УДК 518.12

Коваль Г.М., Цегелик Г.Г.
Львівський національний університет ім. І. Франка

МЕТОД ПАРАМЕТРІВ ВИДІЛЕННЯ «МАКСИМАЛЬНИХ» ОБЛАСТЕЙ, ЯКІ НЕ МІСТЯТЬ НУЛІВ АЛГЕБРАЇЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ ВІД ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

The parameters method for definition of the «maximum» domains which are free of real zeros of algebraic polinomials of two real variables has been considered.

Розглядається використання методу параметрів для виділення «максимальних» областей, які не містять дійсних нулів алгебраїчних многочленів від двох дійсних змінних.

В [1] запропонований універсальний метод локалізації за модулем нулів алгебраїчних многочленів, степеневих рядів і рядів Лорана, який ввійшов в літературу як метод параметрів. В [2, 3] цей метод використаний для локалізації дійсних коренів алгебраїчних многочленів, розв'язання оберненої задачі до задачі локалізації нулів многочленів, а також для побудови чисельного методу відшукання найменшого додатного кореня алгебраїчного рівняння. В цій роботі розглядається застосування методу параметрів для виділення «максимальних» областей, які не містять дійсних коренів алгебраїчних многочленів від двох дійсних змінних.

Розглянемо алгебраїчний многочлен з дійсними коефіцієнтами

$$f(x,y)=\sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{m}A_{\mu\nu}x^{\mu}y^{\nu}\,. \tag{1}$$

Нехай $A_{kl}>0$ $(0<k<n,\ 0<l<m)$, $E_1=\left\{(\mu,\nu)\,\middle|\,A_{\mu\nu}>0\right\}$, $E_2=\left\{(\mu,\nu)\,\middle|\,A_{\mu\nu}<0\right\}$. Тоді, прирівнявши многочлен $f(x,y)$ до нуля, одержимо

$$a_{kl}x^k y^l+\sum_{\substack{(\mu,\nu)\in E_1\\(\mu,\nu)\neq(k,l)}}a_{\mu\nu}x^{\mu}y^{\nu}=\sum_{(\mu,\nu)\in E_2}a_{\mu\nu}x^{\mu}y^{\nu}\,,$$

де $a_{\mu\nu}=A_{\mu\nu}$, $(\mu,\nu)\in E_1$, і $a_{\mu\nu}=-A_{\mu\nu}$, $(\mu,\nu)\in E_2$. Якщо $x>0$, $y>0$, то отримуємо таку нерівність

$$a_{kl}x^k y^l\le\sum_{(\mu,\nu)\in E_2}a_{\mu\nu}x^{\mu}y^{\nu}\,,$$

або

$$a_{kl}\le\sum_{(\mu,\nu)\in E_2}a_{\mu\nu}x^{\mu-k}y^{\nu-l}\,. \tag{2}$$

Введемо позначення:

$$M_1=\left\{\mu<k\,\middle|\,(\mu,l)\in E_2\right\},\qquad M_2=\left\{\mu>k\,\middle|\,(\mu,l)\in E_2\right\},$$

$$M_3 = \left\{ \nu < l \,\middle|\, (k,\nu) \in E_2 \right\}, \qquad M_4 = \left\{ \nu > l \,\middle|\, (k,\nu) \in E_2 \right\},$$

$$N_1 = \left\{ (\mu,\nu) \in E_2 \,\middle|\, \mu < k, \nu < l \right\}, \qquad N_2 = \left\{ (\mu,\nu) \in E_2 \,\middle|\, \mu > k, \nu < l \right\},$$

$$N_3 = \left\{ (\mu,\nu) \in E_2 \,\middle|\, \mu < k, \nu > l \right\}, \qquad N_4 = \left\{ (\mu,\nu) \in E_2 \,\middle|\, \mu > k, \nu > l \right\},$$

$$P_1 = \left\{ \mu \,\middle|\, (\mu,\nu) \in N_1 \cup N_3 \right\}, \qquad P_2 = \left\{ \mu \,\middle|\, (\mu,\nu) \in N_2 \cup N_4 \right\},$$

$$Q_1 = M_1 \cup P_1,\ Q_2 = M_2 \cup P_2,\ S_1 = P_1 \setminus M_1,\ S_2 = P_2 \setminus M_2,$$

$$N = \left\{ (\mu,\nu) \in E_2 \,\middle|\, \nu < l \right\}, \qquad M = \left\{ (\mu,\nu) \in E_2 \,\middle|\, \nu > l \right\}.$$

Нехай $\left\{ \alpha_{\mu\nu} \right\}$, $(\mu,\nu) \in E_2$, і α_{kl} – довільний набір додатних чисел (параметрів), який задовольняє умову

$$\sum_{(\mu,\nu)\in E_2} \alpha_{\mu\nu} = \alpha_{kl}. \tag{3}$$

Якщо $\mu \in S_1 \cup S_2$, то парі індексів (μ, l) поставимо у відповідність довільні додатні числа $b_{\mu l}$ і $\beta_{\mu l}$. Якщо $\mu \in M_1 \cup M_2$ або $\mu = k$, то приймемо $b_{\mu l} = a_{\mu l}$ і $\beta_{\mu l} = \alpha_{\mu l}$.

Покладемо

$$r_1(k,l) = \max_{\mu\in Q_1} \left(\frac{b_{\mu l}\alpha_{kl}}{a_{kl}\beta_{\mu l}} \right)^{\frac{1}{k-\mu}}, \tag{4}$$

$$R_1(k,l) = \min_{\mu\in Q_2} \left(\frac{a_{kl}\beta_{\mu l}}{b_{\mu l}\alpha_{kl}} \right)^{\frac{1}{\mu-k}}, \tag{5}$$

$$r_2(k,l) = \max_{(\mu,\nu)\in N} \left(\frac{a_{\mu\nu}\beta_{\mu l}}{b_{\mu l}\alpha_{\mu\nu}} \right)^{\frac{1}{l-\nu}}, \tag{6}$$

$$R_2(k,l) = \min_{(\mu,\nu)\in M} \left(\frac{b_{\mu l}\alpha_{\mu\nu}}{a_{\mu\nu}\beta_{\mu l}} \right)^{\frac{1}{\nu-l}}. \tag{7}$$

Тоді справедлива теорема.

Теорема. Якщо $A_{kl} \neq 0$, M_1, M_2, N, M – не порожні множини й існує такий набір параметрів $\left\{ \alpha_{\mu\nu} \right\}$, $(\mu,\nu) \in E_2$, α_{kl}, який задовольняє умову (3), і такі числа $b_{\mu l}$, $\beta_{\mu l}$, $\mu \in S_1 \cup S_2$, що $R_1(k,l) > r_1(k,l)$, $R_2(k,l) > r_2(k,l)$, то многочлен (1) не має нулів в області

$$\left\{ r_1(k,l) \le x \le R_1(k,l),\ r_2(k,l) \le y \le R_2(k,l) \right\}. \tag{8}$$

Доведення. Позначимо $r_1(k,l) = r_1$, $R_1(k,l) = R_1$, $r_2(k,l) = r_2$, $R_2(k,l) = R_2$. Тоді із співвідношень (4)–(7) відповідно одержуємо такі нерівності:

$$b_{\mu l} \frac{1}{r_1^{k-\mu}} \le \frac{a_{kl}}{\alpha_{kl}} \beta_{\mu l}, \quad \mu \in Q_1; \tag{9}$$

$$b_{\mu l} R_1^{\mu-k} \le \frac{a_{kl}}{\alpha_{kl}} \beta_{\mu l}, \quad \mu \in Q_2; \tag{10}$$

$$a_{\mu\nu}\frac{1}{r_2^{l-\nu}} \le \frac{b_{\mu l}}{\beta_{\mu l}}\alpha_{\mu\nu}, \quad (\mu,\nu)\in N; \tag{11}$$

$$a_{\mu\nu}R_2^{\nu-l} \le \frac{b_{\mu l}}{\beta_{\mu l}}\alpha_{\mu\nu}, \quad (\mu,\nu)\in M. \tag{12}$$

Оскільки $M_1 \subset Q_1$ і $M_2 \subset Q_2$, то із (9) і (10) відповідно отримуємо

$$\sum_{\mu\in M_1} b_{\mu l}\frac{1}{r_1^{k-\mu}} \le \frac{a_{kl}}{\alpha_{kl}}\sum_{\mu\in M_1}\beta_{\mu l}\ , \tag{13}$$

$$\sum_{\mu\in M_2} b_{\mu l}R_1^{\mu-k} \le \frac{a_{kl}}{\alpha_{kl}}\sum_{\mu\in M_2}\beta_{\mu l}\ , \tag{14}$$

Із (11) і (12) при $\mu = k$ маємо

$$\sum_{\nu\in M_3} a_{k\nu}\frac{1}{r_2^{l-\nu}} \le \frac{a_{kl}}{\alpha_{kl}}\sum_{\nu\in M_3}\alpha_{k\nu}\ , \tag{15}$$

$$\sum_{\nu\in M_4} a_{k\nu}R_2^{\nu-l} \le \frac{a_{kl}}{\alpha_{kl}}\sum_{\nu\in M_4}\alpha_{k\nu}\ . \tag{16}$$

Оскільки $N_1 \subset N$, то із (9) і (11) одержуємо

$$a_{\mu\nu}\frac{1}{r_1^{k-\mu}r_2^{l-\nu}} \le \frac{a_{kl}}{\alpha_{kl}}\alpha_{\mu\nu}, \quad (\mu,\nu)\in N_1;$$

або

$$\sum_{(\mu,\nu)\in N_1} a_{\mu\nu}\frac{1}{r_1^{k-\mu}r_2^{l-\nu}} \le \frac{a_{kl}}{\alpha_{kl}}\sum_{(\mu,\nu)\in N_1}\alpha_{\mu\nu}\ . \tag{17}$$

Аналогічно із (9) і (12)

$$a_{\mu\nu}\frac{1}{r_1^{k-\mu}}R_2^{\nu-l} \le \frac{a_{kl}}{\alpha_{kl}}\alpha_{\mu\nu}, \quad (\mu,\nu)\in N_3,$$

або

$$\sum_{(\mu,\nu)\in N_3} a_{\mu\nu}\frac{1}{r_1^{k-\mu}}R_2^{\nu-l} \le \frac{a_{kl}}{\alpha_{kl}}\sum_{(\mu,\nu)\in N_3}\alpha_{\mu\nu}\ , \tag{18}$$

Із (10) і (11)

$$a_{\mu\nu}R_1^{\mu-k}\frac{1}{r_2^{l-\nu}} \le \frac{a_{kl}}{\alpha_{kl}}\alpha_{\mu\nu}, \quad (\mu,\nu)\in N_2,$$

або

$$\sum_{(\mu,\nu)\in \mathrm{N}_2} a_{\mu\nu}R_1^{\mu-k}\frac{1}{r_2^{l-\nu}} \le \frac{a_{kl}}{\alpha_{kl}}\sum_{(\mu,\nu)\in \mathrm{N}_2}\alpha_{\mu\nu}\ . \tag{19}$$

І, зрештою, із (10 і (12)

$$a_{\mu\nu}R_1^{\mu-k}R_2^{\nu-l} \le \frac{a_{kl}}{\alpha_{kl}}\alpha_{\mu\nu}, \quad (\mu,\nu)\in N_4,$$

або

$$\sum_{(\mu,\nu)\in N_4} a_{\mu\nu}R_1^{\mu-k}R_2^{\nu-l} \le \frac{a_{kl}}{\alpha_{kl}}\sum_{(\mu,\nu)\in N_4}\alpha_{\mu\nu}\ . \tag{20}$$

Додамо нерівності (13)–(20), врахувавши, що $b_{\mu l} = a_{\mu l}$ і $\beta_{\mu l} = \alpha_{\mu l}$ для $\mu = k$ і $\mu \in M_1 \bigcup M_2$. Одержимо

$$\sum_{\mu \in M_1} a_{\mu l} \frac{1}{r_1^{k-\mu}} + \sum_{\mu \in M_2} a_{\mu l} R_1^{\mu - k} + \sum_{\nu \in M_3} a_{k\nu} \frac{1}{r_2^{l-\nu}} +$$

$$+ \sum_{\nu \in M_4} a_{k\nu} R_2^{\nu - l} + \sum_{(\mu,\nu) \in N_1} a_{\mu\nu} \frac{1}{r_1^{k-\mu} r_2^{l-\nu}} + \sum_{(\mu,\nu) \in N_3} a_{\mu\nu} \frac{1}{r_1^{k-\mu}} R_2^{\nu - l} +$$

$$+ \sum_{(\mu,\nu) \in \mathrm{N}_2} a_{\mu\nu} R_1^{\mu - k} \frac{1}{r_2^{l-\nu}} + \sum_{(\mu,\nu) \in N_4} a_{\mu\nu} R_1^{\mu-k} R_2^{\nu - l} \le \frac{a_{kl}}{\alpha_{kl}} \sum_{(\mu,\nu) \in E_2} \alpha_{\mu\nu} = a_{kl} .$$

Оскільки за умовою теореми $R_1 > r_1$, $R_2 > r_2$, то при ρ_1 і ρ_2, де $r_1 \le \rho \le R_1$, $r_2 \le \rho \le R_2$, остання нерівність буде мати вигляд

$$\sum_{(\mu,\nu) \in E_2} a_{\mu\nu} \rho_1^{\mu - k} \rho_2^{\nu - l} < a_{kl} . \tag{21}$$

Покажемо, що $f(x, y)$ не має нулів в області (8). Справді, припустимо протилежне, що в деякій точці $x = x_0$, $y = y_0$ області (8) многочлен $f(x, y)$ набуде значення нуль. Нехай $x_0 = \rho_1$, $y_0 = \rho_2$, причому $r_1 \le \rho_1 \le R_1$, $r_2 \le \rho_2 \le R_2$. Оскільки $f(x_0, y_0) = 0$, то виконується нерівність (2), тобто

$$a_{kl} \le \sum_{(\mu,\nu) \in E_2} a_{\mu\nu} \rho_1^{\mu - k} \rho_2^{\nu - l} ,$$

яка суперечить нерівності (21). Отже, зроблене припущення неправильне, $f(x, y)$ не має нулів в області (8). Теорема доведена.

Зауваження. Якщо $\mu \in S_1 \bigcup S_2$, то ми парі індексів (μ, l) поставили у відповідність довільні додатні числа $b_{\mu l}$ і $\beta_{\mu l}$. Ці числа справді можуть бути довільними, однак вони впливають на величини $r_1(k,l)$, $R_1(k,l)$, $r_2(k,l)$, $R_2(k,l)$. Тому бажано ці числа вибирати так, щоб вони якомога менше впливали на величину області (8).

1. Цегелик Г.Г. Параметрическая локализация по модулям нулей полиномов и рядов Лорана // Изв. вузов. Математика. 1967. № 2. С.90–96. 2. Цегелик Г.Г., Коваль Г.М. Метод параметрів розв'язування прямої та оберненої задач локалізації коренів алгебраїчних многочленів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 1999. Вип.1. С. 243-249. 3. Коваль Г.М., Цегелик Г.Г. Метод параметрів локалізації дійсних коренів алгебраїчних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2000. Вип.2. С.51-58.