$$R[2,0] = h^3 \left\{ \frac{1}{6} \left(F_u\right)_0 u''\left(x_0\right) - \frac{(F)_0 \left[u_0 u''\left(x_0\right) - \left(F^2\right)_0\right]}{u_0^2} \right\} + O\left(h^4\right).$$

Отже, запропоновані розрахункові формули, які дають змогу знаходити наближене значення задачі (1)–(2) в точці x_1. Для знаходження наближень в наступних точках x_n $(n \geq 2)$ скористаємось способом рухомого початку [2]. Представивши рівняння (1) у вигляді

$$u'(x) = F\left[x, u(x), w_n(x) + W(x)\right],$$

де

$$w_n(x) = \int_{x_0}^{x_n} g\left(x, s, u(s)\right) ds, \qquad W(x) = \int_{x_n}^{x} g\left(x, s, u(s)\right) ds,$$

одержимо задачу з новим початком інтегрування $\left(x_n\right)$, для розв’язування якої використовуються формули виду (18) або (20), причому наближення до $w_n(x)$ знаходимо за допомогою квадратурних формул.

1. Скоробогатько В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее приложение в вычислительной математике. М., 1983. 2. Baker C. T. H. The numerical treatment of integral equations. Oxford, 1977.

УДК 517.948

Копач М.І.
Прикарпатський університет ім. В. Стефаника, Ів.-Франківськ

ДВОСТОРОННІ ІНТЕГРАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ З БАГАТЬМА НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗМІННИМИ ДЛЯ РІВНЯНЬ З ЧАСТКОВОЮ ЛІПШИЦІЄВІСТЮ

The new theorems about a two-sided estimation of the solutions for integral equations of a type $x(t) = f(t) + \int_a^t K\left(t, s, x(s), x(s)\right) ds$ are proved, when $K(t, s, p, q)$ is slave by some more weak for nondecrease rarher *p* and noncrease rather *q* to conditions.

Для інтегральних рівнянь вигляду $x(t) = f(t) + \int_a^t K\left(t, s, x(s), x(s)\right) ds$ доведені нові теореми про двосторонні оцінки розв'язків, коли $K(t, s, p, q)$ підпорядковано деяким слабкішим за ізотонність щодо *p* та антитонність щодо *q* умовам.

Йдеться про двосторонні оцінки розв'язків інтегрального рівняння вигляду

$$x(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, x(s), x(s))ds \qquad (1)$$

за припущення про немонотонність $k(t,s,x) \equiv K(t,s,x,x)$ щодо x, де $t,s \in [a,b]$, $a \le b$, $a,b,t,s \in R^N$, R^N – N-вимірний евклідів простір. Нерівність $a \le b$ означає, що $a = (a_1,...,a_n)$, $b = (b_1,...,b_n)$, $-\infty < a_i \le b_i < \infty$, $i = \overline{1,N}$. Інакше кажучи, (1) можна подати у вигляді

$$x(t^1,...,t^N) = f(t^1,...,t^N) + \int_{a^1}^{t^1} ... \int_{a^N}^{t^N} K(t^1,...,t^N, s^1,...,s^N, x(s^1,...,s^N), x(s^1,...,s^N))ds^1...ds^N$$

($a^i \le t^i$, $s^i \le b^i$, $i = \overline{1,N}$, a^i, b^i – дійсні числа).

Будемо вважати, що $K(t,s,p,q)$:$[a,b]\times[a,b]\times E\times E$ є неперервною функцією за сукупністю змінних, E – напівупорядкований банахів простір, $f(t) \in C(E,[a,b])$. Тут $C(E,[a,b])$ – множина неперервних на сегменті $[a,b]$ функцій із значеннями в E.

Відзначимо, що випадок монотонної щодо x функції $k(t,s,x)$ і $N = 1$ розглянуто в [1], а немонотонної щодо x функції $k(t,s,x)$ при монотонно неспадній щодо p і незростаючій щодо q функції $K(t,s,p,q)$ – в [2]. Згадані дослідження із [2] поширені в [3] для $N \ge 1$.

У цій статті на основі [2], [3] отримані нові твердження про двосторонні інтегральні нерівності, коли $K(t,s,p,q)$ підпорядкована деяким слабкішим за ізотонність щодо p та антитонність щодо q умовам. Зазначені результати із [1-3], а також відповідні твердження із [4, 5] та основний результат із [6] одержуються як часткові із наведених далі теорем.

Вважатимемо, що напівупорядкованість в E запроваджена за допомогою деякого конуса E^+ додатних елементів і цей конус є тілесним. Крім того, напівупорядкованість є правильною. Тілесність E^+ означає, що конус E^+ має внутрішні елементи, а цілком правильна напівупорядкованість E означає, що з монотонності послідовності $\{x_n\}$ і її обмеженості за нормою випливає збіжність цієї послідовності до елемента $x^* \in E$. Як прийнято, вживаємо позначення $x << y$, якщо $y - x \in \inf E^+$ та позначення $x \le y$, якщо $y - x \in E^+$.

Основним припущенням, яким замінимо вимогу про ізотонність щодо p та антитонність щодо q функції $K(t,s,p,q)$ в [3], є така умова А:

Існують неперервні невід'ємні при $t,s \in [a,b]$ функції $g(t,s)$, $h(t,s)$, для яких із співвідношень $y \le z$, $y,z \in E$, $t,s \in [a,b]$, випливає

$$\begin{aligned} -g(t,s)(z-y) &\le K(t,s,z,p) - K(t,s,y,p), \\ -h(t,s)(z-y) &\ge K(t,s,p,z) - K(t,s,p,y). \end{aligned} \qquad (2)$$

Теорема 1. Нехай справджується умова А, задані функції $p(t), q(t) \in C(E,[a,b])$, що задовольняють при $t \in [a,b]$ нерівності

$$p(t) << f(t) + \int_a^t K(t, s, p(s), q(s))ds - \int_a^t q(t,s)(q(s) - p(s))ds - \int_a^t h(t,s)(q(s) - p(s))ds,$$
$$q(t) >> f(t) + \int_a^t K(t, s, q(s), p(s))ds - \int_a^t q(t,s)(q(s) - p(s))ds + \int_a^t h(t,s)(q(s) - p(s))ds. \quad (3)$$

Тоді правдиві оцінки

$$p(t) << x^*(t) << q(t), \left(t \in [a,b]\right) \quad (4)$$

для всякого розв'язку $x^*(t) \in \mathrm{C}(\mathrm{E}, [a,b])$.

Доведення. Використаємо міркування, схожі на ті, що були використані для доведення теореми 1 з [3] (див. також [2], §§9,18). Позначимо через D множину тих точок з $[a,b]$, в яких оцінки (4) не мають місця. Віддаль

$$d = \rho(a, \mathrm{D}) = \inf_{t \in \mathrm{D}} \rho(a,t), \quad (5)$$

де $\rho(a,t)$ – віддаль між точками a і t в N – вимірному евклідовому просторі R^N, задовольняє нерівність $d > 0$. Це випливає з неперервності функцій $p(t)$, $q(t)$, $x^*(t)$ й умови А та з того, що для $t = a$ внаслідок (3) будемо мати $p(a) << f(a) = x^*(a) << q(a)$.

Нехай $t_1 \in [a,b]$ – така точка, що при $t = t_1$ рівність (5) досягається, тобто $\rho(a,t_1) = d > 0$. Якщо точок, у яких досягається рівність (5), є кілька, то за t_1 виберемо будь-яку з них. Точка $t_1 \in \mathrm{D}$, бо в противному разі було б $p(t_1) << x^*(t_1) << q(t_1)$ і за неперервністю функції $p(t)$, $q(t)$, $x^*(t)$ знайшовся б такий окіл точки t_1, в якому $p(t) << x^*(t) << q(t)$. Тому якщо $t = t_1$, не могла б справджуватись рівність $\rho(a,\mathrm{D}) = \rho(a,t_1)$. Отже, якщо $t = t_1$, порушене хоча б одне із співвідношень (4) і замість них маємо співвідношення

$$p(t_1) \le x^*(t_1) \le q(t_1), \quad (6)$$

оскільки з неперервності $p(t)$, $q(t)$, $x^*(t)$ для $t = t_1$ випливає

$$p(t_1) = \lim_{t \to t_1} p(t) \le \lim_{t \to t_1} x^*(t) = x^*(t_1) \le \lim_{t \to t_1} q(t) = q(t_1) \qquad (t \in [a,b]).$$

З іншого боку, використовуючи умову А, (1), (3), (6) маємо

$$p(t_1) << f(t_1) + \int_a^{t_1} K(t_1, s, p(s), q(s))ds - \int_a^{t_1} q(t_1,s)(q(s) - p(s))ds - \int_a^{t_1} h(t_1,s)(q(s) - p(s))ds \le f(t_1) +$$
$$+ \int_a^{t_1} K(t_1, s, p(s), q(s))ds \le f(t_1) + \int_a^{t_1} K(t_1, s, x^*(s), x^*(s))ds = x^*(t_1) \le f(t_1) + \int_a^{t_1} K(t_1, s, q(s), p(s))ds \le$$
$$\le f(t_1) + \int_a^{t_1} K(t_1, s, q(s), p(s))ds - \int_a^{t_1} q(t_1,s)(q(s) - p(s))ds + \int_a^{t_1} h(t_1,s)(q(s) - p(s))ds << q(t_1).$$

Отримана з припущенням суперечність доводить теорему.

Наслідок 1. (Теорема 1 з [3]). Нехай $f(t)$, $K(t,s,u,v)$ неперервні за сукупністю аргументів при $t,s \in [a,b]$, $u,v \in \mathrm{E}$, причому $K(t,s,u,v)$ ізотонна щодо u, антитонна щодо v

і задані неперервні при $t \in [a,b]$ із значеннями в E функції $p(t)$, $q(t)$, для яких справджуються нерівності

$$p(t) << f(t) + \int_a^t K(t,s,p(s),q(s))ds,$$

$$q(t) >> f(t) + \int_a^t K(t,s,q(s),p(s))ds \qquad (t \in [a,b]).$$

Тоді для всякого розв'язку $x^* \in \mathrm{C}(\mathrm{E},[a,b])$ рівняння (1) правдиві оцінки

$$p(t) << x^*(t) << q(t) \ \ (t \in [a,b]).$$

Доведення отримується застосуванням теореми 1, якщо при $q(t,s) \equiv \theta$, $h(t,s) \equiv \theta$, де θ – нульовий елемент із E.

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} y(t) &= f(t) + \int_a^t K(t,s,y(s),z(s))ds - \int_a^t g(t,s)(z(s)-y(s))ds - \int_a^t h(t,s)(z(s)-y(s))ds, \\ z(t) &= f(t) + \int_a^t K(t,s,z(s),y(s))ds + \int_a^t g(t,s)(z(s)-y(s))ds + \int_a^t h(t,s)(z(s)-y(s))ds. \end{aligned} \tag{7}$$

Наведемо означення крайнього розв'язку системи (7), яке будемо використовувати надалі. Поняття крайнього розв'язку системи ввів М.С. Курпель (див. [2]). Згідно з [2] розв'язок $(y^*(t),z^*(t))$ системи (7) називають крайнім в $\mathrm{C}(\mathrm{E},[a,b])$ її розв'язком, якщо $y^*(t),z^*(t) \in \mathrm{C}(\mathrm{E},[a,b])$, для всякого іншого розв'язку $(y(t),z(t))$ цієї системи з компонентами $y(t),z(t) \in \mathrm{C}(\mathrm{E},[a,b])$ маємо

$$y^*(t) \le y(t) \le z^*(t), \ \ y^*(t) \le z(t) \le z^*(t) \ \ (t \in [a,b]).$$

Наступне твердження є аналогом леми 6.1 із [2].

Лема 1. Нехай справджуються умови **теореми 1**. Тоді система (7) має крайній розв'язок $(y^*(t),z^*(t))$ $(y^*(t),z^*(t) \in \mathrm{C}(\mathrm{E},[a,b]))$.

Доведення. Спочатку переконаємося, що для всякого розв'язку $(y(t),z(t))$ системи (7), для якого $y(t),z(t) \in \mathrm{C}(\mathrm{E},[a,b])$, матимемо при $t \in [a,b]$ оцінки

$$p(t) << y(t) << q(t), \ \ p(t) << z(t) << q(t). \tag{8}$$

Правдивість (8), якщо $t = a$, очевидна. Міркуючи так само, як і при доведенні **теореми 1**, вважатимемо, що знайдеться таке $t_0 \in (a,b]$, що $p(t_0) << y(t_0) << q(t_0)$, $p(t_0) << z(t_0) << q(t_0)$ і не справджуються строгі нерівності (8), а при $t \in [a,t_0)$ нерівності (8) справджуються. Ситуація, коли $p(t_0)$, $y(t_0)$, $q(t_0)$ та $p(t_0)$, $z(t_0)$, $q(t_0)$ непорівнювані, неможлива. У цьому можна переконатися так само, як і для схожого фрагмента, з доведення **теореми 1**. Використовуючи (3) і (7) і умову А, знаходимо

$$y(t_0)-p(t_0)>>\int_a^{t_0}K(t_0,s,y(s),z(s))ds-\int_a^{t_0}g(t_0,s)(z(s)-y(s))ds-\int_a^{t_0}h(t_0,s)(z(s)-y(s))ds-$$

$$-\int_a^{t_0}K(t_0,s,p(s),q(s))ds-\int_a^{t_0}g(t_0,s)(p(s)-q(s))ds-\int_a^{t_0}h(t_0,s)(p(s)-q(s))ds=$$

$$=\int_a^{t_0}[K(t_0,s,y(s),z(s))-K(t_0,s,y(s),q(s))+K(t_0,s,y(s),q(s))-K(t_0,s,p(s),q(s))-$$

$$-g(t_0,s)(z(s)-y(s))-h(t_0,s)(z(s)-y(s))+g(t_0,s)(q(s)-p(s))+h(t_0,s)(q(s)-p(s))]ds\geq$$

$$\geq\int_a^{t_0}[h(t_0,s)(q(s)-z(s))-g(t_0,s)(y(s)-p(s))-h(t_0,s)(z(s)-y(s))-g(t_0,s)(z(s)-y(s))+$$

$$+g(t_0,s)(q(s)-p(s))+h(t_0,s)(q(s)-p(s))]ds\geq\theta,$$

$$q(t_0)-z(t_0)>>\int_a^{t_0}K(t_0,s,q(s),p(s))ds+\int_a^{t_0}g(t_0,s)(q(s)-p(s))ds+\int_a^{t_0}h(t_0,s)(q(s)-p(s))ds-$$

$$-\int_a^{t_0}K(t_0,s,z(s),y(s))ds-\int_a^{t_0}g(t_0,s)(z(s)-y(s))ds-\int_a^{t_0}h(t_0,s)(z(s)-y(s))ds=$$

$$=\int_a^{t_0}[K(t_0,s,q(s),p(s))-K(t_0,s,q(s),y(s))+K(t_0,s,q(s),y(s))-K(t_0,s,z(s),y(s))+$$

$$+g(t_0,s)(q(s)-p(s))-h(t_0,s)(q(s)-p(s))+g(t_0,s)(z(s)-y(s))+h(t_0,s)(z(s)-y(s))]ds\geq$$

$$\geq\int_a^{t_0}[h(t_0,s)(y(s)-p(s))-g(t_0,s)(q(s)-z(s))+h(t_0,s)(q(s)-p(s))+g(t_0,s)(q(s)-p(s))+$$

$$-g(t_0,s)(z(s)-y(s))-h(t_0,s)(z(s)-y(s))]ds\geq\theta.$$

Ми одержали суперечність з припущенням про те, що в точці t_0 строгі нерівності (8) не правдиві. Тому можна вважати доведеними нерівності (8) для всього проміжку $[a,b]$.

Побудуємо послідовності $\{p_n(t)\}$, $\{q_n(t)\}$ за допомогою формул

$$p_0(t)=p(t),\ \ q_0(t)=q(t), \tag{9}$$

$$\begin{aligned}p_{n+1}(t)&=f(t)+\int_a^t K(t,s,p_n(s),q_n(s))ds-\int_a^t g(t,s)(q_n(s)-p_n(s))ds-\int_a^t h(t,s)(q_n(s)-p_n(s))ds,\\ q_{n+1}(t)&=f(t)+\int_a^t K(t,s,q_n(s),p_n(s))ds+\int_a^t g(t,s)(q_n(s)-p_n(s))ds+\int_a^t h(t,s)(q_n(s)-p_n(s))ds,\end{aligned} \tag{10}$$

й переконаємося, що вони монотонно рівномірно збігаються відповідно до компонент $y^*(t),z^*(t)$ розв’язку $(y^*(t),z^*(t))$ системи (7) і що $(y^*(t),z^*(t))$ – крайній в $C(E,[a,b])$ розв’язок системи (7).

Насамперед покажемо, що послідовності $\{p_n(t)\}$, $\{q_n(t)\}$ монотонні і обмежені. Якщо $n=0$, виконання нерівностей $p_0<<p_1$, $q_0>>q_1$ очевидне. Використовуючи (2), (9), (10), маємо

$$q_1(t)-p_1(t)=\int_a^t [K(t,s,q(s),p(s))-K(t,s,q(s),q(s))-K(t,s,p(s),q(s))+K(t,s,q(s),q(s))+$$
$$+2g(t,s)(q(s)-p(s))+2h(t,s)(q(s)-p(s))]ds\geq$$
$$\geq\int_a^t [h(t,s)(q(s)-p(s))-g(t,s)(q(s)-p(s))+2g(t,s)(q(s)-p(s))+$$
$$+2h(t,s)(q(s)-p(s))]ds\geq\theta,$$

тобто виконуються нерівності

$$p_0(t)<<p_1(t)\leq q_1(t)<<q_0(t)\quad (t\in[a,b]).$$

Нехай при $t\in[a,b]$ для якогось $n\geq 1$ маємо

$$p_{n-1}(t)\leq p_n(t)\leq q_n(t)\leq q_{n-1}(t). \tag{11}$$

Тоді з (10) і (11) випливає

$$p_{n+1}(t)-p_n(t)=\int_a^t\Big[K\big(t,s,p_n(s),q_n(s)\big)-K\big(t,s,p_{n-1}(s),q_n(s)\big)+K\big(t,s,p_{n-1}(s),q_n(s)\big)-$$
$$-K\big(t,s,p_{n-1}(s),q_{n-1}(s)\big)-g(t,s)\big(q_n(s)-p_n(s)-q_{n-1}(s)+p_{n-1}(s)\big)-h(t,s)\big(q_n(s)-p_n(s)-$$
$$-q_{n-1}(s)+p_{n-1}(s)\big)\Big]ds\geq\int_a^t\Big[g(t,s)\big(p_n(s)-p_{n-1}(s)\big)+h(t,s)\big(q_{n-1}(s)-q_n(s)\big)-$$
$$g(t,s)(q_n(s)-p_n(s)-q_{n-1}(s)+p_{n-1}(s))-h(t,s)(q_n(s)-p_n(s)-q_{n-1}(s)+p_{n-1}(s))]ds\geq\theta,$$
$$q_n(t)-q_{n+1}(t)=\int_a^t [K(t,s,q_{n-1}(s),p_{n-1}(s))-K(t,s,q_n(s),p_{n-1}(s))+K(t,s,q_n(s),p_{n-1}(s))-$$
$$-K(t,s,q_n(s),p_n(s))-g(t,s)(q_{n-1}(s)-p_{n-1}(s)-q_n(s)+p_n(s))+h(t,s)(q_{n-1}(s)-p_{n-1}(s)-$$
$$-q_n(s)+p_n(s))]ds\geq\int_a^t [-g(t,s)(q_{n-1}(s)-q_n(s))+h(t,s)(p_n(s)-p_{n-1}(s))+$$
$$+g(t,s)(q_{n-1}(s)-p_{n-1}(s)-q_n(s)+p_n(s))+h(t,s)(q_{n-1}(s)-p_{n-1}(s)-q_{n-1}(s)+p_{n-1}(s))]ds\geq\theta,$$
$$q_{n+1}(t)-p_{n+1}(t)=\int_a^t [K(t,s,q_n(s),p_n(s))-K(t,s,q_n(s),q_n(s))+K(t,s,q_n(s),q_n(s))-$$
$$-K(t,s,p_n(s),q_n(s))+2g(t,s)(q_n(s)-p_n(s))+2h(t,s)(q_n(s)-p_n(s))]ds\geq$$
$$\geq\int_a^t [h(t,s)(q_n(s)-p_n(s))-g(t,s)(q_n(s)-p_n(s))+2g(t,s)(q_n(s)-p_n(s))+$$
$$+2h(t,s)(q_n(s)-p_n(s))]ds\geq\theta.$$

Застосовуючи принцип індукції, робимо висновок, що нерівності (11) правдиві для будь-якого $n=1,2,\ldots$. Згідно з лемою про компактність із [1] (див. також лему 18.1 із [2]) послідовності $\{p_n(t)\}$, $\{q_n(t)\}$ мають відповідно границі $y^*(t),z^*(t)\in \mathrm{C}(\mathrm{E},[a,b])$. З (11) випливає також, що при $t\in[a,b]$ будуть виконуватися нерівності

$$p_n(t)\leq p_{n+1}(t)\leq y^*(t)\leq z^*(t)\leq q_{n+1}(t)\leq q_n(t),\qquad n=1,2,\ldots \tag{12}$$

Оскільки очевидно, що $\left(y^*(t), z^*(t)\right)$ – розв’язок системи (7), то залишається підтвердити, що цей розв’язок є її крайнім в $\mathrm{C}\left(\mathrm{E},[a,b]\right)$ розв’язком. Для доведення знову скористаємося індукцією. Нерівності (8) означають, що при $n=0$ справджуються співвідношення

$$p_n(t) \le y(t) \le q_n(t)\,,\ \ p_n(t) \le z(t) \le q_n(t)\ \ \left(t \in [a,b]\right) \tag{13}$$

для всякого розв’язку $\left(y(t), z(t)\right)$ системи (7), для якого $y(t), z(t) \in \mathrm{C}\left(\mathrm{E},[a,b]\right)$. Припущення про правдивість (13) для будь-якого фіксованого $n>0$ приводить до співвідношень

$$\begin{aligned}
& y(t) - p_{n+1}(t) = \int_a^t \left[K(t,s,y(s),z(s)) - K(t,s,p_n(s),z(s)) + K(t,s,p_n(s),z(s)) - \right. \\
& - K(t,s,p_n(s),q_n(s)) - g(t,s)(z(s)-y(s)) - h(t,s)(z(s)-y(s)) + g(t,s)(q_n(s)-p_n(s)) + \\
& \left. + h(t,s)(q_n(s)-p_n(s))\right]ds \ge \int_a^t - g(t,s)(y(s)-p_n(s)) \,|\, + h(t,s)(q_n(s)-z(s)) - g(t,s)(z(s) - \\
& - y(s)) - h(t,s)(z(s)-y(s)) + g(t,s)(q_n(s)-p_n(s)) + g(t,s)(q_n(s)-p_n(s))]ds \ge \theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& q_{n+1}(t) - y(t) = \int_a^t \left[K(t,s,q_n(s),p_n(s)) - K(t,s,q_n(s),z(s)) + K(t,s,q_n(s),z(s)) - \right. \\
& - K(t,s,y(s),z(s)) + g(t,s)(q_n(s)-p_n(s)) + h(t,s)(q_n(s)-p_n(s)) + h(t,s)(z(s)-y(s)) + \\
& \left. + g(t,s)(z(s)-y(s))\right]ds \ge \int_a^t \left[h(t,s)(z(s)-p_n(s)) - g(t,s)(q_n(s)-y(s)) + g(t,s)(q_n(s) - \right. \\
& \left. - p_n(s)) + h(t,s)(q_n(s)-p_n(s)) + h(t,s)(z(s)-y(s)) + g(t,s)(z(s)-y(s))\right]ds \ge \theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& z(t) - p_{n+1}(t) = \int_a^t \left[K\left(t,s,z(s),y(s)\right) - K\left(t,s,z(s),q_n(s)\right) + K\left(t,s,z(s),q_n(s)\right) - \right. \\
& - K(t,s,p_n(s),q_n(s)) + g(t,s)(z(s)-y(s)) + h(t,s)(z(s)-y(s)) + g(t,s)(q_n(s)-p_n(s)) + \\
& \left. + h(t,s)(q_n(s)-p_n(s))\right]ds \ge \int_a^t \left[h(t,s)(q_n(s)-y(s)) - g(t,s)(z(s)-p_n(s)) + g(t,s)(z(s) - \right. \\
& \left. - y(s)) + h(t,s)(z(s)-y(s)) + g(t,s)(q_n(s)-p_n(s)) + h(t,s)(q_n(s)-p_n(s))\right]ds \ge \theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& q_{n+1}(t) - z(t) = \int_a^t \left[K(t,s,q_n(s),p_n(s)) - K(t,s,q_n(s),y(s)) + K(t,s,q_n(s),y(s)) - \right. \\
& - K(t,s,z(s),y(s)) + g(t,s)(q_n(s)-p_n(s)) + h(t,s)(q_n(s)-p_n(s)) + g(t,s)(z(s)-y(s)) - \\
& \left. - h(t,s)(z(s)-y(s))\right]ds \ge \int_a^t \left[h(t,s)(y(s)-p_n(s)) - g(t,s)(q_n(s)-z(s)) + g(t,s)(q_n(s) - \right. \\
& \left. - p_n(s)) + h(t,s)(q_n(s)-p_n(s)) - g(t,s)(z(s)-y(s)) - h(t,s)(z(s)-y(s))\right]ds \ge \theta,
\end{aligned}$$

з яких випливає на основі принципу індукції правдивість нерівностей (13) для будь-якого $n = 0,1,\ldots$. Перехід до границі $n \to \infty$ в нерівностях (13) дає підставу стверджувати, що $\left(y^*(t), z^*(t)\right)$ – крайній в $\mathrm{C}\left(\mathrm{E},[a,b]\right)$ розв’язок системи (7). Цим самим доведення леми закінчено.

Лема 2. Нехай справджується умова А. Тоді знайдеться таке b_1 $\left(a < b_1 \le b\right)$, що в $\mathrm{C}\left(\mathrm{E},[a,b]\right)$ існує крайній розв’язок $\left(y^*(t), z^*(t)\right)$ системи (7).

Доведення (див. також [2], теорема 9.5). Нехай ω_0 – який-небудь внутрішній елемент з конуса E^+. Існування ω_0 забезпечується тілесністю E^+. Для доведення досить прийняти

$$p(t) = f(t) - \omega_0,\ \ q(t) = f(t) + \omega_0,$$

бо з неперервності $f(t)$ випливає існування принаймні досить малого сегмента $[a, b_1]$, у якому справджуються нерівності (3).

Застосувавши до цього сегмента **лему 1**, доведення закінчуємо.

Теорема 2. Нехай: а) виконується умова А; б) система (7) має єдиний розв'язок в $C(E,[a,b]) \times C(E,[a,b])$; в) задані функції $u(t), v(t) \in C(E,[a,b])$, для яких при $t \in [a,b]$ маємо

$$\begin{aligned} u(t) &\le f(t) + \int_a^t K(t,s,u(s),v(s))ds - \int_a^t g(t,s)(v(s)-u(s))ds - \int_a^t h(t,s)(v(s)-u(s))ds, \\ v(t) &\ge f(t) + \int_a^t K(t,s,v(s),u(s))ds + \int_a^t g(t,s)(v(s)-u(s))ds + \int_a^t h(t,s)(v(s)-u(s))ds. \end{aligned} \tag{14}$$

Тоді для будь-якого розв'язку $x(t) \in C(E,[a,b])$ рівняння (1) правдиві оцінки

$$u(t) \le x(t) \le v(t) \ \ (t \in [a,b]).$$

Довести теорему 2 можна за тією самою схемою, за якою доведена теорема 18.4 із [2].

Приклад 1. Нехай рівняння (1) є лінійним рівнянням вигляду

$$x(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s)x(s)ds, \tag{15}$$

де $f(t)$, $K(t,s)$ – неперервні при $t \in [a,b]$. Приймемо

$$K^-(t,s) = g(t,s),\ K^+(t,s) = h(t,s),$$

де

$$K^+(t,s) = \sup\{K(t,s),0\},\ K^-(t,s) = K^+(t,s) - K(t,s).$$

Нерівності (14) і системи рівнянь (7) мають відповідно вигляд

$$\begin{aligned} u(t) &\le f(t) + \int_a^t K^+(t,s)u(s)ds - \int_a^t K^-(t,s)v(s)ds, \\ v(t) &\ge f(t) + \int_a^t K^+(t,s)v(s)ds - \int_a^t K^-(t,s)u(s)ds \end{aligned} \tag{16}$$

і

$$\begin{aligned} y(t) &= f(t) + \int_a^t K^+(t,s)y(s)ds - \int_a^t K^-(t,s)z(s)ds, \\ z(t) &= f(t) + \int_a^t K^+(t,s)z(s)ds - \int_a^t K^-(t,s)y(s)ds. \end{aligned} \tag{17}$$

Можна стверджувати, що з **теорем 2** і **3** отримуються відповідні результати про двосторонні інтегральні нерівності із [2].

Приклад 2. Як відомо, коли рівняння (1) має вигляд

$$x(t) = f(t) + \alpha(t)\int_a^t \beta(s)x(s)ds\,, \tag{18}$$

де $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – неперервні при $t \in [a,b]$ і задовольняють умови $\alpha(t) = \alpha_1(t^1)\dots\alpha_N(t^N)$, $\beta(t) = \beta_1(t^1)\dots\beta_N(t^N)$, то його розв’язок можна виписати в явному вигляді

$$x(t) = f(t) + \alpha(t)\int_a^t f(s)\beta(s)ds + \alpha(t)\int_a^t\left(\int_a^s f(\xi)\beta(\xi)d\xi\right)\alpha(s)\beta(s)h^*(t,s)ds\,,$$

де

$$h^*(t,s) = E_N\left(\prod_{j=1}^N L_j(t^j) - L_j(s^j)\right),\ E_N(t^i) = \sum_{i=1}^\infty \frac{t^i}{(i!)^N},$$

$$L_j(t^j) = \int_{a^j}^{t^j}\alpha_j(s)\beta_j(s)ds \quad \left(a \le s \le t \le b, \quad j = \overline{1,N}\right).$$

Нехай $g(t,s) = \min\limits_{t,s\in[a,b]}(\alpha(t),\beta(t)) = -g_1$. Якщо $g_1 \ge 0$, нерівності (14) матимуть вигляд

$$u(t) \le f(t) + \alpha(t)\int_a^t \beta(s)u(s)ds - g_1\int_a^t (v(s) - u(s))ds,$$

$$v(t) \ge f(t) + \alpha(t)\int_a^t \beta(s)v(s)ds + g_1\int_a^t (v(s) - u(s))ds,$$

з яких випливає оцінка

$$u(t) \le x(t) = f(t) + \alpha(t)\int_a^t f(s)\beta(s)ds + \alpha(t)\int_a^t\left(\int_a^s f(\xi)\beta(\xi)d\xi\right)\alpha(s)\beta(s)h^*(t,s)ds \le v(t)\,. \tag{19}$$

Нерівності (18) можна розглядати як узагальнення нерівностей Гроноулла для $N \ge 1$.

Приклад 3. Нехай функція $f(t) = f(t^1)\times\dots\times f(t^N)$ задовольняє умову при $t \in [a,b]$

$$\frac{\partial^N f(t^1,\dots,t^N)}{\partial t^1\dots\partial t^N} \le 0\,, \tag{20}$$

$\beta(t)$ – неперервна невід’ємна на $[a,b]$, $g(x)$ – неперервна строго додатна неспадна функція і нехай існує N раз неперервно диференційована строго зростаюча функція $G(z)$ така, що

$$\frac{\partial^N G(z)}{\partial t^1\dots\partial t^N} \le \frac{1}{g(z)}\frac{\partial^N z(t^1,\dots,t^N)}{\partial t^1\dots\partial t^N}\,. \tag{21}$$

Тоді для будь-якого неперервного на $[a,b]$ розв’язку $u(t^1,\dots,t^N)$ нерівності

$$u(t^1,\dots,t^N) \le f(t^1,\dots,t^N) + \int_{a^1}^{t^1}\dots\int_{a^N}^{t^N}\beta(s^1,\dots,s^N)g(u(s^1,\dots,s^N))ds^1\dots ds^N \tag{22}$$

правдива оцінка

$$u(t^1,\dots,t^N) \le G^{-1}\left[G(c) + \int_{a^1}^{t^1}\dots\int_{a^N}^{t^N}\beta(s^1,\dots,s^N)ds^1\dots ds^N\right], \tag{23}$$

якщо тільки вираз в квадратних дужках належить області визначення функції $G^{-1}(z)$, оберненої до $G(z)$.

Дійсно, розглядаючи рівняння

$$z\left(t^1,\ldots,t^N\right)= f\left(t^1,\ldots,t^N\right)+\int\limits_{a^1}^{t^1}\ldots\int\limits_{a^N}^{t^N}\beta\left(s^1,\ldots,s^N\right)g\left(z\left(s^1,\ldots,s^N\right)\right)ds^1\ldots ds^N \quad (24)$$

і диференціюючи його m разів та використовуючи умови (20), (21), маємо

$$\frac{\partial^N G(z)}{\partial t^1\ldots\partial t^N}\le \beta\left(t^1,\ldots,t^N\right).$$

Інтегруючи останню нерівність N раз, приходимо до нерівності

$$z\left(t^1,\ldots,t^N\right)\le G^{-1}\left[G(c)+\int\limits_{a^1}^{t^1}\ldots\int\limits_{a^N}^{t^N}\beta\left(s^1,\ldots,s^N\right)ds^1\ldots ds^N\right]. \quad (25)$$

Оскільки з **теореми 2** (див. також теорему 3 із [3]) $u(t)\le z(t)$, то робимо висновок, що правдива нерівність (23).

1. Бондаренко В.А. Интегральные неравенства для уравнения Вольтерра в банаховом пространстве с конусом // Мат. заметки. 1971. 9. № 3. С. 151–160. 2. Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применение. К., 1980. 3. Шувар Б.А., Копач М.И. О двусторонних интегральных неравенствах типа Вольтерра со многими независимыми переменными // Укр. мат. журн. 1981. Т. 33. № 6. С. 848–853. 4. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.,1965. 5. Walter W. Differential and integral inequalities. Berlin, 1970. 6. Gutowski R. Etude d'une inequalite integrale nonlineare en deux variables // Ann. pol. math. 1977. 35, № 3. P.247–252.

УДК 517.9+538.8

Кравець В.І., Пилипів В.М.
Прикарпатський університет ім. В. Стефаника, Ів.-Франківськ

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОФІЛІВ ДЕФОРМАЦІЇ ПОВЕРХНЕВИХ ШАРІВ МОНОКРИСТАЛІВ

The paper considers the Takagi differential equations for simulating the deformation profiles of the surface layers of monocrystals applying the dynamic theory of X-rays waves scattering. The correspondent correlation of the calculated theoretical models with experimental curves of the diffraction reflection has been obtained.

Розглянуто використання диференціальних рівнянь Такагі для моделювання профілів деформації поверхневих шарів монокристалів на основі динамічної теорії розсіювання рентгенівських хвиль. Отримано відповідну кореляцію розрахованих теоретичних моделей із експериментальними кривими дифракційного відбивання.