УДК 518:512:83

Ковальчук О.Я.
Тернопільський державний педагогічний університет ім. В. Гнатюка

ШВИДКИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ОБЕРТАННЯ ГАНКЕЛЕВИХ λ-МАТРИЦЬ

In this paper, we present an algorithm for the inversion of the Hankel λ–matrix $H_n(\lambda)$ which yields the exact inverse. When all of the matrices $H_0(\lambda)$, $H_1(\lambda)$, ..., $H_n(\lambda)$ are nonsingular, the number of multiplications required to invert $H_n(\lambda)$ is proportional to $(n+1)^2l^2$, rether than to $(n+1)^2l^3$, as in the convertional methods for the inversion of an arbitrary symmetric matrix of order $n+1$.

Подано алгоритм обертання ганкелевої λ-матриці $H_n(\lambda)$ за умов існування оберненої матриці. У випадку, коли всі матриці $H_0(\lambda)$, $H_1(\lambda)$, ..., $H_n(\lambda)$ є неособливими, кількість операцій множення, необхідних для обертання $H_n(\lambda)$, пропорційна $(n+1)^2l^2$, тоді як кількість множень, необхідних для обертання довільної симетричної матриці порядку $n+1$, дорівнює $(n+1)^3$.

В роботі узагальнено результати деяких досліджень, отриманих В.Ф.Тренчем [1]. Ним було розроблено алгоритм для обертання скінченної ганкелевої матриці з дійсними елементами, який вимагає виконання на порядок менше операцій множення, ніж стандартний алгоритм для обертання довільної симетричної матриці. Нижче цей результат узагальнено на випадок ганкелевої λ-матриці порядку $n+1$, елементами якої є поліноми.

Означення. Ганкелевою матрицею порядку $n+1$ називається матриця вигляду

$$H_n = \begin{pmatrix} C_0 & C_1 & \dots & C_n \\ C_1 & C_2 & \dots & C_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n & C_{n+1} & \dots & C_{2n} \end{pmatrix} = \left(C_{i+j}\right)_{i,j=0}^{n}.$$

Такі матриці зустрічаються у функціональному аналізі, теорії імовірностей, багатовимірних перетвореннях Паде та інших прикладних проблемах.

Задача ефективного обертання матриці, тобто відшукання для заданої неособливої матриці A $\left(|A| \neq 0\right)$ оберненої матриці A^{-1} є однією із центральних задач теорії матриць. Важливість її розв’язання хоча б для окремих класів матриць як в теоретичному плані, так і в прикладних задачах (розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь) не викликає сумнівів, тим більше, що проблема в багатьох її аспектах потребує поглибленого дослідження.

Завдяки специфічним властивостям ганкелевих матриць (їх побічна, друга, діагональ і всі паралельні до неї діагоналі складаються з рівних, своїх для кожної діагоналі, елементів) можлива побудова економічних обчислювальних схем обертання ганкелевої матриці. Крім того, ганкелеві матриці тісно пов’язані із ще одним класом матриць – тепліцевими. За допомогою простої перестановки стовпців (рядків) матриці в зворотному порядку ганкелеву матрицю можна перетворити до тепліцевої і, навпаки. Тому алгоритми, розроблені для ганкелевих матриць, можна використовувати і для розв’язування задач з тепліцевими матрицями. Дослідженням властивостей ганкелевих та тепліцевих матриць займались І.С.Іохвідов [2], В.В.Воєводін, Е.Е.Тиртишніков [3].

Будемо розглядати ганкелеву λ-матрицю порядку $n+1$ з поліноміальними елементами степеня l такого вигляду:

$$H_n(\lambda)=\begin{pmatrix} C_0(\lambda) & C_1(\lambda) & \dots & C_n(\lambda) \\ C_1(\lambda) & C_2(\lambda) & \dots & C_{n+1}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n(\lambda) & C_{n+1}(\lambda) & \dots & C_{2n}(\lambda) \end{pmatrix} = \left(C_{i+j}(\lambda)\right)_{i,j=0}^{n}, \tag{1}$$

де

$$C_{i+j}(\lambda)=\sum_{k=0}^{l} a_k^{(i+j)}\lambda^k \ . \tag{2}$$

Нехай значення для λ та коефіцієнти многочленів беруться з деякого поля F^{m+n} так, що елементи матриці $H_n(\lambda)$ обчислюються для деякого часткового значення λ, наприклад, $\lambda=\lambda_0\in F^{m+n}$.

Нехай $n\geq 1$ і $H_{n-1}(\lambda)$, $H_n(\lambda)$, $H_{n+1}(\lambda)$ – неособливі матриці.

Визначимо $H_n^{-1}(\lambda)$ як

$$H_n^{-1}(\lambda)=B_n(\lambda)=\left(b_{rsn}\right)_{r,s=0}^{n} \quad ,$$

де

$$\left(b_{rsn}\right)_{r,s=0}^{n}=\sum_{p=0}^{l} b_p^{(rsn)}\lambda^p \ .$$

$B_n(\lambda)$ є симетричною, тому можемо записати:

$$\sum_{j=0}^{n} C_{r+j}(\lambda) b_{jsn}(\lambda)=\delta_{rs}\ , \qquad 0\leq r,s\leq n\,. \tag{3}$$

Позначимо

$$U_{sn}(\lambda)=-\sum_{j=0}^{n} C_{n+j+1}(\lambda) b_{jsn}(\lambda), \qquad 0\leq s\leq n\,. \tag{4}$$

Для зручності покладемо

$$U_{n+1,n}(\lambda)=1\,,\quad U_{n+2,n}(\lambda)=U_{-1,n}(\lambda)=0 \tag{5}$$

і

$$b_{-1,sn}(\lambda)=b_{n+1,sn}(\lambda)=0\,, \qquad 0\leq s\leq n+1\,, \tag{6}$$

для будь-якого n.

З (3) і (4) отримаємо:

$$\sum_{j=0}^{n+1} C_{r+j}(\lambda) b_{jsn}(\lambda)=\delta_{rs}-\delta_{r,n+1}U_{sr}(\lambda), \qquad 0\leq r\leq n+1\,,\ 0\leq s\leq n\,.$$

Нехай $0 \le s \le n$. Невідомі $b_{rsn}(\lambda)$, $0 \le r \le n+1$ визначимо з рівності:

$$b_{rsn}(\lambda) = b_{rs,n+1}(\lambda) - b_{r,n+1,n+1} U_{sn}(\lambda), \quad 0 \le r \le n+1,\ 0 \le s \le n. \tag{7}$$

Для *r=n+1* отримаємо:

$$b_{n+1,s,n+1}(\lambda) = b_{n+1,n+1,,n+1}(\lambda) U_{sn}(\lambda), \qquad 0 \le s \le n+1. \tag{8}$$

Помножимо обидві частини рівності (8) на $C_{s+n+1}(\lambda)$ і просумуємо по *s* від 0 до *n+1*:

$$b_{n+1,n+1,,n+1}(\lambda) = \varphi_{n+1}^{-1}(\lambda), \tag{9}$$

де

$$\varphi_{n+1}(\lambda) = \sum_{s=0}^{n+1} C_{n+s+1}(\lambda) U_{sn}(\lambda) \tag{10}$$

$$\gamma_{n+1}(\lambda) = \sum_{j=0}^{n+1} C_{n+j+2}(\lambda) U_{jn}(\lambda). \tag{11}$$

Використовуючи (8) і (9), з (7) отримаємо:

$$b_{rs,n+1}(\lambda) = b_{rsn}(\lambda) + \frac{U_{rn}(\lambda) U_{sn}(\lambda)}{\varphi_{n+1}(\lambda)}, \quad 0 \le r, s \le n+1. \tag{12}$$

Це зручний запис для обчислення елементів $B_{n+1}(\lambda)$ за відомими елементами матриці $B_n(\lambda)$.

Провівши деякі заміни та маніпуляції з індексами [1], можемо отримати економічний алгоритм для обертання ганкелевої матриці порядку *n+1*.

Будемо шукати обернену до ганкелевої матриці $H_{m+1}(\lambda)$ за умови, що $k \le m$ і $H_{k-1}(\lambda)$, $H_k(\lambda)$, $H_{m+1}(\lambda)$ – неособливі матриці. Знайдемо $U_{0,k-1}(\lambda), U_{1,k-1}(\lambda)$, ..., $U_{k-1,k-1}(\lambda)$ і $U_{0,k}(\lambda), U_{1,k}(\lambda)$, ... , $U_{k,k}(\lambda)$, розв'язавши систему:

$$\sum_{s=0}^{n} C_{r+j}(\lambda) U_{jn}(\lambda) = -C_{n+r+1}(\lambda), \quad 0 \le r \le n$$

для *n=k–1* і *n=k.* $\varphi_k(\lambda)$ і $\gamma_k(\lambda)$ обчислимо за формулами (10) і (11) при *n=k–1*.

Для *k ≤ n ≤ m–1* запишемо:

$$\begin{gathered} \varphi_{n+1}(\lambda) = \sum_{s=0}^{n+1} C_{n+j+1}(\lambda) U_{jn}(\lambda) \\ \gamma_{n+1}(\lambda) = \sum_{j=0}^{n+1} C_{n+j+2}(\lambda) U_{jn}(\lambda) \end{gathered} \tag{13}$$

$$U_{s,n+1}(\lambda) = \left(\frac{\gamma_n(\lambda)}{\varphi_n(\lambda)} - \frac{\gamma_{n+1}(\lambda)}{\varphi_{n+1}(\lambda)} \right) U_{sn}(\lambda) + U_{s-1,n}(\lambda) - \frac{\varphi_n(\lambda)}{\varphi_{n+1}(\lambda)} U_{s,n-1}(\lambda), \tag{14}$$

$$0 \le s \le n+1,$$

де

$$U_{-1,n}(\lambda) = U_{n+1,n-1}(\lambda) = 0, \quad U_{n+1,n}(\lambda) = 1,$$

$$b_{rsm}(\lambda) = b_{r-1,s+1,m}(\lambda) + \frac{U_{r,m-1}(\lambda) U_{s+1,m}(\lambda) - U_{r,m}(\lambda) U_{s+1,m-1}(\lambda)}{\varphi_m(\lambda)}, \tag{15}$$

де

$$b_{-1,s+1,m}(\lambda)=b_{r-1,m+1,m}(\lambda)=0.$$

Далі обчислимо $\varphi_{m+1}(\lambda)$ і $H_{m+1}^{-1}(\lambda)$ за формулами:

$$\varphi_{m+1}(\lambda) = \sum_{s=0}^{m+1} C_{m+j+1}(\lambda) U_{jm}(\lambda), \tag{16}$$

$$b_{rs,m+1}(\lambda)=b_{rsm}(\lambda)+\frac{U_{rm}(\lambda)U_{sm}(\lambda)}{\varphi_{m+1}(\lambda)}, \qquad 0 \le r \le s \le m+1,$$

(17)

$$b_{rs,m}(\ )\quad b_{sr,m}(\ ), \qquad 0 \le s \le r \le m+1,$$

Якщо всі матриці $H_0(\lambda)$, $H_1(\lambda),\dots,H_{m+1}(\lambda)$ – неособливі, покладено для *k=1* такі початкові умови:

$$U_{00}(\lambda)=\frac{C_1(\lambda)}{C_2(\lambda)},$$

$$U_{01}(\lambda)=\frac{C_1(\lambda)C_3(\lambda)-C_2^2(\lambda)}{C_0(\lambda)C_2(\lambda)-C_1^2(\lambda)},$$

$$U_{11}(\lambda)=\frac{C_1(\lambda)C_2(\lambda)-C_0(\lambda)C_3(\lambda)}{C_0(\lambda)C_2(\lambda)-C_1^2(\lambda)}.$$

Якщо обчислення проводити безпосередньо за формулами (16), (17), то може виникнути так зване явище "розбурхання даних" і порядок проміжних результатів буде зростати із швидкістю $2^{2^{m+1}}$, тому проведемо деякі додаткові дослідження.

Будемо шукати розв’язок $b_{rs,m+1}(\lambda)$ у вигляді співвідношення двох поліномів з невідомими коефіцієнтами:

$$\frac{b_{rs.m+1}(\lambda)}{c_{rsm+1}(\lambda)}=\frac{b_{rs.m}(\lambda)}{c_{rsm}(\lambda)}=\frac{U_{rm}(\lambda)U_{sm}(\lambda)}{c_{rsm}(\lambda)\varphi_{m+1}(\lambda)}. \tag{18}$$

Твердження. Якщо під час реалізації алгоритму (17) всі матриці $H_0(\lambda)$, $H_1(\lambda)$, ..., $H_m(\lambda)$ є неособливими, то поліноми $c_{rsm}(\lambda)$ є дільниками многочлена $b_{rsm}(\lambda)+\dfrac{U_{rm}(\lambda)U_{sm}(\lambda)}{\varphi_{m+1}(\lambda)}$.

Доведення. Якщо шукати обернену для матриці $H_{m+1}(\lambda)$ за алгоритмом (17), то $b_{rs,m+1}(\lambda)$ і $c_{rs,m+1}(\lambda)$ будуть поліномами порядку *(m+1)l*. По індукції можна припустити, що $b_{rs,m}(\lambda)$, $c_{rs,m}(\lambda)$ мають порядок *ml*. Тоді, оскільки $b_{rs,m+1}(\lambda)$ має порядок *(m+1)l*, то многочлен $b_{rsm}(\lambda)+\dfrac{U_{rm}(\lambda)U_{sm}(\lambda)}{\varphi_{m+1}(\lambda)}$ націло ділиться на $c_{rsm}(\lambda)$, що й треба було довести.

Із врахуванням цього факту вноситься суттєва корекція в схему обчислень за алгоритмом (17). На кожному кроці відразу після обчислення $b_{rs,m}(\lambda)$ поліноми діляться на $c_{rsm}(\lambda)$.

1. Trench W.F. An algorithm for inversion of finite hankel matrices // Soc. Indust. Appl. Math. Vol. 13, No. 4 1965. 2. Иохвидов С. Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы. М., 1974. 3. Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М., 1987.

УДК 517.968

Ковтун О.І.

НЕЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЗІ СЛАБКОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ ТА ОБМЕЖЕННЯМИ НА ШУКАНУ ФУНКЦІЮ

We find the condition of existing of the solving for the nonlinear integral equations with the limitations under the searched function. The solving of the given problem is built with the help of the generalized additional problem.

Знайдено умови існування розв'язку інтегрального рівняння зі слабкою нелінійністю з додатковими умовами. Використовуючи узагальнену допоміжну задачу, побудовано розв'язок даної задачі.

Нехай є інтегральне рівняння зі слабкою нелінійністю

$$y(x) = f(x) + \int_{\Omega} K(x,t)y(t)dt + \lambda \int_{\Omega} T(x,t)F(t, y(t))dt \tag{1}$$

і додатковими умовами

$$\int_{\Omega} \Phi_s(t)y(t)dt = \alpha_s, \quad s = \overline{1,m}, \tag{2}$$

де λ – малий параметр, К: $(\Omega \times \Omega) \to R$, $T:(\Omega \times \Omega) \to R$, причому $\iint_{\Omega} |K(x,t)|^2 dxdt < \infty$, $\iint_{\Omega} |T(x,t)|^2 dxdt < \infty$, $F(t,u)$, $t \in \Omega$, $u \in R$ – неперервна функція своїх аргументів і по другій змінній задовольняє умову Ліпшиця, f(x) і $\Phi_s(x)$-належать класу $L_2(\Omega)$ і є відомими функціями, α_s $(s = \overline{1,m})$ – відома множина чисел, y(x) – невідома функція.

Задачу (1) та умови (2) вважають сумісною, якщо існує функція $y \in L_2(\Omega)$, яка задовольняє рівняння (1) та умови (2). У протилежному випадку – задача несумісна.

Для встановлення умов сумісності нелінійної задачі розглянемо задачу з керуванням

$$\overline{y}(x) = f(x) + u(x) + \int_{\Omega} K(x,t)\overline{y}(t)dt + \lambda \int_{\Omega} T(x,t)F(t, \overline{y}(t))dt, \tag{3}$$

$$\int_{\Omega} \Phi_s(t)\overline{y}(t)dt = \alpha_s, \quad s = \overline{1,m.}, \tag{4}$$

де u(x) має вигляд