УДК 517.9

Клевчук І.І.
Чернівецький державний університет ім. Ю. Федьковича

РОЗЩЕПЛЕННЯ ЛІНІЙНИХ ІМПУЛЬСНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

A system of linear impulsive singularly perturbed functional differential equations is considered. The existence of integral manifolds is proved. It is shown that the initial system can be splitted into two independent systems by linear substitution.

Розглядається система лінійних імпульсних сингулярно збурених диференціально- функціональних рівнянь. Доведено існування інтегральних многовидів. Показано, що вихідну систему за допомогою лінійної заміни можна розщепити на дві незалежні підсистеми.

Розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + F(t, y_t), \quad \varepsilon \frac{dy}{dt} = D(t)x(t) + G(t, y_t), \quad t \neq t_i,$$
$$\Delta x|_{t=t_i} = B_i x + \varepsilon H_i(y_{t_i}), \quad \Delta y|_{t=t_i} = C_i x + N_i(y_{t_i}), \tag{1}$$

де $\varepsilon -$ малий додатний параметр; $x - m$ – вимірний вектор, $y - n$ – вимірний вектор; $y_t -$елемент простору $PC = PC[-\varepsilon\tau, 0]$, заданий функцією $y_t(\theta) = y(t+\theta)$, $-\varepsilon\tau \le \theta \le 0$; $PC[-\varepsilon\tau, 0] -$ простір функцій $\varphi(t)$, неперервних на відрізку $[-\varepsilon\tau, 0]$ за винятком скінченного числа точок розриву першого роду, в яких $\varphi(t)$ неперервна зліва; $F(t,\varphi)$, $G(t,\varphi)$, $H_i(\varphi)$, $N_i(\varphi) -$лінійні відносно φ функціонали; матриці $A(t), D(t)$ і функціонали $F(t,\varphi), G(t,\varphi)$ неперервні відносно t; матриці $E + B_i$ невироджені; через $t_i, i \in Z,$ позначено моменти імпульсної дії.

Припустимо, що виконуються умови:

1) існує таке додатне число δ, при якому $0 < \delta < t_{i+1} - t_i$, $i \in Z$;

2) норми матриць $A(t), B(t), C_i, (E + B_i)^{-1}$ та функціоналів $F(t,\varphi)$, $G(t,\varphi)$, $H_i(\varphi)$, $N_i(\varphi)$ рівномірно обмежені при $t \in R, i \in Z$ деякою додатною сталою $M > 1$;

3) для оператора $T(t,s)$ зсуву за розв’язками системи

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = G(t, y_t), \quad t \neq t_i, \quad \Delta y|_{t=t_i} = N_i(y_{t_i})$$

виконуються нерівності

$$|T(t,s)\varphi| \le K|\varphi| \exp\left[-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)\right], \quad |T(t,s)X_0| \le K \exp\left[-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)\right],$$

де $K > 0, t \ge s, \alpha > 0, \varphi \in PC.$

Система (1) еквівалентна системі

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + F(t, y_t), \quad t \ne t_i, \quad \Delta x|_{t=t_i} = B_i x + \varepsilon H_i(y_{t_i}),$$

$$y_t = T(t,\sigma)y_\sigma + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\sigma^t T(t,s)X_0 D(s)x(s)ds + \sum_{\sigma<t_i<t} T(t,t_i)X_0 C_i x(t_i), \tag{2}$$

де $X_0(\theta) = 0, -\varepsilon\tau \le \theta < 0, X_0(0) = E.$

Теорема 1. Нехай відносно системи (1) виконуються умови 1—3. Тоді можна вказати таке $\varepsilon_0 > 0,$ що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ існує інтегральний многовид системи (2), який можна зобразити у вигляді $y_t = P(t,\varepsilon)x,$ де $P(t,\varepsilon): R^m \to PC -$ рівномірно обмежений при $t \in R$ оператор.

Доведення. Розглянемо систему рівнянь

$$x(t) = L(t,\sigma) - \int\limits_t^\sigma L(t,s)F(s,y_s)ds - \varepsilon \sum_{t<t_i<\sigma} L(t,t_i)H_i(y_{t_i}),$$

$$y_t = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^t T(t,s)X_0 D(s)x(s)ds + \sum_{-\infty<t_i<t} T(t,t_i)X_0 C_i x(t_i), \tag{3}$$

де $L(t,s) -$ фундаментальна матриця системи $dx/dt = A(t)x, t \ne t_i, \ \Delta x|_{t=t_i} = B_i x.$

Існування розв’язку системи (3) доведемо за допомогою методу послідовних наближень

$$y_t^{(0)} = 0, x_n(t) = L(t,\sigma) - \int\limits_t^\sigma L(t,s)F(s, y_s^{(n)})ds - \varepsilon \sum_{t<t_i<\sigma} L(t,t_i)H_i\left(y_{t_i}^{(n)}\right),$$

$$y_t^{(n+1)} = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^t T(t,s)X_0 D(s)x_n(s)ds + \sum_{-\infty<t_i<t} T(t,t_i)X_0 C_i x_n(t_i), n = 0,1,\dots$$

Справджується нерівність

$$|L(t,s)| \le \exp[\gamma(s-t)], \quad \gamma = M + \frac{\ln M}{\delta}, \quad t \le s.$$

Доведемо, що правильна оцінка

$$|y_t^{(q)} - y_t^{(q-1)}| \le \frac{K_1}{2^q}\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon\gamma}{2\varepsilon}(\sigma - t)\right], \tag{4}$$

де

$$q = 1,2,\ldots,\ K_1 = \frac{4KM}{\alpha} + \frac{2KM}{1-\exp(-\gamma\delta)},$$

$$\varepsilon < \min\left(\frac{\alpha}{2\gamma}, \frac{1}{2KM^2\left(\frac{4}{\alpha} + \frac{1}{1-\exp(-\gamma\delta/2)}\right)}\right).$$

При $q = 1$ нерівність (4) правильна.

Нехай нерівність (4) правильна при $q = n.$ Тоді одержимо

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \le \left(\frac{4\varepsilon MK_1}{\alpha 2^n} + \frac{\varepsilon MK_1}{2^n(1-\exp(-\gamma\delta/2))}\right)\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon\gamma}{2\varepsilon}(\sigma - t)\right].$$

Звідси знаходимо

$$|y_t^{(n+1)} - y_t^{(n)}| \le \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t} K\exp\left[\frac{\alpha}{\varepsilon}(s-t)\right]M|x_n(s) - x_{n-1}(s)|ds +$$

$$+ \sum_{-\infty<t_i<t} K\exp\left[\frac{\alpha}{\varepsilon}(t_i - t)\right]M|x_n(t_i) - x_{n-1}(t_i)| \le \frac{\varepsilon KK_1M^2}{2^n}\left(\frac{4}{\alpha} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{1-\exp(-\gamma\delta/2)}\right)^2 \exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon\gamma}{2\varepsilon}(\sigma - t)\right] \le \frac{K_1}{2^{n+1}}\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon\gamma}{2\varepsilon}(\sigma - t)\right].$$

Із правильності нерівності (4) при $q = n$ випливає її виконання при $q = n+1$. Отже, нерівність справджується при всіх натуральних q. Із (4) випливає, що послідовність $\left(x_n(t), y_t^{(n)}\right)$ збігається до деякої функції $\left(x(t), y_t\right)$, яка є розв'язком системи (3).

Вважаючи в (3) $t = \sigma$, одержуємо зображення інтегрального многовиду

$$P(\sigma,\varepsilon) = y_\sigma = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\sigma} T(\sigma,s)X_0D(s)x(s)ds + \sum_{-\infty<t_i<\sigma} T(\sigma,t_i)X_0C_ix(t_i).$$

Якщо просумувати нерівності (4) по всіх q і вважати $t = \sigma$, то одержимо рівномірну оцінку $|P(\sigma,\varepsilon)| \le K_1$. Теорема 1 доведена.

Теорема 2. Нехай відносно системи (1) виконуються умови 1--3. Тоді можна вказати таке $\varepsilon_1 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ існує інтегральний многовид системи (2), який можна зобразити у вигляді $x = Q(t, y_t, \varepsilon)$, де $Q(t,\varphi,\varepsilon) -$ лінійний відносно φ функціонал. Справджується оцінка $|Q(t,\varphi,\varepsilon)| \le \varepsilon K_1|\varphi|$, $K_1 > 0$.

Доведення. Розглянемо систему рівнянь

$$x(t) = -\int_t^{\infty} L(t,s)F(s,y_s)ds - \varepsilon \sum_{t<t_i<\infty} L(t,t_i)H_i\left(y_{t_i}\right),$$

$$y_t = T(t,\sigma)\varphi + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\sigma}^{t} T(t,s)X_0 D(s)x(s)ds + \sum_{\sigma<t_i<t} T(t,t_i)X_0 C_i x(t_i). \qquad (5)$$

Існування розв'язку системи (5) доведемо за допомогою методу послідовних наближень

$$x_0(t) = 0,\ x_{n+1}(t) = -\int_t^{\infty} L(t,s)F(s,y_s^{(n)})ds - \varepsilon \sum_{t<t_i<\infty} L(t,t_i)H_i\left(y_{t_i}^{(n)}\right),$$

$$y_t^{(n)} = T(t,\sigma)\varphi + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\sigma}^{t} T(t,s)X_0 D(s)x_n(s)ds + \sum_{\sigma<t_i<t} T(t,t_i)X_0 C_i x_n(t_i).$$

Доведемо, що справджується оцінка

$$|x_q(t) - x_{q-1}(t)| \le \frac{\varepsilon K_1 |\varphi|}{2^q} \exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon\gamma}{2\varepsilon}(\sigma - t)\right], \qquad (6)$$

де

$$q = 1,2,\ldots,\ K_1 = \frac{4KM}{\alpha} + \frac{2KM}{1-\exp(-\gamma\delta)},$$

$$\varepsilon < \min\left(\frac{\alpha}{2\gamma}, \frac{1}{2KM^2\left(\frac{4}{\alpha} + \frac{1}{1-\exp\left(-\gamma\delta/2\right)}\right)}\right).$$

При $q = 1$ нерівність (6) правильна.

Нехай нерівність (6) правильна при $q = n$. Тоді одержимо

$$|y_t^{(n)} - y_t^{(n-1)}| \le \left(\frac{4\varepsilon KMK_1|\varphi|}{\alpha 2^n} + \frac{\varepsilon KMK_1|\varphi|}{2^n\left(1-\exp(-\gamma\delta/2)\right)}\right)\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon\gamma}{2\varepsilon}(\sigma - t)\right].$$

Звідси знаходимо

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \le \int_t^{\infty} \exp\left[\gamma\left(s-t\right)\right]M|y_s^{(n)} - y_s^{(n-1)}|ds +$$

$$+\varepsilon \sum_{t<t_i<\infty} \exp\left[\gamma\left(t_i - t\right)\right]M|y_{t_i}^{(n)} - y_{t_i}^{(n-1)}| \le \frac{\varepsilon^2 KM^2 K_1|\varphi|}{2^n} \times$$

$$\times\left(\frac{4}{\alpha}+\frac{1}{1-\exp\left(-\gamma\delta/2\right)}\right)^2\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon\gamma}{2\varepsilon}(\sigma-t)\right]\leq\frac{\varepsilon K_1|\varphi|}{2^{n+1}}\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon\gamma}{2\varepsilon}(\sigma-t)\right].$$

Нерівність (6) правильна при $q=n+1$, отже, вона правильна при всіх натуральних q. Із (6) випливає, що послідовність $\left(x_n(t),y_t^{(n)}\right)$ рівномірно збігається до функції $\left(x(t),y_t\right)$, яка є розв'язком системи (5).

Вважаючи в (5) $t=\sigma$, одержуємо зображення інтегрального многовиду

$$Q(\sigma,\varphi,\varepsilon)=x(\sigma)=-\int_{\sigma}^{\infty}L(\sigma,s)F(s,y_s)ds-\varepsilon\sum_{\sigma<t_i<\infty}L(\sigma,t_i)H_i\left(y_{t_i}\right).$$

Додаючи нерівності (6) і вважаючи $t=\sigma$, знаходимо $|Q(\sigma,\varphi,\varepsilon)|\leq\varepsilon K_1|\varphi|$. Теорема 2 доведена.

Розглянемо систему

$$\frac{dv}{dt}=A(t)v+F(t,P(t,\varepsilon)v),\ t\neq t_i,\ \Delta v|_{t=t_i}=B_iv+\varepsilon H_i(P(t_i,\varepsilon)v),$$

$$w_t=T(t,\sigma)w_\sigma+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\sigma}^{t}T(t,s)X_0D(s)Q(s,w_s,\varepsilon)ds+ \qquad (7)$$

$$+\sum_{\sigma<t_i<t}T(t,t_i)X_0C_iQ(t_i,w_{t_i},\varepsilon).$$

Функції $Q(t,w_t,\varepsilon)$, $P(t,\varepsilon)v$ задовольняють рівняння

$$\frac{dQ(t,w_t,\varepsilon)v}{dt}=A(t)Q(t,w_t,\varepsilon)v+F(t,w_t),\ t\neq t_i,\ \Delta Q(t,w_t,\varepsilon)|_{t=t_i}=$$

$$=B_iQ(t_i,w_{t_i},\varepsilon)+\varepsilon H_i\left(w_{t_i}\right),\quad P(t,\varepsilon)v(t)=T(t,\sigma)P(\sigma,\varepsilon)v(\sigma)+ \qquad (8)$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\sigma}^{t}T(t,s)X_0D(s)v(s)ds+\sum_{\sigma<t_i<t}T\left(t,t_i\right)X_0C_iv\left(t_i\right).$$

В результаті заміни

$$x=v+Q(t,w_t,\varepsilon),\quad y_t=w_t+P(t,\varepsilon)v \qquad (9)$$

і додавання рівностей (7), (8) одержимо систему (2).

Отже, правильне таке твердження.

Теорема 3. За допомогою заміни (9) система (7) зводиться до вигляду (2).

При досить малому ε систему (9) можна розв'язати відносно v та w_t і визначити заміну, яка розщеплює систему (2) на дві незалежні підсистеми (7).

Оцінимо розв'язок останнього рівняння системи (7), використовуючи метод послідовних наближень

$$w_t^{(0)} = 0,\ w_t^{(n+1)} = T(t,\sigma)\varphi + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\sigma}^{t} T(t,s)\,X_0 D(s) Q\left(s, w_s^{(n)}, \varepsilon\right) ds +$$
$$+ \sum_{\sigma < t_i < t} T(t,t_i)\,X_0 C_i Q\left(t_i, w_{t_i}^{(n)}, \varepsilon\right),$$

де $\varphi = w_\sigma$, $n = 0,1,2,\ldots$ Індукцією можна довести, що правильна нерівність

$$|w_t^{(n+1)} - w_t^{(n)}| \le \frac{K|\varphi|}{2^n} \exp\left[\left(\frac{\alpha}{\varepsilon} - \chi\right)(\sigma - t)\right], \tag{10}$$

де

$$t \ge \sigma,\ \chi = 4MKK_1,\ \varepsilon < \min\left(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \frac{1 - \exp(-\chi\delta)}{4MKK_1}\right).$$

Якщо просумувати нерівності (10) по n, то одержимо оцінку

$$|w(t)| \le 2K|\varphi| \exp\left[\left(\frac{\alpha}{\varepsilon} - \chi\right)(\sigma - t)\right].$$

Тому стійкість нульового розв’язку системи (1) при $\varepsilon < \alpha/\chi$ рівносильна стійкості нульового розв’язку імпульсної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dv}{dt} = A(t)v + F(t, P(t,\varepsilon)v),\ t \ne t_i,\ \Delta v|_{t=t_i} = B_i v + \varepsilon H_i(P(t_i,\varepsilon)v).$$

Зауваження 1. Умова 3 накладає обмеження на корені характеристичного рівняння, що відповідає системі $\varepsilon \dfrac{dy}{dt} = G(t, y_t)$.

Зауваження 2. В цій праці розглядається узагальнення результатів статті [1] та монографії [2] на випадок лінійних імпульсних сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь.

1. Фодчук И.И., Клевчук И.И. Расщепление линейных дифференциально-функциональных уравнений // Докл. АН УССР. Сер.А. 1986. № 8. С. 23–26. 2. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. К., 1987.