$$y_k(t) = p(t) + \int_0^T L(t,\tau)\{y_{k-1}(\tau) + w_k(\tau)\}d\tau + F\left(t, k(t) + \int_0^T K(t,\tau)y_{k-1}(\tau)d\tau\right). \qquad (41)$$

$$\int_0^T \{y_k(t) - y_{k-1}(t) - w_k(t)\}\psi_i(t)dt = 0, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (42)$$

Отже, збіжність методу (26)–(32) розв’язання задачі (1)–(3) звелась до збіжності модифікованого проекційно-ітеративного методу (41),(42) для розв’язання системи інтегральних рівнянь (16), умови збіжності якого відомі [3].

1. Лучка А.Ю. Захарійченко Ю.О. Дослідження систем диференціальних рівнянь з параметрами в імпульсних умовах та обмеженнями // Нелінійні коливання. 2000. № 3. С. 325–334. 2. Курпель Н. С. Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. К., 1968. 3. Лучка А.Ю. Проекционно-итеративные методы. К., 1993.

УДК 517.944

Казмерчук А.І.
Прикарпатський університет ім. В. Стефаника, Ів.-Франківськ

ДО ОБҐРУНТУВАННЯ НАБЛИЖЕНИХ МЕТОДІВ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЗАКОНІВ ЗБЕРЕЖЕННЯ З НЕГЛАДКИМИ ДАНИМИ ЗАДАЧІ

Theorems about the convergence of approximate methods of solution of initial values problem for quasilinear conservation lows with continuos data have been proved.

Встановлено теореми про збіжність наближених методів розв’язування задачі Коші для квазілінійних законів збереження із неперервними даними.

1. Формулювання задачі, вихідні поняття

У теорії узагальнених розв’язків задачі Коші для квазілінійних рівнянь першого порядку

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i(x))_{x_i} = 0, \qquad (1)$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), u_0(x) \in L_\infty(R^n), u(t,x) : \Pi_T = [0,T] \times R^n \to R^1 \qquad (2)$$

основними є питання розв’язності і обґрунтування наближених методів побудови узагальнених розв’язків. У роботі С. Кружкова [4] було доведено існування та єдиність розв’язку задачі (1), (2) з $\varphi_i \in C^1$ у сенсі наступного означення.

Означення 1. Обмежена вимірна функція $u(t,x)$ називається узагальненим розв'язком задачі (1), (2), якщо:

1) $\forall k \in R^1, \forall f(t,x) \in C_0^\infty(\Pi_T),\ f(t,x) \ge 0$ виконується нерівність

$$\iint\limits_{\Pi_T} \{|u-k| f_t + sign(u-k)\sum_{i=1}^{n}(\varphi_i(u)-\varphi_i(k)) f_{x_i}\} dxdf \ge 0 .$$

2) $\exists \xi \subset [0,T], mes\xi = 0 : \forall t \in [0,t] \setminus \xi$ функція $u(t,x)$ визначена майже скрізь в R^n і

$$\forall r \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in[0,T]\setminus\xi}} \int\limits_{|x|\le r} |u(t,x)-u_0(x)| dx = 0 .$$

Задача обґрунтування наближених методів розв'язування задачі (1), (2) була поставлена і розв'язана в роботах [1], [5], де у випадку $\varphi_i \in C^1$ сформульовані умови, які виділяють стійкі наближені методи. Також виведено оцінки швидкості збіжності наближених розв'язків до точного.

В цій роботі розглядаються основні відомі наближені методи розв'язування задачі (1), (2) з неперервними функціями із встановленням відповідних оцінок швидкості збіжності.

1. Ентропійні розв'язки

Реалізуємо відомий підхід до введення наближених розв'язків у деякому нормованому просторі B, використовуючи поняття ентропійної пари (U,F). Нехай $\varphi_i \in C^1$ $F = (F_1,...,F_n), F_i(u) \in C^1, U(u) \in C^1$, $U(u)$ –опукла донизу і крім того,

$$U'(u)\varphi_i'(u) = F_i'(u)$$

Означення 2. Обмежена вимірна функція $u(t,x)$ називається узагальненим розв'язком задачі (1), (2), якщо:

1) для будь-якої ентропійної пари (U,F) виконується нерівність

$$\iint\limits_{\Pi_\tau} \left\{ U(u) f_t + \sum_{i=1}^{n} F_i(u) f_{x_i} \right\} dxdt \ge 0, \tag{3}$$

і виконується умова 2) ***означення 1.***

Означення 3. Функція $u^\varepsilon(t,x) \in B$ називається наближеним розв'язком задачі (1), (2), якщо для будь-якої ентропійної пари виконується нерівність

$$-\iint\limits_{\Pi_T} \{U(u) f_t + \sum_{i=1}^{n} F_i(u) f_{x_i}\} dxdt \le \varepsilon \left(c_1 \|f_x\|_c + c_2 \|f_t\|_c\right) \|u^\varepsilon\|_{B(\sup pf)} \tag{4}$$

Враховуючи достатність запасу опуклих функцій $U_k(u) = |u-k|$ і можливість їхніми лінійними комбінаціями наблизити в C будь-яку опуклу донизу функцію C^1, встановлюємо таку теорему.

Теорема 1. З виконання для u^ε нерівності (3) з функціями $U_k(u) = |u-k|$, $F_i(u) = sign(u-k)(\varphi_i(u)-\varphi_i(k))$ випливає, що u^ε –наближений розв'язок задачі (1), (2).

Означення 4. Наближений метод розв’язування задачі (1), (2) називається стійким, якщо існують функції $\mu(\sigma) > 0, \mu(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to 0$ і $\nu(\sigma_1, \sigma_2) > 0, \nu(\sigma_1, \sigma_2) \to 0$ при $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \to 0$ такі, що для модулів неперервності $\lambda_x(k, t, u^\varepsilon)$ (в L_1 по x) і $\lambda_t(k, t, u^\varepsilon)$ (в L_1 по t) виконуються рівномірні оцінки

$$\lambda_x(k, t, u^\varepsilon) \le \mu(k), \tag{5}$$

$$\lambda_t(k, t, u^\varepsilon) \le \nu(k, t), \tag{6}$$

і
$$\begin{aligned} &\left\| u_1^\varepsilon(\tau, x) - u_2^\varepsilon(t, x) \right\|_{L_1(K_r)} \le \left\| u_1^\varepsilon(0, x) - u_2^\varepsilon(0, x) \right\|_{L_1(K_{r_1})} + \varepsilon c_3 \\ &\left\| u^\varepsilon(0, x) - u_0(x) \right\|_{L_1(K_r)} \le \lambda_x(k, u_0) = \lambda_0(k) \end{aligned} .$$

В [1], [5] показано, що у випадку $\varphi_i \in C^1, i = 1, ..., n, B = BV_x(R^1)$,

$$\mu(k) = k \|u_0\|_{BV_x(R^1)},$$
$$\nu(k) = (c_4 k^\gamma + c_5 \varepsilon) \|u_0\|_{BV_x(R^1)}, c \ge 0, c_2 \ge 0$$

виконується оцінка

$$\forall \tau \in (0, \tau] \ \ \forall r > 0 \ \ \forall \varepsilon_i \in (0,1], i = 1,2$$

$$\left\| u^{\varepsilon_1}(\tau, \cdot) - u^{\varepsilon_2}(\tau, \cdot) \right\| \le C((\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^\delta + \lambda_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^\delta), \tag{7}$$

де $\delta = \dfrac{\gamma}{\gamma + 1}$, а у випадку $c_2 = 0$, $\delta = \min(\gamma, \dfrac{1}{2})$.

2. Метод в’язкості

В Π_T розглянемо задачу Коші для рівняння

$$u_t + \sum_{i=1}^n (\varphi_i(u))_{x_i} = \varepsilon \Delta u, \varphi_i(u) \in C^{0,\alpha}(R) \tag{8}$$

з початковою умовою (2), $u_0(x) \in L_1(R^1)$.

Означення 5. Обмежена вимірна функція $u^\varepsilon(t, x)$ в Π_T називається узагальненим розв’язком задачі (8), (1), якщо $\forall f(t, x) \in C_{0,x}^\infty(\Pi_\tau)$, $f(\tau, x) = 0$.

$$\iint_{\Pi_T} \left\{ u^\varepsilon f_t + \sum_{i=1}^n \varphi_i(u) f_{x_i} + \varepsilon u \sum_{i=1}^n f_{x \bullet x_i} \right\} dx dt + \int_{R^1} u_0(x) f(0, x) dx = 0$$

Теорема 2. Узагальнений розв’язок задачі (5), (1) існує, причому

$$\forall \varepsilon_i \in (0,1], i = 1,2 \ \ \forall t \in (0, \tau]$$

$$\int_{R^1} (u^{\varepsilon_1}(t, x) - u^{\varepsilon_2}(t, x)) dx \le c, (\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon}_2 + \lambda_0(\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2})) \tag{9}$$

Доведення: нехай $\varphi_i^h(u)$ – середні функції для $\varphi_i(u)$, а u_h^ε – розв’язок задачі (5), (2) з $\varphi_i \equiv \varphi_i^h$, $u_0 \equiv u_0^h$. З гладкості даних задачі випливає існування класичного розв’язку і виконання рівномірної по h оцінки ([2])

$$\left| u_h^\varepsilon \right|_{1,p}^{K_R \times [\tau, T]} \le C_{\varepsilon,\tau}, \ p \in (0,1),$$

тому виділяємо послідовність $\{u_{h_m}^{\varepsilon}\}_1^{\infty}$ при $m \to \infty$ рівномірно збіжну на будь-якому компакті в Π_T до u^{ε} – розв'язку задачі (5), (2) у сенсі означення 5.

Зауважимо ([1]), що в оцінці (4) $c_2 = 0$, а c_1 не залежить від $\sup_u \left|\frac{\partial}{\partial u}(\varphi_i^h(u)\right|$, отже, і від h.

Застосовуючи техніку граничного переходу, виводимо оцінку (9).

3. Метод згладжування

В методі згладжування ([1]) для задачі (1), при n=1, (2) з $\varphi_1 \in C^2$ наближений розв'язок $u^{\varepsilon}(t,x) = u^k(t,x), (k-1)\tau \le t < k\tau, k = 1,..., \left[\frac{T}{\tau}\right]$. Тут $u^k(t,x)$ – гладкий розв'язок рівняння (1) в смузі $(k-1)\tau < t \le k\tau$ з початковим даним $u^k((k-1)\tau, x)$ – середньою функцією від $u^{k-1}((k-1)\tau, x)$.

Нехай тепер $\varphi_1(u)$ неперервна з модулем неперервності $\rho(\sigma)$ і φ_i^k – середня функція для φ_1^{δ}, а $u_{\delta}(t,x)$ – розв'язок задачі (1), (2) з $\varphi_1 \equiv \varphi_1^{\delta}$. Припустимо також, що $u_{\delta}^{\varepsilon}(t,x)$ – наближений розв'язок в методі згладжування з $\varphi_1 \equiv \varphi_1^{\delta}$.

Розглянемо функції

$$\lambda(h) = \lambda_x(h, u_0)$$

$$p(\sigma) = \sigma + \inf_{h>0}[(1+\frac{\sigma}{h})\lambda(h)],$$

$$\Omega(\sigma) = \inf_{h>0}\left(\frac{\sigma}{h} + \lambda(h)\right),$$

$$\Lambda(\varepsilon) = \inf_{\delta>0}\left(\frac{p(\sqrt{\varepsilon})\rho(\sigma)}{\delta^2} + \Omega(\rho(\delta))\right).$$

Для кожного $\varepsilon \in (0,1]$ визначимо $\bar{\delta}(\varepsilon)$ –таке, що

$$p(\sqrt{\varepsilon})\rho(\bar{\delta}(\varepsilon)/\bar{\delta}(\varepsilon))^2 + \Omega(\rho(\bar{\delta}(\varepsilon))) = \Lambda(\varepsilon)$$

Теорема 3. Нехай $v_{\varepsilon}(t,x) = u_{\bar{\delta}(\varepsilon)}^{\varepsilon}$. Тоді

$$\forall \varepsilon_i \in (0,1], i = 1,2$$

$$\left\| v_{\varepsilon_1}(t,\cdot) - v_{\varepsilon_2}(t,\cdot) \right\|_{L_1(K_r)} \le c\Lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \quad (10)$$

Доведення: з результатів роботи [3] випливає, що

$$\left\| u_{\delta_1}(t,\cdot) - u_{\delta_2}(t,\cdot) \right\|_{L_1(K_r)} \le \inf_{h>0}(4\lambda(h) + \frac{const}{h}(\rho(\delta_1) + \rho(\delta_2))).$$

Врахуємо, що для u_{δ}^{ε} – наближених розв'язків, одержаних за допомогою методу згладжування з гладкою $\varphi(u)$, виконується оцінка

$$\left\| u_{\delta}^{\varepsilon_1}(t,\cdot) - u_{\delta}^{\varepsilon_2}(t,\cdot) \right\|_{L_1(K_r)} \le c \sup_u \left| (\varphi^{\delta}(u))'' \right| (p(\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2})),$$

де $\left|(\varphi^{\delta}(u))''\right| \le \frac{c}{\delta^2}\dot{\rho}(\delta).$

Використовуючи прийом з нерівністю трикутника, після оптимізації по $\delta_i, i=1,2$ виводимо оцінку (10).

Зауваження. У випадку $\lambda(h)=B_1 h, \rho(\sigma)=B_2\sigma^{\alpha}, \alpha\in(0,1]$ в оцінці (10)

$$v_{\varepsilon_i}=u^{\varepsilon_i}_{\varepsilon_i^{1/4}}, \Lambda(\sigma)=\sigma^{1/4}.$$

4. Схема Лакса

Скінченнорізницевий метод розв’язання задачі (1), (2) був запропонований Лаксом в 1957 р. Для наближених розв’язків, одержаних за допомогою цього методу, у випадку лише неперервної функції $\varphi_1(u)$ запропонований вище підхід дає змогу встановити аналогічну оцінку (10).

У випадку $\lambda(h)=B_1 h, \rho(\sigma)=B_2\sigma^{\alpha}, \alpha\in(0,1]$ для наближених розв’язків $v_{\varepsilon}=u^{\varepsilon}_{\varepsilon^{\alpha(3-2\alpha)}}$ оцінка швидкості збіжності має вигляд $\Lambda(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^{\alpha/(6-4\alpha)}$.

1. Казмерчук А.И. Сходимость приближеных решений задачи Коши и первой краевой задачи для некоторых классов квазилинейных уравнений и систем первого порядка. Деп. в ВИНИТИ, 1991. 2. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., Мир, 1969. 3. Андреянов П.А. Об устойчивости решений задачи Коши для квазилинейных уравнений первого порядка // Мат. сборник. 1975. Т.17. № 1. С.79–89. 4. Кружков С.Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Мат. сборник. 1970. Т.81. № 2. С.228–255. 5. Казмерчук А.И. О сходимости приближенных решений задачи Коши для квазилинейных уравнений первого порядка // Вестник МГУ. Сер. матем., механ. 1989. Вып. 4. С.68–70.

УДК 517. 95

Каленюк П.І., Нитребич З.М., Плешівський Я.М.
НУ “Львівська політехніка”, кафедра обчислювальної математики і програмування

ГРАНИЧНИЙ ПЕРЕХІД ВІД РОЗВ'ЯЗКУ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОРІДНОГО ПОЛІЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТА СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

For a polylinear equation and system of partial differential equations the solution of Cauchy problem with the initial conditions at the left edge node has been obtained by means of the passage to the limit in the solution of the boundary value problem with the local multipoint conditions with respect on time for the same equation and system if all nodes tend to this left edge node.