1. Trench W.F. An algorithm for inversion of finite hankel matrices // Soc. Indust. Appl. Math. Vol. 13, No. 4 1965. 2. Иохвидов С. Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы. М., 1974. 3. Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М., 1987.

УДК 517.968

Ковтун О.І.

НЕЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЗІ СЛАБКОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ ТА ОБМЕЖЕННЯМИ НА ШУКАНУ ФУНКЦІЮ

We find the condition of existing of the solving for the nonlinear integral equations with the limitations under the searched function. The solving of the given problem is built with the help of the generalized additional problem.

Знайдено умови існування розв’язку інтегрального рівняння зі слабкою нелінійністю з додатковими умовами. Використовуючи узагальнену допоміжну задачу, побудовано розв’язок даної задачі.

Нехай є інтегральне рівняння зі слабкою нелінійністю

$$y(x) = f(x) + \int_{\Omega} K(x,t)y(t)dt + \lambda \int_{\Omega} T(x,t)F(t,y(t))dt \qquad (1)$$

і додатковими умовами

$$\int_{\Omega} \Phi_s(t)y(t)dt = \alpha_s, \quad s = \overline{1,m}, \qquad (2)$$

де λ – малий параметр, K: $(\Omega\times\Omega) \to R$, $T:(\Omega\times\Omega) \to R$, причому $\iint_{\Omega} |K(x,t)|^2 dxdt < \infty$, $\iint_{\Omega} |T(x,t)|^2 dxdt < \infty$, $F(t,u)$, $t \in \Omega$, $u \in R$ – неперервна функція своїх аргументів і по другій змінній задовольняє умову Ліпшиця, f(x) і $\Phi_s(x)$-належать класу $L_2(\Omega)$ і є відомими функціями, α_s $(s = \overline{1,m})$ – відома множина чисел, y(x) – невідома функція.

Задачу (1) та умови (2) вважають сумісною, якщо існує функція $y \in L_2(\Omega)$, яка задовольняє рівняння (1) та умови (2). У протилежному випадку – задача несумісна.

Для встановлення умов сумісності нелінійної задачі розглянемо задачу з керуванням

$$\overline{y}(x) = f(x) + u(x) + \int_{\Omega} K(x,t)\overline{y}(t)dt + \lambda \int_{\Omega} T(x,t)F(t,\overline{y}(t))dt, \qquad (3)$$

$$\int_{\Omega} \Phi_s(t)\overline{y}(t)dt = \alpha_s, \quad s = \overline{1,m.}, \qquad (4)$$

де u(x) має вигляд

$$u(x)=\sum_{s=1}^{m}\lambda_s\xi_s(x),$$

в якому $\{\xi_s\}_{s=1}^{v}\subset L_2(\Omega)$ – система лінійно незалежних функцій.

Ядро K подамо у вигляді K(x,t)=H(x,t)+B(x,t) і введемо функцію

$$z(x)=f(x)+\int_\Omega B(x,t)\bar{y}(t)dt+\lambda\int_\Omega T(x,t)F(t,\bar{y}(t))dt. \tag{5}$$

Тоді задача (3), (4), враховуючи (5), буде мати вигляд

$$\bar{y}(x)=u(x)+z(x)+\int_\Omega H(x,t)\bar{y}(t)dt, \tag{6}$$

$$\int_\Omega \Phi_s(t)\bar{y}(t)dt=\alpha_s. \tag{7}$$

Припустимо, що задача (6), (7) має єдиний розв'язок. Тоді, як відомо [3], розв'язок цієї задачі можна подати формулами

$$u(x)=r(x)-\int_\Omega N(x,t)z(t)dt, \tag{8}$$

$$\bar{y}(x)=k(x)+\int_\Omega G(x,t)z(t)dt, \tag{9}$$

де

$$r(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\alpha_s\beta_{is}\xi_i(x),\ k(x)=r(x)+\int_\Omega R(x,t)r(t)dt,$$

$$G(x,t)=\delta(x-t)+R(x,t)-N(x,t)-\int_\Omega R(x,\eta)N(\eta,t)d\eta,$$

$$N(x,t)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\beta_{is}\xi_i(x)\Lambda_s(t).$$

Зазначимо, що ядра N(x,t) і G(x,t) мають такі властивості

$$\int_\Omega N(x,t)\xi_k(t)dt=\xi_k(x),\ k=\overline{1,m}.,\quad \int_\Omega G(x,t)\xi_k(t)dt=0,\ k=\overline{1,m}., \tag{10}$$

Підставимо вираз (9) у співвідношення (5). Одержимо

$$z(x)=g(x)+\int_\Omega M(x,t)z(t)dt+\lambda\int_\Omega T(x,t)C(t,z(t))dt, \tag{11}$$

де

$$g(x):=f(x)+\int_\Omega B(x,t)k(t)dt,$$

$$M(x,t):=\int_\Omega B(x,\eta)G(\eta,t)d\eta,\qquad C(t,z(t)):=F(t,k(t)+\int_\Omega G(t,\eta)z(\eta)d\eta).$$

Лема. Для будь якої функції w, яка задовольняє умови (2), справедливі співвідношення

$$w(x)=k(x)+\int_\Omega G(x,t)\{w(t)-\int_\Omega H(t,\xi)w(\xi)d\xi\}dt,$$

$$\int_\Omega N(x,t)\{w(t)-\int_\Omega H(t,\xi)w(\xi)d\xi\}dt=r(x).$$

Теорема 1. Задача (1)–(2) сумісна лише тоді, коли існує розв`язок z* рівняння(11), який задовольняє умову

$$\int_\Omega N(x,t)z^*(t)dt=r(x). \tag{12}$$

Якщо умова (12) не виконується, то функції

$$\bar{y}^*(x) = k(x) + \int_\Omega G(x,t) z^*(t) dt,$$

$$u^*(x) = r(x) - \int_\Omega N(x,t) z^*(t) dt$$

є розв'язком задачі з керуванням (3)-(4).

Наслідок. Задача (1), (2) сумісна лише тоді, коли задача з керуванням (3)–(4) має розв'язок ,у якого u*(x)=0.

Позначимо через $U_m(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ – підпростір, породжений системою лінійно незалежних функцій $\{\xi_s\}_{s=1}^m$. Тоді для довільної функції $z \in L_2(\Omega)$ буде справедливе зображення

$$z(x) = u(x) + v(x),\ u \in U_m(\Omega),\ v \in V_m(\Omega), \tag{13}$$

де $U_m(\Omega) \oplus V_m(\Omega) = L_2(\Omega)$, причому

$$u(x) = \sum_{i=1}^m c_i \xi_i(x), \quad \int_\Omega v(x)\xi_s(x) dx = 0,\ s = \overline{1,m}. \tag{14}$$

Із формул (13), (14) випливає справедливість співвідношень

$$u(x) = \int_\Omega P(x,t) z(t) dt, \quad v(x) = \int_\Omega Q(x,t) z(t) dt,$$

де P(x,t) і Q(x,t) – ядра операторів проектування, що мають вигляд

$$P(x,t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \gamma_{ij} \xi_i(x) \xi_j(t), \quad Q(x,t) = \delta(x-t) - P(x,t).$$

На основі формул (13), (14) та (10) маємо

$$\int_\Omega G(x,t) z(t) dt = \int_\Omega G(x,t) v(t) dt, \quad \forall z \in L_2(\Omega). \tag{15}$$

Враховуючи зображення (15), рівняння (11) буде мати вигляд

$$z(x) = g(x) + \int_\Omega M(x,t) v(t) dt + \lambda \int_\Omega T(x,t) C(t, v(t)) dt. \tag{16}$$

Спроектуємо рівняння (16) на підпростір $V_m(\Omega)$. Одержимо

$$v(x) = h(x) + \int_\Omega L(x,t) v(t) dt + \lambda \int_\Omega S(x,t) C(t, v(t)) dt, \tag{17}$$

де

$$h(x) := \int_\Omega Q(x,t) g(t) dt, \qquad L(x,t) := \int_\Omega Q(x,\eta) M(\eta,t) d\eta, \tag{18}$$

$$S(x,t) := \int_\Omega Q(x,\eta) T(\eta,t) d\eta. \tag{19}$$

Теорема 2. Якщо рівняння (17) має розв'язок v* і виконується умова

$$\int_\Omega N(x,t) z^*(t) dt = r(x),$$

де

$$z^*(x) = g(x) + \int_\Omega M(x,t) v^*(t) dt + \lambda \int_\Omega T(x,t) C(t, v^*(t)) dt,$$

то задача (1), (2) має єдиний розв'язок, який зображається формулою

$$y^*(x) = k(x) + \int_\Omega G(x,t) v^*(t) dt.$$

Теорема 3. Якщо існує єдиний розв'язок y*(x) задачі(1), (2), то рівняння (17) має єдиний розв'язок

$$v^*(x) = \int_\Omega Q(x,t) z^*(t) dt,$$

де

$$z^*(x) = y^*(x) - \int_\Omega H(x,t) y^*(t) dt,$$

і виконується умова (12).

До задачі (1), (2) застосуємо метод послідовних наближень. Згідно з цим методом послідовні наближені розв'язки знаходяться з допоміжної задачі

$$y_k(x) = u_k(x) + z_k(x) + \int_\Omega H(x,t) y_k(t) dt, \tag{20}$$

$$\int_\Omega \Phi_s(t) y_k(t) dt = \alpha_{s,} \tag{21}$$

де

$$u_k(x) = \sum_{s=1}^{m} \lambda_s^k \xi_s(x), \tag{22}$$

$$z_k(x) = f(x) + \int_\Omega (K(x,t) - H(x,t)) y_{k-1}(t) dt + \lambda \int_\Omega T(x,t) F(t, y_{k-1}(t)) dt, \tag{23}$$

$\{\xi_s\}_{s=1}^m -$система лінійно незалежних функцій.

Початкове наближення y_0 визначається із задачі (20) ,(21) при k=0 і заданій функції $z_0 \in L_2(\Omega)$.

На основі припущення, зробленого вище, послідовні наближені розв'язки будуються однозначно.

Метод послідовних наближень (20)–(23) для задачі (1), (2) зводиться до відомого методу послідовних наближень для інтегрального рівняння (17), тобто

$$v_k(x) = h(x) + \int_\Omega L(x,t) v_{k-1}(t) dt + \lambda \int_\Omega S(x,t) C(t, v_{k-1}(t)) dt,$$

де h(x), L(x,t), S(x,t) визначаються з формул (18), (19).

Скориставшись, зокрема, результатами робіт [1], [2], можна сформулювати достатні умови збіжності запропонованого методу.

Теорема 4. Якщо задача (3), (4) сумісна та інтегральний оператор

$$(Av)(x) := \int_\Omega L(x,t) v(t) dt + \lambda \int_\Omega S(x,t) C(t, v(t)) dt$$

на підпросторі $V_m(\Omega)$ є оператор стиснення, то існує єдина функція $y^* \in L_2(\Omega)$, яка задовольняє задачу (1), (2), і виконується співвідношення

$$\lim_{k\to\infty} y_k(x) = y^*(x), \quad \lim_{k\to\infty} u_k(x) = 0.$$

1. Лучка А.Ю. Интегральные уравнения с ограничениями и методы их решения // Кибернетика и системный анализ. 1996. № 3. С.82–96. 2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М., 1984. 3. Ковтун О.І. Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду з додатковими умовами // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. 1997. С.81–89.

УДК 519.62

Коник І.В., Пелех Я.М., Ряжська В.А.
НУ “Львівська політехніка”, кафедра обчислювальної математики і програмування

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ВОЛЬТЕРРА

The application of continued fractions to the development of numerical method for the solution of nonlinear second order Volterra-like integro-differential equation is proposed.

Запропоновано числові методи розв’язування інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерра другого роду з використанням неперервних дробів.

Розглянемо на відрізку $I_L\!:\![x_0, x_0+L]$ задачу Коші для нелінійного інтегро-диференціального рівняння

$$u'(x) = F\left[x, u(x), \int_{x_0}^{x} g[x, s, u(s)]ds\right], \tag{1}$$

$$u(x_0) = u_0, \qquad x \in [x_0, x_0+L]. \tag{2}$$

Припустимо, що розв’язок задачі (1), (2) існує і єдиний, а функції F і g володіють необхідною гладкістю. Зауважимо, що рівняння (1) можна перетворити в еквівалентну систему

$$u'(x) = F[x, u(x), z(x)], \quad z(x) = \int_{x_0}^{x} g[x, s, u(s)]ds. \tag{3}$$

На відрізку I_L введемо сітку $\sigma_h = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = x_0 + L\}$ з кроком $h = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, N-1}$. Наближений розв’язок задачі (1), (2) в точці $x_1 = x_0 + h$ шукаємо у вигляді ланцюгового дробу [1]

$$u_1^{[k,l]} = \frac{P_{[k,l]}}{Q_{[k,l]}} = \cfrac{c_0}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \cfrac{d_{k,0}}{1 + \cfrac{d_{k,1}}{1 + \ddots + d_{k,l}}}} \tag{4}$$

Якщо $k + l = 2 \;\; (k = 1,2;\; l = 0,1)$

$$c_0 = u_0,\; d_{1,0} = -\frac{\delta_1}{c_0}, \quad d_{1,1} = \frac{\delta_1^2 - c_0\delta_2}{\delta_1 c_0}, \quad d_{2,0} = \frac{\delta_1^2 - c_0\delta_2}{c_0^2}, \tag{5}$$

$$\delta_1 = a_{11}hk_1, \quad \delta_2 = h(a_{21}k_1 + a_{22}k_2), \quad k_1 = F[x_0 + \alpha_1 h_1, u_0, 0],$$