$, справджувались імпульсні умови (2) та обмеження (3).

В роботі [1] показано, що вихідна задача (1)-(3) зводиться до системи інтегральних рівнянь.

Для цього вектор-функцію $x(t)$ зображаємо у вигляді

$$x(t) = z(t) + B(t)\mu, \tag{4}$$

де параметр $\mu \in R^p$, $p = ml$ і задана неперервно-диференційовна матриця при $t \in I \setminus \{t_i\}$ $B(t)$ задовольняють умови

$$\lambda_i = (B(t_i + 0) - S_i B(t_i - 0))\mu, \quad i = \overline{1,l}, \ \Phi_s(B(\cdot)) = 0, \ s = \overline{0,l}. \tag{5}$$

Підставляючи співвідношення (4) в задачу (1)–(3), враховуючи умови (5), маємо

$$\frac{dz(t)}{dt} + A(t)z(t) + C(t)\mu = F(t, z(t) + B(t)\mu), \tag{6}$$

$$z(t_i + 0) = S_i z(t_i - 0), \ i = \overline{1,l}, \tag{7}$$

$$\Phi_s(z) = \alpha_s, \ s = \overline{0,l}, \tag{8}$$

де

$$C(t) = A(t)B(t) + \frac{dB(t)}{dt}. \tag{9}$$

Припустимо, що лінійна задача

$$\frac{dz(t)}{dt} + D(t)z(t) + U(t)\mu = y(t), \tag{10}$$

$$z(t_i + 0) = S_i z(t_i - 0), \ i = \overline{1,l}, \tag{11}$$

$$\Phi_s(z) = \alpha_s, \ s = \overline{0,l}, \tag{12}$$

де $D(t)$, $U(t)$ – задані неперервні матриці розмірності $m \times m$ і $m \times p$, відповідно, при відомій вектор-функції $y(t)$ має єдиний розв'язок

$$z(t) = h(t) + \int_0^T G(t,\tau)y(\tau)d\tau, \qquad \mu = \sigma + \int_0^T \Gamma(\tau)y(\tau)d\tau, \tag{13}$$

де $h(t)$, σ – розв'язок задачі (10)–(12) при $y(t) \equiv 0$.

Нехай

$$y(t) = M(t)z(t) + N(t)\mu + F(t, z(t) + B(t)\mu), \tag{14}$$

в якій

$$M(t) = D(t) - A(t), \quad N(t) = U(t) - C(t). \tag{15}$$

Тоді, як це встановлено в [1], вихідна задача (1)-(3) рівносильна системі інтегральних рівнянь

$$y(t)=p(t)+\int_0^T L(t,\tau)y(\tau)d\tau+F\left(t,k(t)+\int_0^T K(t,\tau)y(\tau)d\tau\right), \tag{16}$$

де

$$p(t)=M(t)h(t)+N(t)\sigma, \quad L(t,\tau)=M(t)G(t,\tau)+N(t)\Gamma(\tau), \tag{17}$$

$$k(t)=h(t)+B(t)\sigma, \quad K(t,\tau)=G(t,\tau)+B(t)\Gamma(\tau). \tag{18}$$

2. Метод послідовних наближень. До задачі (1)–(3) можна застосувати відомі наближені методи, зокрема ітераційні. Так, якщо наближення $z_{k-1}(t)$, μ_{k-1} вже відомі, виконуємо ітерацію

$$y_k(t)=M(t)z_{k-1}(t)+N(t)\mu_{k-1}+F(t,x_{k-1}(t)), \quad k\geq 1, \tag{19}$$

а вектор-функцію $z_k(t)$ і параметр μ_k визначаємо із задачі

$$\frac{dz_k(t)}{dt}+D(t)z_k(t)+U(t)\mu_k=y_k(t), \tag{20}$$

$$z_k(t_i+0)=S_i z_k(t_i-0), \quad i=\overline{1,l}, \tag{21}$$

$$\Phi_s(z_k)=\alpha_s, \quad s=\overline{0,l}, \tag{22}$$

де $y_0(t)$ – деяка задана вектор-функція.

Наближений розв’язок задачі (1)-(3) обчислюємо за формулою

$$x_k(t)=z_k(t)+B(t)\mu_k, \quad \lambda_i^k=(B(t_i+0)-S_iB(t_i-0))\mu_k, \quad i=\overline{1,l}. \tag{23}$$

За припущенням задача (20)-(22) має єдиний розв’язок

$$z_k(t)=h(t)+\int_0^T G(t,\tau)y_k(\tau)d\tau, \quad \mu_k=\sigma+\int_0^T \Gamma(\tau)y_k(\tau)d\tau. \tag{24}$$

Підставивши (24) у (19) і врахувавши позначення (17), (18), маємо

$$y_k(t)=p(t)+\int_0^T L(t,\tau)y_{k-1}(\tau)d\tau+F\left(t,k(t)+\int_0^T K(t,\tau)y_{k-1}(\tau)d\tau\right). \tag{25}$$

Отже, ітераційний процес (19)–(23) розв’язання задачі (1)–(3) зводиться до методу послідовних наближень (25) розв’язання системи нелінійних інтегральних рівнянь (16), достатні умови збіжності якого широко відомі.

3. Модифікований проекційно-ітеративний метод. Нехай $\{\varphi_j(t)\}$, $\{\psi_j(t)\}$, $j=\overline{1,n}$ – задані системи лінійно незалежних вектор-функцій і наближення $z_{k-1}(t)$, μ_{k-1} вже відомі. Тоді, згідно із даним методом, виконуємо ітерацію

$$y_k(t)=M(t)v_k(t)+N(t)\beta_k+F(t,x_{k-1}(t)), \tag{26}$$

де

$$v_k(t)=z_{k-1}(t)+\sum_{j=1}^n a_j^k\eta_j(t), \quad \beta_k=\mu_{k-1}+\sum_{j=1}^n a_j^k\gamma_j. \tag{27}$$

Для визначення вектор-функції $z_k(t)$ і параметра μ_k складаємо задачу

$$\frac{dz_k(t)}{dt}+D(t)z_k(t)+U(t)\mu_k=y_k(t), \tag{28}$$

$$z_k(t_i+0)=S_i z_k(t_i-0) \quad , \quad i=\overline{1,l}, \tag{29}$$

$$\Phi_s(z_k)=\alpha_s \quad , \quad s=\overline{0,l},\, k\ge 1\,, \tag{30}$$

а невідомі параметри a_j^k визначаємо з умови

$$\int_0^T r_k(t)\psi_i(t)dt=0\,, \quad i=\overline{1,n}\,, \tag{31}$$

де

$$r_k(t)=\frac{d}{dt}\left(z_k(t)-v_k(t)\right)+D(t)\left(z_k(t)-v_k(t)\right)+U(t)\left(\mu_k-\beta_k\right).$$

Наближений розв’язок задачі (1)–(3) обчислюємо за формулою

$$x_k(t)=z_k(t)+B(t)\mu_k\,, \quad \lambda_i^k=\left(B(t_i+0)-S_iB(t_i-0)\right)\mu_k\,, \quad i=\overline{1,l}\,. \tag{32}$$

Системи вектор-функцій $\{\eta_j(t)\}$ і векторів $\{\gamma_j\}$, $j=\overline{1,n}$ зв’язані співвідношеннями

$$\frac{d\eta_j(t)}{dt}+D(t)\eta_j(t)+U(t)\gamma_j=\varphi_j(t), \tag{33}$$

$$\eta_j(t_i+0)=S_i\eta_j(t_i-0),\; i=\overline{1,l}\,, \tag{34}$$

$$\Phi_s(\eta_j)=0\,,\; s=\overline{0,l}\,,\; j=\overline{1,n}\,. \tag{35}$$

Початкові наближення $z_0(t)$, μ_0 визначаємо із задачі (28)–(30) при $k=0$ і довільно заданій вектор-функції $y_0(t)$.

На основі формул (26)–(31) для визначення невідомих параметрів a_j^k одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розглядуваний метод вироджується в ітераційний процес (19)–(23), якщо $\eta_j(t)\equiv 0$, $\gamma_j=0$, $j=\overline{1,n}$.

Алгоритм (26)-(32) можна звести до модифікованого проекційно-ітеративного методу розв’язання системи інтегральних рівнянь (16). Для цього використаємо вирази (33)–(35), на основі яких

$$\frac{dv_k(t)}{dt}+D(t)v_k(t)+U(t)\beta_k=y_{k-1}(t)+w_k(t)\,, \tag{36}$$

$$v_k(t_i+0)=S_iv_k(t_i-0),\;\; i=\overline{1,l}\,, \tag{37}$$

$$\Phi_s(v_k)=\alpha_s\,,\; s=\overline{0,l}\,, \tag{38}$$

де

$$w_k(t)=\sum_{j=1}^{n}a_j^k\varphi_j(t)\,. \tag{39}$$

За припущенням задача (36)–(38) має єдиний розв’язок

$$v_k(t)=h(t)+\int_0^T G(t,\tau)\{y_{k-1}(\tau)+w_k(\tau)\}d\tau\,,\;\beta_k=\sigma+\int_0^T\Gamma(\tau)\{y_{k-1}(\tau)+w_k(\tau)\}d\tau\;. \tag{40}$$

Підставляючи вирази (40) у співвідношення (26), (31) і враховуючи (17), (18), (36)–(38), (28)–(30), отримаємо

$$y_k(t) = p(t) + \int_0^T L(t,\tau)\{y_{k-1}(\tau) + w_k(\tau)\}d\tau + F\left(t, k(t) + \int_0^T K(t,\tau) y_{k-1}(\tau) d\tau\right). \qquad (41)$$

$$\int_0^T \{y_k(t) - y_{k-1}(t) - w_k(t)\}\psi_i(t)dt = 0, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (42)$$

Отже, збіжність методу (26)–(32) розв'язання задачі (1)–(3) звелась до збіжності модифікованого проекційно-ітеративного методу (41),(42) для розв'язання системи інтегральних рівнянь (16), умови збіжності якого відомі [3].

1. Лучка А.Ю. Захарійченко Ю.О. Дослідження систем диференціальних рівнянь з параметрами в імпульсних умовах та обмеженнями // Нелінійні коливання. 2000. № 3. С. 325–334. 2. Курпель Н. С. Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. К., 1968. 3. Лучка А.Ю. Проекционно-итеративные методы. К., 1993.

УДК 517.944

Казмерчук А.І.
Прикарпатський університет ім. В. Стефаника, Ів.-Франківськ

ДО ОБҐРУНТУВАННЯ НАБЛИЖЕНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЗАКОНІВ ЗБЕРЕЖЕННЯ З НЕГЛАДКИМИ ДАНИМИ ЗАДАЧІ

Theorems about the convergence of approximate methods of solution of initial values problem for quasilinear conservation lows with continuos data have been proved.

Встановлено теореми про збіжність наближених методів розв'язування задачі Коші для квазілінійних законів збереження із неперервними даними.

1. Формулювання задачі, вихідні поняття

У теорії узагальнених розв'язків задачі Коші для квазілінійних рівнянь першого порядку

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i(x))_{x_i} = 0, \qquad (1)$$

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x), u_0(x) \in L_\infty(R^n), u(t,x) : \Pi_T = [0,T] \times R^n \to R^1 \qquad (2)$$

основними є питання розв'язності і обґрунтування наближених методів побудови узагальнених розв'язків. У роботі С. Кружкова [4] було доведено існування та єдиність розв'язку задачі (1), (2) з $\varphi_i \in C^1$ у сенсі наступного означення.