УДК 519.62

Коник І.В., Пелех Я.М., Ряжська В.А.
НУ “Львівська політехніка”, кафедра обчислювальної математики і програмування

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ВОЛЬТЕРРА

The application of continued fractions to the development of numerical method for the solution of nonlinear second order Volterra-like integro-differential equation is proposed.

Запропоновано числові методи розв’язування інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерра другого роду з використанням неперервних дробів.

Розглянемо на відрізку $I_L\!:\![x_0, x_0+L]$ задачу Коші для нелінійного інтегро-диференціального рівняння

$$u'(x) = F\left[x, u(x), \int_{x_0}^{x} g[x, s, u(s)]ds\right], \tag{1}$$

$$u(x_0) = u_0, \qquad x \in [x_0, x_0+L]. \tag{2}$$

Припустимо, що розв’язок задачі (1), (2) існує і єдиний, а функції F і g володіють необхідною гладкістю. Зауважимо, що рівняння (1) можна перетворити в еквівалентну систему

$$u'(x) = F[x, u(x), z(x)], \quad z(x) = \int_{x_0}^{x} g[x, s, u(s)]ds. \tag{3}$$

На відрізку I_L введемо сітку $\sigma_h = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = x_0 + L\}$ з кроком $h = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, N-1}$. Наближений розв’язок задачі (1), (2) в точці $x_1 = x_0 + h$ шукаємо у вигляді ланцюгового дробу [1]

$$u_1^{[k,l]} = \frac{P_{[k,l]}}{Q_{[k,l]}} = \cfrac{c_0}{\sum_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \cfrac{d_{k,0}}{1 + \cfrac{d_{k,1}}{1 + \ddots + d_{k,l}}}} \tag{4}$$

Якщо $k + l = 2 \ \ (k = 1,2;\ l = 0,1)$

$$c_0 = u_0,\ d_{1,0} = -\frac{\delta_1}{c_0}, \quad d_{1,1} = \frac{\delta_1^2 - c_0\delta_2}{\delta_1 c_0}, \quad d_{2,0} = \frac{\delta_1^2 - c_0\delta_2}{c_0^2}, \tag{5}$$

$$\delta_1 = a_{11}hk_1, \quad \delta_2 = h(a_{21}k_1 + a_{22}k_2), \quad k_1 = F[x_0 + \alpha_1 h_1, u_0, 0],$$

$$k_2 = F\left[x_0 + \alpha_2 h, x_0 + \beta_{21} h k_1, \gamma_{21} K_1\right], \quad K_1 = hg\left[x_0 + \alpha h, x_0 + \beta h, u_0 + \gamma h k_1\right],$$

де a_{11}, a_{21}, a_{22}, α, α_1, α_2, β, β_{21}, γ – невідомі поки що параметри.

Розвинення розв'язку задачі (1), (2) в ряд Тейлора в околі точки x_0 має вигляд:

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + h(F)_0 + \frac{1}{2}h^2\left\{(F_x)_0 + (F_u)_0 (F)_0 + (F_z)_0 (g)_0\right\} +$$

$$+\frac{h^3}{6}\left\{(F_{xx})_0 + 2(F_{xu})_0 (F)_0 + (F_{uu})_0 (F^2)_0 + (F_x)_0 (F_u)_0 + (F_{zz})_0 (g^2)_0 + 2(F_{xz})_0 (g)_0 +\right.$$

$$+ 2(F_{uz})_0 (F)_0 (g)_0 + 2(F_z)_0 (g_x)_0 + (F_z)_0 (g_u)_0 (F)_0 + (F_z)_0 (g_s)_0 +$$

$$\left. + (F_u^2)_0 (F)_0 + (F_u)_0 (F_z)_0 (g)_0 \right\} + O(h^4) \tag{6}$$

Якщо $k = 1$, $l = 0$

$$u(x_0 + h)Q_{[1,0]} - P_{[1,0]} = \left\{u(x_0) + h(F)_0 + \frac{1}{2}h^2\left\{(F_x)_0 + (F_u)_0 (F)_0 + (F_z)_0 (g)_0\right\} + O(h^3)\right\}\times$$

$$\times\left(u_0 - a_{11}h(F)_0 - a_{11}h^2 a_1 (F_x)_0 - a_{11}\frac{\alpha_1^2}{2}h^3 (F_{xx})_0 + O(h^4)\right) - u_0^2 =$$

$$= \left\{u(x_0)u_0 - u_0^2\right\} + h\left\{1 - a_{11}\right\}u_0 (F)_0 + h^2\left\{\frac{1}{2}u''(x_0)u_0 - a_{11}(F)_0^2 - a_{11}\alpha_1 u_0 (F_x)_0\right\} + O(h^3).$$

Якщо прийняти $a_{11} = 1$, $\alpha_1 = 0$ і розвинути $\dfrac{1}{u_0 - h(F)_0 + \ldots}$ в ряд за малим параметром h, будемо мати:

$$R_{[1,0]} = h^2\,\frac{\frac{1}{2}u''(x_0)u_0 - (F^2)_0}{u_0} + O(h^3) \tag{7}$$

і обчислювальна формула набере вигляду:

$$u_1 = \frac{u_0}{1 - h\dfrac{k_1}{u_0}}, \quad k_1 = F(x_0, u_0, 0). \tag{8}$$

Розглянемо тепер формули (4) і (5), якщо $k = 1$, $l = 1$:

$$u_1^{[1,1]} = \frac{u_0}{1 - \dfrac{h\dfrac{a_{11}k_1}{u_0}}{1 + \dfrac{h a_{11}^2 k_1^2 - u_0 (a_{21}k_1 + a_{22}k_2)}{u_0 a_{11} k_1}}}, \tag{9}$$

$$k_1 = F(x_0 + \alpha_1 h, u_0, 0), \quad k_2 = F(x_0 + \alpha_2 h, u_0 + \beta_{21} h k_1, \gamma_{21} K_1)$$

$$K_1 = hg(x_0 + \alpha h, x_0 + \beta h, u_0 + \gamma h k_1). \tag{10}$$

Невідомі параметри a_{ij}, α_j $(i=1,2;\ j=1,2)$, β_{21}, γ_{21}, α, β, γ виберемо з умови, щоб розвинення $u_1^{[1,1]}$ в ряд Тейлора в околі точки $x=x_0$ збігалось з відповідним розвиненням (6) до членів порядку h^2 включно. Для цього спочатку перетворимо формулу (9) до вигляду

$$u_1^{[1,1]}=u_0+\frac{ha_{11}^2k_1^2}{(a_{11}-a_{21})k_1-a_{22}k_2}=u_0+\frac{\widetilde{P}_{[1,1]}}{\widetilde{Q}_{[1,1]}} \tag{11}$$

де

$$\widetilde{P}_{[1,1]}=a_{11}^2\left\{h\left(F^2\right)_0+2\alpha_1h^2(F)_0\left(F_x\right)_0+h^3\left(\alpha_1^2\left(F_x\right)_0+\alpha_1^2(F)_0\left(F_{xx}\right)_0\right)+O\left(h^4\right)\right\}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}_{[1,1]}&=(a_{11}-a_{21})k_1-a_{22}k_2=(a_{11}-a_{21}-a_{22})(F)_0+h\Big\{\big[(a_{11}-a_{21})\alpha_1-a_{22}\alpha_2\big]\left(F_x\right)_0-\\&-a_{22}\beta_{21}\left(F_u\right)_0(F)_0-a_{22}\gamma_{21}\left(F_z\right)_0\left(g\right)_0\Big\}+h^2\left\{\left[(a_{11}-a_{21})\frac{\alpha_1^2}{2}-a_{22}\frac{\alpha_2^2}{2}\right]\left(F_{xx}\right)_0-\right.\\&-\frac{1}{2}a_{22}\beta_{21}^2\left(F_{uu}\right)_0(F)_0^2-\frac{1}{2}a_{22}\gamma_{21}^2\left(F_{zz}\right)_0\left(g^2\right)_0-\frac{1}{2}a_{22}\alpha_2\beta_{21}\left(F_{xu}\right)_0(F)_0-\\&-a_{22}\alpha_2\gamma_{21}\left(F_{xz}\right)_0(g)_0-a_{22}\beta_{21}\gamma_{21}\left(F_{uz}\right)_0(g)_0-a_{22}\beta_{21}\alpha_1\left(F_x\right)_0\left(F_u\right)_0-\\&\left.-a_{22}\gamma_{21}\alpha\left(F_z\right)_0\left(g_x\right)_0-a_{22}\gamma_{21}\gamma\left(F_z\right)_0\left(g_u\right)_0(F)_0-a_{22}\gamma_{21}\beta\left(F_z\right)_0\left(g_s\right)_0\right\}+O\left(h^3\right).\end{aligned} \tag{13}$$

Тоді

$$\begin{aligned}u(x_0+h)-u_1^{[1,1]}&=\frac{1}{\widetilde{Q}_{[1,1]}}\Big(h(F)_0^2\left[a_{11}-a_{21}-a_{22}-a_{11}^2\right]+h^2\Big[(a_{11}-a_{21})\alpha_1-a_{22}\alpha_2+\\&+\frac{1}{2}(a_{11}-a_{21}-a_{22})-2\alpha_1a_{11}^2\Big](F)_0\left(F_x\right)_0+h^2\left[\frac{1}{2}(a_{11}-a_{21}-a_{22})-a_{22}\beta_{21}\right](F)_0\left(F_x\right)_0+\\&+h^2\left[\frac{1}{2}(a_{11}-a_{21}-a_{22})-a_{22}\gamma_{21}\right](F)_0\left(F_u\right)_0(g)_0+h^3\left\{\left[\frac{1}{6}+(a_{11}-a_{21})\frac{\alpha_1^2}{2}-a_{22}\frac{\alpha_2^2}{2}\right]\left(F_{xx}\right)_0+\right.\\&+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}a_{22}\beta_{21}^2\right)\left(F_{uu}\right)_0(F)_0+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}a_{22}\gamma_{21}^2\right)\left(F_{zz}\right)_0(g)_0+\left(\frac{1}{3}-a_{22}\alpha_2\beta_{21}\right)\left(F_{xu}\right)_0(F)_0+\\&+\left(\frac{1}{3}-a_{22}\alpha_2\gamma_{21}\right)\left(F_{xz}\right)_0(g)_0+\left(\frac{1}{3}-a_{22}\beta_{21}\gamma_{21}\right)\left(F_{uz}\right)_0(g)_0+\left(\frac{1}{6}-a_{22}\beta_{21}\alpha_1\right)\left(F_x\right)_0\left(F_u\right)_0+\\&+\left(\frac{1}{3}-a_{22}\alpha\gamma_{21}\right)\left(F_z\right)_0\left(g_x\right)_0+\left(\frac{1}{6}-a_{22}\gamma_{21}\gamma\right)\left(F_z\right)_0\left(g_u\right)(F)_0+\left(\frac{1}{6}-a_{22}\gamma_{21}\beta\right)\left(F_z\right)_0\left(g_s\right)_0+\\&+\frac{1}{6}\left(F_u^2\right)_0(F)_0+\frac{1}{6}\left(F_u\right)_0\left(F_z\right)_0(g)_0+\frac{1}{2}u''(x_0)\Big(\big[(a_{11}-a_{21})\alpha_1-a_{22}\alpha_2\big]\left(F_x\right)_0-\\&\left.-a_{22}\beta_{21}(F)_0\left(F_u\right)_0-a_{22}\gamma_{21}\left(F_z\right)_0(g)_0\Big)-a_{11}^2\alpha_1^2\left[\left(F_x\right)_0+(F)_0\left(F_{xx}\right)_0\right]\right\}+O\left(h^4\right).\end{aligned}$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти чисельника при h і h^2, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11} - a_{21} - a_{22} = a_{11}^2, \\ (a_{11} - a_{21})\alpha_1 - a_{22}\alpha_2 + \frac{1}{2}(a_{11} - a_{21} - a_{22}) = 2a_{11}^2\alpha_1, \\ a_{22}\beta_{21} = \frac{1}{2}(a_{11} - a_{21} - a_{22}), \\ a_{22}\gamma_{21} = \frac{1}{2}(a_{11} - a_{21} - a_{22}). \end{cases} \tag{14}$$

З двох останніх рівнянь випливає, що $\beta_{21} = \gamma_{21}$. Параметр a_{11} виберемо з умови, щоб два поверхи дробу (9) давали наближення до точного розв'язку порядку $O(h^2)$ (див. формулу (8)). Тоді

$$\begin{cases} a_{11} = 1, \\ 1 - a_{21} - a_{22} = 1, \\ (1 + a_{21})\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 = \frac{1}{2}, \\ \beta_{21} = \gamma_{21} = \frac{1}{2a_{22}}. \end{cases} \tag{15}$$

Якщо $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то розв'язок системи алгебраїчних рівнянь (15) такий:

$$a_{11} = 1, \quad a_{21} = a_{22}, \quad a_{22} = \frac{1 - 2\alpha_1}{2(\alpha_2 - \alpha_1)}, \quad \beta_{21} = \gamma_{21} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 - 2\alpha_1}, \quad (1 - 2\alpha_1 \neq 0), \tag{16}$$

а якщо $\alpha_1 = \alpha_2$ то

$$a_{11} = 1, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad a_{21} = -a_{22}, \quad \beta_{21} = \gamma_{21} = \frac{1}{2a_{22}}, \tag{17}$$

де a_{22} – довільне відмінне від нуля число. Оскільки α, β, γ не входять в систему (14), то їх можна вибрати довільними, наприклад, прийняти $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Наведемо деякі конкретні значення параметрів, що визначаються виразами (16), (17) :

1) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{21} = -1$, $\beta_{21} = \gamma_{21} = \frac{1}{2}$, тобто

$$u_1^{[1,1]} = \cfrac{u_0}{1 - \cfrac{hk_1 / u_0}{1 + \cfrac{hk_1^2 - u_0(k_2 - k_1)}{u_0 k_1}}}, \tag{18}$$

де $k_1 = F(x_0, u_0, 0)$, $k_2 = F\left(x_0 + \frac{h}{2}, u_0 + \frac{1}{2}hk_1, \frac{1}{2}K_1\right)$, $K_1 = hg(x_0, x_0, u_0)$.

2) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $a_{11} = 1$, $a_{21} = -\frac{1}{2}$, $a_{22} = \frac{1}{2}$, $\beta_{21} = \gamma_{21} = 1$,

3) $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, $a_{11} = 1$, $a_{21} = -\frac{1}{2}$, $a_{22} = \frac{1}{2}$, $\beta_{21} = \gamma_{21} = 1$,

4) $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \frac{1}{3}$, $a_{11} = 1$, $a_{21} = -\frac{3}{4}$, $a_{22} = \frac{3}{4}$, $\beta_{21} = \gamma_{21} = \frac{2}{3}$.

Можна вибрати параметри $a_{21}, a_{22}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_{21}, \gamma_{21}, \alpha, \beta, \gamma$ так, щоб зменшити кількість доданків при h^3. Наприклад, приймемо $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{2}{3}$, $\beta_{21} = \gamma_{21} = \frac{2}{3}$, $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = \gamma = \frac{1}{3}$, $a_{11} = 1$, $a_{21} = -\frac{3}{4}$, $a_{22} = \frac{3}{4}$, тоді

$$R_{[1,1]} == u(x_0 + h) - u_1^{[1,1]} = \frac{h^3\left\{\frac{1}{6}(F)_0 (F_u)_0 u''(x_0) - \frac{1}{4}\left(u''(x_0)\right)^2\right\} + O(h^4)}{(F)_0 - \frac{1}{2} h u''(x_0) + O(h^2)} =$$

$$= \frac{1}{12} h^3 u''(x_0)\left\{2(F_u)_0 - 3u''(x_0)/(F)_0\right\} + O_1(h^4). \tag{19}$$

Зауважимо, що для всіх визначених вище параметрів $(a_{21}k_1 + a_{22}k_2) \cong hu''(x_0)$ і якщо $(F_u)_0 = 0$, то із (19) можна дістати інформацію про величину похибки $R_{[1,1]}$.

Розглянемо тепер формулу (4), якщо $k = 2$, $l = 0$:

$$u_1^{[2,0]} = \frac{u_0}{1 - \frac{h a_{11} k_1}{u_0} + \frac{h^2 a_{11}^2 k_1^2 - h u_0 [a_{21} k_1 + a_{22} k_2]}{u_0}} = \frac{P_{[2,0]}}{Q_{[2,0]}}, \tag{20}$$

де $P_{[2,0]} = u_0^3$, $Q_{[2,0]} = u_0^2 - h u_0\left[(a_{11} + a_{21})k_1 + a_{22}k_2\right] + h^2 a_{11}^2 k_1^2$, а k_1, k_2 визначаються формулами (10). Тоді

$$u(x_0 + h) Q_{[2,0]} - P_{[2,0]} = h u_0^2 (F)_0 \left\{1 - (a_{11} + a_{21} + a_{22})\right\} +$$

$$+ h^2 \left\{ u_0^2 (F_x)_0 \left[\frac{1}{2} - (a_{11} + a_{21})\alpha_1 - a_{22}\alpha_2\right] + u_0^2 (F)_0 (F_u)_0 \left(\frac{1}{2} - a_{22}\beta_{21}\right) + \right.$$

$$\left. u_0^2 (F_z)_0 (g)_0 \left(\frac{1}{2} - a_{22}\gamma_{21}\right) - u_0 (F)_0^2 \left[a_{11}^2 - (a_{11} + a_{21} + a_{22})\right] \right\} + O(h^3).$$

Звідси отримуємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11} + a_{21} + a_{22} = 1, \\ (a_{11} + a_{21})\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 = \frac{1}{2}, \\ a_{22}\beta_2 = \frac{1}{2}, \\ a_{22}\gamma_{21} = \frac{1}{2}, \\ a_{11} + a_{21} + a_{22} = a_{11}^2, \end{cases} \tag{21}$$

розв’язок якої визначається формулами (16), (17). Якщо, наприклад, як параметри взяти їх значення із (10), то

$$R[2,0] = h^3 \left\{ \frac{1}{6}(F_u)_0 u''(x_0) - \frac{(F)_0 \left[u_0 u''(x_0) - (F^2)_0 \right]}{u_0^2} \right\} + O(h^4).$$

Отже, запропоновані розрахункові формули, які дають змогу знаходити наближене значення задачі (1)–(2) в точці x_1. Для знаходження наближень в наступних точках x_n $(n \geq 2)$ скористаємось способом рухомого початку [2]. Представивши рівняння (1) у вигляді

$$u'(x) = F\left[x, u(x), w_n(x) + W(x)\right],$$

де

$$w_n(x) = \int_{x_0}^{x_n} g(x, s, u(s)) ds, \qquad W(x) = \int_{x_n}^{x} g(x, s, u(s)) ds,$$

одержимо задачу з новим початком інтегрування (x_n), для розв'язування якої використовуються формули виду (18) або (20), причому наближення до $w_n(x)$ знаходимо за допомогою квадратурних формул.

1. Скоробогатько В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее приложение в вычислительной математике. М., 1983. 2. Baker C. T. H. The numerical treatment of integral equations. Oxford, 1977.

УДК 517.948

Копач М.І.
Прикарпатський університет ім. В. Стефаника, Ів.-Франківськ

ДВОСТОРОННІ ІНТЕГРАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ З БАГАТЬМА НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗМІННИМИ ДЛЯ РІВНЯНЬ З ЧАСТКОВОЮ ЛІПШИЦІЄВІСТЮ

The new theorems about a two-sided estimation of the solutions for integral equations of a type $x(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, x(s), x(s)) ds$ are proved, when $K(t, s, p, q)$ is slave by some more weak for nondecrease rarher *p* and noncrease rather *q* to conditions.

Для інтегральних рівнянь вигляду $x(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, x(s), x(s)) ds$ доведені нові теореми про двосторонні оцінки розв'язків, коли $K(t, s, p, q)$ підпорядковано деяким слабкішим за ізотонність щодо *p* та антитонність щодо *q* умовам.