Використовуючи прийом з нерівністю трикутника, після оптимізації по $\delta_i, i=1,2$ виводимо оцінку (10).

Зауваження. У випадку $\lambda(h)=B_1 h, \rho(\sigma)=B_2\sigma^{\alpha}, \alpha\in(0,1]$ в оцінці (10)

$$v_{\varepsilon_i}=u^{\varepsilon_i}_{\varepsilon_i^{1/4}}, \Lambda(\sigma)=\sigma^{1/4}.$$

4. Схема Лакса

Скінченнорізницевий метод розв'язання задачі (1), (2) був запропонований Лаксом в 1957 р. Для наближених розв'язків, одержаних за допомогою цього методу, у випадку лише неперервної функції $\varphi_1(u)$ запропонований вище підхід дає змогу встановити аналогічну оцінку (10).

У випадку $\lambda(h)=B_1 h, \rho(\sigma)=B_2\sigma^{\alpha}, \alpha\in(0,1]$ для наближених розв'язків $v_{\varepsilon}=u^{\varepsilon}_{\varepsilon^{\alpha(3-2\alpha)}}$ оцінка швидкості збіжності має вигляд $\Lambda(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^{\alpha/(6-4\alpha)}$.

1. Казмерчук А.И. Сходимость приближеных решений задачи Коши и первой краевой задачи для некоторых классов квазилинейных уравнений и систем первого порядка. Деп. в ВИНИТИ, 1991. 2. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., Мир, 1969. 3. Андреянов П.А. Об устойчивости решений задачи Коши для квазилинейных уравнений первого порядка // Мат. сборник. 1975. Т.17. № 1. С.79–89. 4. Кружков С.Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Мат. сборник. 1970. Т.81. № 2. С.228–255. 5. Казмерчук А.И. О сходимости приближенных решений задачи Коши для квазилинейных уравнений первого порядка // Вестник МГУ. Сер. матем., механ. 1989. Вып. 4. С.68–70.

УДК 517. 95

Каленюк П.І., Нитребич З.М., Плешівський Я.М.
НУ “Львівська політехніка”, кафедра обчислювальної математики і програмування

ГРАНИЧНИЙ ПЕРЕХІД ВІД РОЗВ'ЯЗКУ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОРІДНОГО ПОЛІЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТА СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

For a polylinear equation and system of partial differential equations the solution of Cauchy problem with the initial conditions at the left edge node has been obtained by means of the passage to the limit in the solution of the boundary value problem with the local multipoint conditions with respect on time for the same equation and system if all nodes tend to this left edge node.

З розв'язку крайової задачі з локальними багатоточковими за часом умовами для полілінійного рівняння та системи рівнянь із частинними похідними за допомогою граничного переходу при прямуванні усіх вузлів до одного крайнього лівого вузла одержано розв'язок задачі Коші для цього ж рівняння і системи рівнянь з початковими умовами у крайньому лівому вузлі.

Останніми роками активно вивчаються багатоточкові крайові задачі для рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними [1]. У роботі [2] доведено, що крайова задача з локальними багатоточковими умовами за часом для диференціального рівняння із частинними похідними є узагальненням задачі Коші для цього ж рівняння, причому вказано формули граничного переходу, відповідно до яких з розв'язку багатоточкової задачі можна одержати розв'язок задачі Коші з початковими умовами в одному з вузлів багатоточкових умов.

У цій роботі здійснимо спочатку граничний перехід від розв'язку багатоточкової задачі для полілінійного диференціального рівняння із частинними похідними до розв'язку задачі Коші для цього ж рівняння при прямуванні усіх вузлів до крайнього лівого вузла, а потім поширимо цей результат на випадок полілінійної системи рівнянь із частинними похідними.

1. **Граничний перехід для полілінійного рівняння**

Розглянемо m-точкову задачу

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)^m U(t,x)=0\,,\qquad t>0\,,\ x\in\mathbf{R}^s\,, \tag{1}$$

$$U((k-1)h,x)=\varphi_k(x)\,,\qquad k=\overline{1,m}\,, \tag{2}$$

де $a(\frac{\partial}{\partial x})$ – довільний диференціальний поліном степеня $p\in\mathbf{N}\bigcup\{0\}$ за сукупністю змінних зі сталими коефіцієнтами, $h>0$, $h\in\mathbf{R}$, $s,m\in\mathbf{N}$, а також задачу Коші для рівняння (1) з початковими умовами вигляду

$$\frac{\partial^{k-1}U}{\partial t^{k-1}}(0,x)=\varphi_k(x)\,,\qquad k=\overline{1,m}\,. \tag{3}$$

Запишемо знайдений у роботі [3] формальний розв'язок задачі (1),(2) з урахуванням його залежності від $h,\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_m(x)$:

$$U(t,x,h,\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_m(x))=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{l_j(t,h)\exp[a(\nu)(t-(j-1)h)+\nu\cdot x]\right\}\Big|_{\nu=0}\,, \tag{4}$$

де

$$l_j(t,h)=\frac{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}(t-(i-1)h)}{h^{m-1}\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}(j-i)}\,,\qquad j=\overline{1,m}\,, \tag{5}$$

$a(\nu)$ – поліном, який одержується із $a(\dfrac{\partial}{\partial x})$ заміною $\dfrac{\partial}{\partial x}$ на вектор-параметр $\nu \in \mathbf{R}^s$, $\nu \cdot x = \sum\limits_{k=1}^{s} \nu_k x_k$, $\varphi_j(\dfrac{\partial}{\partial \nu})$, $j = \overline{1, m}$, – диференціальні вирази, які одержуються формальною заміною x на $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ у розвиненнях в ряди Маклорена функцій $\varphi_j(x)$.

Функції $\exp[a(\nu)(t-(j-1)h)+\nu \cdot x]$, очевидно, є цілими відносно ν функціями. У роботі [3] виділено класи однозначної розв'язності задачі (1),(2). У цих класах розв'язок (4) задачі (1),(2) існує і є єдиним, якщо $\varphi_k(x)$, $k = \overline{1, m}$, належать до класів аналітичних на $\mathbf{R}^s$ функцій, комплексні продовження в $\mathbf{C}^s$ яких є цілими функціями:

- порядків, нижчих, ніж p' за сукупністю змінних, де $p'(p-1) = p$, у випадку $p > 1$;
- довільних скінченних порядків за сукупністю змінних у випадку $p = 1$;
- довільних порядків за сукупністю змінних у випадку $p = 0$.

Функції $l_j(t,h)\exp[a(\nu)(t-(j-1)h)+\nu \cdot x]$, $j = \overline{1, m}$, як функції відносно h є мероморфними, причому точка $h = 0$ є полюсом порядку $m-1$. Це вказує на те, що простим прямуванням h до нуля з розв'язку (4) задачі (1),(2) одержати розв'язок задачі (1),(3) неможливо.

Поліноми (5) – це так звані базисні поліноми Лагранжа [4], які мають властивість:

$$l_k((j-1)h, h) = \delta_{kj}, \quad k, j = \overline{1, m},$$

де δ_{kj} – символ Кронекера. Тому для функції $f(t) \equiv 1$, яка у вузлах $0, h, 2h, \ldots, (m-1)h$ набуває значень $1, 1, \ldots, 1$, матимемо тотожність

$$\sum_{j=1}^{m} l_j(t,h) = 1. \tag{6}$$

Аналогічно, взявши за $f(t) = t^k$, $k = \overline{1, m-1}$, отримаємо тотожності

$$\sum_{j=1}^{m-1} (jh)^k l_{j+1}(t,h) = t^k, \quad k = \overline{1, m-1}. \tag{6'}$$

Теорема 1. Формальний розв'язок задачі (1),(3) можна знайти із розв'язку (4) задачі (1),(2) за такою формулою граничного переходу

$$U(t,h) = \lim_{h \to 0} \Big\{ U(t, x, h, \varphi_1, \varphi_1, \varphi_1, \ldots, \varphi_1) + \\ + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{h^k}{k!} U(t, x, h, 0, 1^k \varphi_{k+1}, 2^k \varphi_{k+1}, \ldots, (m-1)^k \varphi_{k+1}) \Big\}. \tag{7}$$

Доведення. Обчислимо одну з границь у (7) з використанням тотожностей (6), (6′), враховуючи неперервність (цілість) відповідної функції за вектор-параметром ν:

$$\lim_{h \to 0} U(t, x, h, \varphi_1, \varphi_1, \varphi_1, \ldots, \varphi_1) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\varphi_1(\frac{\partial}{\partial \nu})\left\{\sum_{j=1}^{m} l_j(t,h)\exp[a(\nu)(t-(j-1)h)+\nu\cdot x]\right\}\Bigg|_{\nu=0} =$$

$$= \varphi_1(\frac{\partial}{\partial \nu})\left\{\exp[\nu\cdot x]\lim_{h\to 0}\sum_{j=1}^{m} l_j(t,h)\exp[a(\nu)(t-(j-1)h)]\right\}\Bigg|_{\nu=0} =$$

$$= \varphi_1(\frac{\partial}{\partial \nu})\left\{\exp[a(\nu)t+\nu\cdot x]\lim_{h\to 0}\sum_{j=1}^{m} l_j(t,h)\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(a(\nu)(j-1)h)^k}{k!}\right)\right\}\Bigg|_{\nu=0} =$$

$$= \varphi_1(\frac{\partial}{\partial \nu})\left\{\exp[a(\nu)t+\nu\cdot x]\lim_{h\to 0}\left(\sum_{j=1}^{m} l_j(t,h)+\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k\frac{a^k(\nu)}{k!}\sum_{j=1}^{m} l_j(t,h)((j-1)h)^k +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=1}^{m} l_j(t,h)\,o(h^{m-1})\right)\right\} = \varphi_1(\frac{\partial}{\partial \nu})\{\exp[a(\nu)t+\nu\cdot x]p_1(t,a(\nu))\}\big|_{\nu=0},$$

де

$$p_1(t,a(\nu)) = \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\frac{(ta(\nu))^k}{k!}. \tag{8}$$

Аналогічно обчислюємо решту границь у (7) для $k=\overline{1,m-1}$:

$$\lim_{h\to 0}\varphi_{k+1}(\frac{\partial}{\partial \nu})\left\{\exp[a(\nu)t+\nu\cdot x]\sum_{j=1}^{m}\frac{((j-1)h)^k}{k!}l_j(t,h)\exp[-a(\nu)(j-1)h]\right\}\Bigg|_{\nu=0} =$$

$$= \varphi_{k+1}(\frac{\partial}{\partial \nu})\left\{\exp[a(\nu)t+\nu\cdot x]\lim_{h\to 0}\sum_{j=1}^{m}\frac{((j-1)h)^k}{k!}l_j(t,h)\exp[-a(\nu)(j-1)h]\right\}\Bigg|_{\nu=0} =$$

$$= \varphi_{k+1}(\frac{\partial}{\partial \nu})\{\exp[a(\nu)t+\nu\cdot x]p_{k+1}(t,a(\nu))\}\big|_{\nu=0},$$

де

$$p_{k+1}(t,a(\nu)) = \frac{t^k}{k!}\sum_{j=0}^{m-1-k}(-1)^j\frac{t^j}{j!}a^j(\nu), \qquad k=\overline{1,m-1}. \tag{8$'$}$$

Отже, в результаті граничного переходу одержуємо формулу

$$U(t,x) = \sum_{k=1}^{m}\varphi_k(\frac{\partial}{\partial \nu})\{\exp[a(\nu)t+\nu\cdot x]p_k(t,a(\nu))\}\big|_{\nu=0}, \tag{9}$$

у якій $p_k(t,a(\nu))$, $k=\overline{1,m}$, – поліноми (8), (8′). Неважко переконатися безпосередньою перевіркою, що формула (9) визначає формальний розв'язок задачі Коші (1), (3). Теорема доведена.

Подібно, як у [3], можна вказати класи функцій, у яких розв'язок (9) задачі (1),(3) існує і є єдиним.

Приклад 1. З розв’язку двоточкової задачі для бікалоричного рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\Delta_s\right)^2 U(t,x)=0\,, \qquad a\in\mathbf{R}^1,\ t>0,\ x\in\mathbf{R}^s, \tag{10}$$

$$U(0,x)=\varphi_1(x)\,,\ U(h,x)=\varphi_2(x)\ , \qquad h>0\,, \tag{11}$$

($\Delta_s - s$-вимірний оператор Лапласа) одержимо розв’язок задачі Коші для рівняння (10) з початковими умовами

$$U(0,x)=\varphi_1(x)\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=\varphi_2(x)\,. \tag{12}$$

▼ Записуємо формальний розв'язок задачі (10),(11):

$$U(t,x,h,\varphi_1,\varphi_2)=\varphi_1(\frac{\partial}{\partial\nu})\left\{\frac{h-t}{h}\exp[a^2\,|\,\nu\,|^2\,t+\nu\cdot x]\right\}\Big|_{\nu=0}+$$

$$+\varphi_2(\frac{\partial}{\partial\nu})\left\{\frac{t}{h}\exp[a^2\,|\,\nu\,|^2\,(t-h)+\nu\cdot x]\right\}\Big|_{\nu=0}\,, \tag{13}$$

де $|\,\nu\,|^2=\nu_1^2+\nu_2^2+\ldots+\nu_s^2$.

За формулою (7) знаходимо розв’язок задачі Коші (10),(12):

$$U(t,x)=\lim_{h\to 0}\{U(t,x,h,\varphi_1,\varphi_1)+hU(t,x,h,0,\varphi_2)\}=$$

$$=\varphi_1(\frac{\partial}{\partial\nu})\left\{\exp[a^2\,|\,\nu\,|^2\,t+\nu\cdot x]\lim_{h\to 0}\left(\frac{h-t}{h}+\frac{t}{h}\exp[-a^2\,|\,\nu\,|^2\,h]\right)\right\}\Big|_{\nu=0}+$$

$$+\varphi_2(\frac{\partial}{\partial\nu})\left\{\exp[a^2\,|\,\nu\,|^2\,t+\nu\cdot x]\lim_{h\to 0}h\frac{t}{h}\exp[-a^2\,|\,\nu\,|^2\,h]\right\}\Big|_{\nu=0}=$$

$$=\varphi_1(\frac{\partial}{\partial\nu})\left\{(1-a^2\,|\,\nu\,|^2\,t)\exp[a^2\,|\,\nu\,|^2\,t+\nu\cdot x]\right\}\Big|_{\nu=0}+$$

$$+\varphi_2(\frac{\partial}{\partial\nu})\left\{t\exp[a^2\,|\,\nu\,|^2\,t+\nu\cdot x]\right\}\Big|_{\nu=0}\,.\ ▲$$

Приклад 2. З розв’язку рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\cdot\frac{\partial}{\partial x}-b\right)^2 U(t,x)=0\,, \qquad a,x\in\mathbf{R}^s\,,\ b\in\mathbf{R}\,, \tag{14}$$

який задовольняє умови (11), одержимо розв’язок задачі Коші для рівняння (14) з початковими умовами (12).

▼ Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що розв'язок задачі (14), (11) має вигляд

$$U(t,x,h,\varphi_1,\varphi_2)=\exp[bt]\left\{\frac{h-t}{h}\varphi_1(at+x)+\frac{t}{h}\exp[-bh]\varphi_2(a(t-h)+x)\right\}.$$

За формулою (7) маємо

$$U(t,x)=\exp[bt]\left(\lim_{h\to 0}\left\{\frac{h-t}{h}\varphi_1(at+x)+\frac{t}{h}\exp[-bh]\varphi_1(a(t-h)+x)\right\}+\right.$$

$$+\lim_{h\to 0}\left\{h\frac{t}{h}\exp[-bh]\varphi_2(a(t-h)+x)\right\}\Bigg)=$$

$$=\exp[bt]\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\varphi_1(at+x)-bt\exp[-bh]\varphi_1(a(t-h)+x)}{1}+\right.$$

$$\left.+\frac{t\exp[-bh](-a\cdot grad\varphi_1(a(t-h)+x))}{1}\right\}+t\exp[bt]\varphi_2(at+x)=$$

$$=\exp[bt]\{(1-bt)\varphi_1(at+x)-ta\cdot grad\varphi_1(at+x)+t\varphi_2(at+x)\}.$$

Отже, маємо розв'язок задачі Коші (14),(12):

$$U(t,x)=\exp[bt]\{(1-bt)\varphi_1(at+x)-ta\cdot grad\varphi_1(at+x)+t\varphi_2(at+x)\}.$$

Зауважимо, що для однозначної розв’язності двоточкової задачі (14), (11) треба вимагати належності $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ до $C^2(\mathbf{R}^s)$, а для однозначної розв’язності задачі (14),(12) – належності $\varphi_1(x)$ до $C^3(\mathbf{R}^s)$ і $\varphi_2(x)$ до $C^2(\mathbf{R}^s)$. ▲

2. Граничний перехід для полілінійної системи рівнянь

Тепер використаємо одержані у п.1 результати для граничного переходу від розв’язку багатоточкової задачі для полілінійної системи рівнянь

$$L^m(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x})U(t,x)\equiv\left(E_n\frac{\partial}{\partial t}-A(\frac{\partial}{\partial x})\right)^m U(t,x)=0,\qquad t>0,\ x\in\mathbf{R}^s, \tag{15}$$

$$U((j-1)h,x)=\Phi_j(x),\qquad j=\overline{1,m}, \tag{16}$$

де $A(\frac{\partial}{\partial x})$ – оператор-матриця порядку n, елементами якої є довільні диференціальні поліноми зі сталими коефіцієнтами, $U(t,x)$, $\Phi_j(x)$, $j=\overline{1,m}$, – вектор-функції розмірів $n\times 1$, E_n – одинична матриця порядку n, $n,m\in\mathbf{N}\setminus\{1\}$, $s\in\mathbf{N}$, до розв’язку задачі Коші для системи рівнянь (15) з початковими умовами вигляду

$$\frac{\partial^{k-1}U}{\partial t^{k-1}}(0,x)=\Phi_k(x),\qquad k=\overline{1,m}. \tag{17}$$

Запишемо знайдений у [4] формальний розв'язок задачі (15),(16), у якому врахуємо його залежність від $h,\Phi_1(x),\Phi_2(x),\ldots,\Phi_m(x)$:

$$U(t,x,h,\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_m)=$$

$$=\left[\sum_{j=1}^{m}l_j(t,h)\Phi_j^{\tau}(\frac{\partial}{\partial\nu})\left\{\exp[\nu\cdot x]\tilde{L}^{\tau}(\frac{d}{dt},\nu)\big(E_nW(t-(j-1)h,\nu)\big)\right\}\Bigg|_{\nu=0}\right]^{\tau},$$

де $l_j(t,h)$, $j=\overline{1,m}$, – базисні поліноми Лагранжа (5), $L(\frac{d}{dt},\nu)$ – оператор-матриця, яка одержується із $L(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x})$ заміною $\frac{\partial}{\partial t}$ на $\frac{d}{dt}$ і $\frac{\partial}{\partial x}$ на ν, $\tilde{L}^{\tau}(\frac{d}{dt},\nu)$ – приєднана матриця для $L(\frac{d}{dt},\nu)$, тобто оператор-матриця, для якої виконуються співвідношення

$$\tilde{L}(\frac{d}{dt},\nu)L(\frac{d}{dt},\nu)=L(\frac{d}{dt},\nu)\tilde{L}(\frac{d}{dt},\nu)=E_n\det L(\frac{d}{dt},\nu)\,, \tag{18}$$

$W(t,\nu)$ – розв'язок рівняння $\left[\det L(\frac{d}{dt},\nu)\right]W(t,\nu)=0$, який задовольняє початкові умови $\frac{d^kW}{dt^k}(0,\nu)=\delta_{k,n-1}$, $k=\overline{0,n-1}$, τ – символ транспонування.

Для виконання процедури граничного переходу від розв'язку багатоточкової задачі (15),(16) до розв'язку задачі (15),(17) нам буде потрібною

Лема. Для $k\in\mathbf{N}$ справедливі такі рівності

$$\tilde{L}^\tau(\frac{d}{dt},\nu)\left(E_nW^{(k)}(t,\nu)\right)=\left(A^\tau(\nu)\right)^k\tilde{L}^\tau(\frac{d}{dt},\nu)\left(E_nW(t,\nu)\right),$$

де $W^{(k)}(t,\nu)=\frac{\partial^kW(t,\nu)}{\partial t^k}$.

Доведення. Використаємо співвідношення (18) у такому ланцюжку рівностей

$$\tilde{L}^\tau(\frac{d}{dt},\nu)\left(E_nW^{(k)}(t,\nu)\right)=\tilde{L}^\tau(\frac{d}{dt},\nu)\left(E_n\frac{d^k}{dt^k}\right)\left(E_nW(t,\nu)\right)=$$

$$=\left(E_n\frac{d^k}{dt^k}\right)\tilde{L}^\tau(\frac{d}{dt},\nu)\left(E_nW(t,\nu)\right)=$$

$$=\left(E_n\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\right)\left(L^\tau(\frac{d}{dt},\nu)+A^\tau(\nu)\right)\tilde{L}^\tau(\frac{d}{dt},\nu)\left(E_nW(t,\nu)\right)=$$

$$=\left(E_n\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\right)\left[L^\tau(\frac{d}{dt},\nu)\tilde{L}^\tau(\frac{d}{dt},\nu)+A^\tau(\nu)\tilde{L}^\tau(\frac{d}{dt},\nu)\right]\left(E_nW(t,\nu)\right)=$$

$$=\left(E_n\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\right)A^\tau(\nu)\tilde{L}^\tau(\frac{d}{dt},\nu)\left(E_nW(t,\nu)\right)=$$

$$=A^\tau(\nu)\left(E_n\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\right)\tilde{L}^\tau(\frac{d}{dt},\nu)\left(E_nW(t,\nu)\right)=$$

$$=\left(A^\tau(\nu)\right)^2\left(E_n\frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}}\right)\tilde{L}^\tau(\frac{d}{dt},\nu)\left(E_nW(t,\nu)\right)=\underbrace{\quad\ldots\ldots\quad}_{k-2\text{ рази}}=$$

$$=\left(A^\tau(\nu)\right)^k\tilde{L}^\tau(\frac{d}{dt},\nu)\left(E_nW(t,\nu)\right).$$

Лема доведена.

Теорема 2. Формальний розв'язок задачі Коші (15), (17) можна одержати в результаті такого граничного переходу:

$$U(t,x)=\lim_{h\to0}\Big\{U(t,x,h,\Phi_1,\Phi_1,\Phi_1,\ldots,\Phi_1)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{h^k}{k!}U(t,x,h,0,1^k\Phi_{\ k+1},2^k\Phi_{\ k+1},\ldots,(m-1)^k\Phi_{\ k+1})\Big\}. \tag{19}$$

Доведення. Оскільки вектор-функція $U(t,x,h,\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_m)$ є неперервною (цілою) за вектор-параметром ν (до покладання $\nu=0$), тоді $\lim\limits_{h\to 0} U(t,x,h,\Phi_1,\Phi_1,\Phi_1,\ldots,\Phi_1)$ у рівності (19) зводиться до обчислення границі

$$J_0=\lim_{h\to 0}\sum_{j=1}^{m} l_j(t,h)\tilde{L}^\tau(\frac{d}{dt},\nu)\big(E_n W(t-(j-1)h,\nu)\big).$$

Функція $W(t-(j-1)h,\nu)$ як розв'язок звичайного диференціального рівняння з постійними (відносно t) коефіцієнтами є аналітичною за t функцією. Тому запишемо розвинення функції $W(t-(j-1)h,\nu)$ за змінною t в ряд Тейлора в околі точки (t,ν) і використаємо його, а також лему для обчислення границі J_0:

$$J_0=\lim_{h\to 0}\sum_{j=1}^{m} l_j(t,h)\tilde{L}^\tau(\frac{d}{dt},\nu)\left(E_n\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{((j-1)h)^k}{k!}W^{(k)}(t,\nu)\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\sum_{j=1}^{m} l_j(t,h)\tilde{L}^\tau(\frac{d}{dt},\nu)\left(E_n\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\frac{((j-1)h)^k}{k!}W^{(k)}(t,\nu)+o(h^{m-1})\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\frac{(A^\tau(\nu))^k}{k!}\sum_{j=1}^{m} l_j(t,h)\Big[((j-1)h)^k+o(h^{m-1})\Big]\tilde{L}^\tau(\frac{d}{dt},\nu)\big(E_n W(t,\nu)\big)=$$

$$=p_1(t,A^\tau(\nu))\tilde{L}^\tau(\frac{d}{dt},\nu)\big(E_n W(t,\nu)\big),$$

де $p_1(t,A^\tau(\nu))$ – матричний поліном, який одержується із полінома (8) заміною у ньому $a(\nu)$ на $A^\tau(\nu)$, $0^0\overset{df}{=}1$.

Цілком аналогічно для $k=\overline{1,m-1}$ границя

$$\lim_{h\to 0}\frac{h^k}{k!}U(t,x,h,0,1^k\Phi_{k+1},2^k\Phi_{k+1},\ldots,(m-1)^k\Phi_{k+1})$$

зводиться до такого обчислення

$$J_k=\lim_{h\to 0}\sum_{j=1}^{m}\frac{((j-1)h)^k}{k!}l_j(t,h)\tilde{L}^\tau(\frac{d}{dt},\nu)\big(E_n W(t-(j-1)h,\nu)\big).$$

Використання рівностей (6),(6′) і леми дозволяє отримати

$$J_k=p_{k+1}(t,A^\tau(\nu))\tilde{L}^\tau(\frac{d}{dt},\nu)\big(E_n W(t,\nu)\big),$$

де $p_{k+1}(t,A^\tau(\nu))$ – матричний поліном, що одержується із (8′) заміною у ньому $a(\nu)$ на матрицю $A^\tau(\nu)$.

В результаті граничного переходу від розв'язку задачі (15),(16) одержимо вектор-функцію вигляду

$$U(t,x)=\left[\sum_{k=1}^{m}\Phi_k^\tau(\frac{\partial}{\partial\nu})\left\{p_k(t,A^\tau(\nu))\exp[\nu\cdot x]\tilde{L}^\tau(\frac{d}{dt},\nu)\big(E_n W(t,\nu)\big)\right\}\Bigg|_{\nu=0}\right]^\tau. \qquad (20)$$

Тепер, подібно, як у [5], неважко переконатися, що формула (20) справді визначає формальний розв'язок задачі Коші (15),(17).

Теорема доведена.

Виділимо тепер класи однозначної розв'язності задачі Коші (15),(17).

Теорема 3. Нехай у матричному рівнянні (15) $A(\frac{\partial}{\partial x})$ – оператор-матриця порядку n, елементами якої є довільні диференціальні поліноми зі сталими коефіцієнтами, функція $W(t,\nu)$ як ціла відносно ν функція має порядок $\theta > 1$ за сукупністю змінних $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$. Якщо вектор-функції $\Phi_k(x)$, $k = \overline{1,m}$, належать до класу $A_{\theta'}$, тобто до класу вектор-функцій, компоненти яких є аналітичними на $\mathbf{R}^s$ функціями і допускають однозначне аналітичне продовження в $\mathbf{C}^s$ до цілих функцій, порядку нижчого ніж θ' за сукупністю змінних, де $\theta'(\theta - 1) = \theta$, тоді у класі вектор-функцій, компоненти яких для фіксованого $t > 0$ належать до $A_{\theta'}$, існує єдиний розв'язок задачі Коші (15),(17). Цей розв'язок може бути знайдений за формулою (20).

Доведення теореми щодо існування розв'язку (20) у виділеному класі вектор-функцій повністю аналогічне до доведення теореми, поданого в [5].

Для доведення єдиності розв'язку задачі Коші треба звести задачу (15), (17) відповідною заміною змінних до задачі Коші для системи mn рівнянь із частинними похідними першого порядку за часом. Одержана (зведена) система рівнянь матиме, як і вихідна система рівнянь, зведений порядок, який дорівнює θ. Використовуючи одержані у [6] результати щодо класів єдиності розв'язку задачі Коші для зведеної системи рівнянь і повертаючись до вихідної задачі Коші, одержимо клас єдиності розв'язку задачі, який є ширшим за виділений у теоремі 3.

Теорема доведена.

Зауваження 1. Для простоти викладу у полілінійному рівнянні (1) і полілінійній системі рівнянь (15) розглянуто випадок, коли $a(\frac{\partial}{\partial x})$ і елементи оператор-матриці $A(\frac{\partial}{\partial x})$ є довільними диференціальними поліномами. Можна розглянути також випадки, коли замість диференціальних поліномів є диференціальні вирази безмежного порядку з цілими символами. Це відповідає випадку $\theta = \infty$.

Зауваження 2. У теоремі 3 розглянуто випадок, коли $1 < \theta < \infty$. Подібно, як у [5], можна розглянути й інші випадки – $\theta = \infty$, $\theta = 1$, $0 < \theta < 1$.

Зауваження 3. Розглянуті у роботі граничні переходи легко поширюються [2] і на той випадок, коли у багатоточкових умовах (2) і (16) вузли не є рівновіддаленими.

1. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1984. 2. Нитребич З.М. Про граничний перехід від розв'язку багатоточкової задачі до розв'язку задачі Коші // Вісн. Львів. нац. ун-ту. Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 125–131. 3. Каленюк П.И., Баранецкий Я.Е., Нитребич З.Н. Обобщенный метод разделения переменных. К., 1993. 4. Ланкастер П. Теория матриц. М. 1978. 5. Каленюк П.І., Нитребич З.М., Плешівський Я.М. Багатоточкова задача для однорідної полілінійної системи рівнянь із частинними похідними // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". Прикладна математика. 1999. № 364. С.223–227. 6. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., 1958.