Кон В.Г. Динамическое рассеяние рентгеновских лучей в несовершенных кристаллах. (Препр.№1890 / Ин–т атомной энергии). М., 1969. 4. Kohn V.G., Kovalchuk M.V. On the Theory of External Photoeffect Accompanying X – Ray Diffraction in an Ideal Crystal with Disturbed Surface Layer // Phys. Stat. Sol. A. 1981. V.64, №2. P.359 – 366. 5. Ковальчук М.В., Кон В.Г., Лобанович Э.Ф. Измерение малых деформаций в тонких эпитаксиальных пленках кремния методом фотоэлектронной эмиссии, возбужденной стоячей рентгеновской волной // ФТТ. 1985. Т.27. С. 3379–3387. 6. Остафийчук Б.К., Кравец В.И., Олиховский С.И., Василишин Б.В. Определение профиля деформации в ионно–имплантированных монокристаллах со структурой граната // Металлофизика. 1991. Т.13. № 2. С. 81–87.

УДК 517.946

Крехівський В.В.
Чернівецький державний університет ім. Ю. Федьковича

ГРАНИЧНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ З ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ, ЗАЛЕЖНИХ ВІД ПАРАМЕТРА

The model boundary value problem for linear elliptical systems with Bessel operator is investihated. The systems coefficients contain a degree parameter.

Вивчено модельну крайову задачу для лінійних еліптичних систем з оператором Бесселя, коефіцієнти яких степеневим чином містять параметр.

В працях М.С. Агроновича і М.І. Вішика [1] розглянуто загальні граничні задачі для еліптичних систем і вивчені граничні задачі еліптичних рівнянь з оператором Бесселя, які спеціальним чином містять параметр [2]. В даній статті вивчаються аналогічні граничні задачі еліптичних систем з оператором Бесселя.

I. Нехай R_{n+1}^{+} – півпростір $y>0$ евклідового $(n+1)$ – вимірного простору R_{n+1} точок (y,x), $\left(x=\left(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n\right)=\left(x',x_n\right)\right)$. R_{n+1}^{++} – четвертина простору $y>0$, $x>0$. Число l скрізь вважаємо цілим невід'ємним.

Простір $\mathrm{H}_l\left(R_{n+1}^{+}\right)$ визначається як поповнення звужень на R_{n+1}^{+} простору $\widetilde{C}_0^{\infty}\left(R_{n+1}\right)$ нескінченногладких комплекснозначних фінітних парних по y функцій $u(y,x)$ за нормою

$$\|u\|_{l,R_{n+1}^{+}}=\left\{\sum_{|\alpha|+2s\le l}\int_{R_{n+1}^{+}}\left|D_x^{\alpha}B^{s}u(y,x)\right|^2\cdot y^{2\gamma+1}dydx\right\}^{1/2}, \qquad (1)$$

де $D^{\alpha}=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$, $D_k=-i\dfrac{\partial}{\partial x_k}$, $B^s=B\left(B^{s-1}\right)$, $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n,\ \alpha_k\ge 0$, $\gamma>-\dfrac{1}{2}$,

$B=-\left(\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{2\gamma+1}{y}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ – оператор Бесселя.

Простір $\mathrm{H}_l\left(R_{n+1}^{++}\right)$ визначається як поповнення звужень на R_{n+1}^{++} нескінченногладких фінітних в R_{n+1} парних по y функцій за нормою

$$\|u\|_{l,R_{n+1}^{++}}=\left\{\sum_{|\alpha|+2s\le l}\int_{R_{n+1}^{++}}\left|D_x^{\alpha}B^s u(y,x)\right|^2\cdot y^{2\gamma+1}dydx\right\}^{1/2}. \qquad (2)$$

Дані простори вивчені в [3]. Норма (1) еквівалентна нормі

$$\|u\|_{l,R_{n+1}^{+}}=\left\{\int_{R_{n+1}^{+}}\left(1+\eta^{2l}+|\xi|^{2l}\right)\|F_B[u]\|^2\cdot\eta^{2\gamma+1}d\eta d\xi\right\}^{1/2}, \qquad (3)$$

де $\eta>0$, $\xi=\left(\xi_1,\ldots\xi_n\right)\in R_n$, $F_B[u(y,x)]$ – перетворення Фур’є-Бесселя функції $u(y,x)$ [3], [2].

Для функції $u(y,x)\in\mathrm{H}_l\left(R_{n+1}^{+}\right)$ $\left(l>1/2\right)$ існує її слід $u(y,x',0)\in\mathrm{H}_{l-1/2}\left(R_n^{+}\right)$ на гіперплощині $x_n=0$ і задовольняє нерівність

$$\|u(y,x',0)\|'_{l-1/2}\le C\|u(y,x',x_n)\|_{l,R_{n+1}^{++}}, \qquad (4)$$

де через $\|\cdot\|'$ позначена норма з інтервалом по гіперплощині $x_n=0,\ y>0$ за аналогією до (1) або (3).

Вивчаючи еліптичні задачі, залежні від числового комплексного параметра q, зручно користуватися нормами, залежними від даного параметра.

Приймемо як в [1], [2]

$$|||u|||_l^2=\|u\|_l^2+|q|^{2l}\|u\|_0^2. \qquad (5)$$

Тоді мають місце нерівності [2]

$$|||u|||_{l,R_{n+1}^{++}}\le C|||u|||_{l,R_{n+1}^{+}};\quad |||u|||_{l,R_{n+1}^{+}}\le C_1|||u|||_{l,R_{n+1}^{++}};\quad |||u|||'_{l-1/2}\le C_2|||u|||_{l,R_{n+1}^{+}}\quad\left(l>1/2\right). \qquad (6)$$

Оператор $D_x^{\alpha}B^s$ є лінійним обмеженим оператором із $\mathrm{H}_{l+|\alpha|+2s}$ в H_l.

Нехай $U(y,x)$ – вектор-стовпець висоти N. Позначимо його $U=\left(u_1,\ldots u_N(y,x)\right)^T$. Через H_l будемо позначати прямий добуток N (скалярних) просторів H_l. Норму в H_l визначаємо так

$$\|U\|_l\equiv\|U\|_{H_l}=\left\{\|u_1\|_l^2+\cdots+\|u_N\|_l^2\right\}^{1/2};\quad |||U|||_l\equiv|||U|||_{H_l}=\left\{\|U\|_{H_l}^2+|q|^{2l}\|U\|_{\mathrm{H}_0}^2\right\}^{1/2}. \qquad (7)$$

Як і в [1], [2], легко доводяться нерівності

$$|q|^{l-k}\|U\|_k\le C_{kl}\left\{\|U\|_l+|q|^l\|U\|_0\right\};\qquad |q|^{1/2}\|U\|'_0\le C\left\{\|U\|_1+|q|^l\|U\|_0\right\}. \qquad (8)$$

II. В R_{n+1}^{+} розглянемо систему рівнянь з комплексними коефіцієнтами

$$L(y,x;B,D,q)\,U(y,x)=f(y,x). \tag{9}$$

Тут U i f вектор-стовпці висоти N; $L=\left(L_{ij}(y,x;B,D,q)\right)-$ квадратна матриця порядку $N\times N$,

$$L_{ij}\left(y,x;B,D,q\right)=\sum_{|\alpha|+k+2s=r} a_{\alpha ks}^{ij}(y,x)q^{k}D^{\alpha}B^{s}. \tag{10}$$

Параметр q змінюється в замкнутому куті Q комплексної площини з вершиною в початку координат $Q=\left\{q,\ \mu_1\le\arg q\le\mu_2,\ \mu_1\le\mu_2\right\}$.

Твердження 1. Нехай $l\ge r,$ коефіцієнти системи (9) достатньо гладкі, з обмеженими в R_{n+1}^{+} похідними до порядку $l-r$ і задовольняють умови

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{s_1}B^{s_2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{s_3}a_{\alpha ks}^{ij}(y,x)\right|\le C_{0,}\ \ 0\le s_1+s_2+s_3\le l-r-1 \tag{11}$$

в околі гіперплощини $y=0.$

Тоді оператор $L\left(y,x;B,D,q\right)$ обмежено діє із $H_l\left(R_{n+1}^{+}\right)$ в $H_{l-r}\left(R_{n+1}^{+}\right)$ і має місце оцінка

$$\left\|LU\right\|_{H_l}\le C\left\|U\right\|_{H_{l-r}}\left(R_{n+1}^{+}\right). \tag{12}$$

Твердження випливає із ітераційних нерівностей (8) і (11).

Накладемо на коефіцієнти оператора L додаткові обмеження.

Умова 1. *Якщо* $(y,x)\in R_{n+1}^{+},$ $q\in Q,$ $|\eta|+|\xi|+|q|\ne 0$ *визначник системи* det $L\left(y,x;\eta^2,\xi,q\right)\ne 0.$

Із умови 1 випливає парність числа $N\cdot r$ і те, що рівняння

$$L\left(\eta^2,\xi+\lambda\xi^0,q\right)=0, \tag{13}$$

де $\xi^0\ne 0$ і вектор ξ ортогональний до ξ^0 відносно λ має точно $\frac{1}{2}N\cdot r$ коренів у верхній комплексній півплощині і стільки ж у нижній.

Розглянемо тепер модельні задачі для еліптичних систем з оператором Бесселя, які спеціальним чином містять параметр q. Коефіцієнти системи сталі.

Теорема 1. Нехай виконується умова 1 і $l\ge r$. Тоді при ненульових $q\in Q$ для довільних $f\in H_{l-r}\left(R_{n+1}^{+}\right)$ існує єдиний розв'язок $U\in H_l\left(R_{n+1}^{+}\right)$ рівняння

$$L(B,D,q)U(y,x)=f(y,x). \tag{9^0}$$

Для $|q|\ge q_0$ (де q_0 – довільне додатне число) існує апріорна оцінка

$$\left\|U\right\|_{H_l}\le C\left\|f\right\|_{H_{l-r}}, \tag{14}$$

де C не залежить від q i f.

Здійснивши перетворення Фур'є – Бесселя над (9^0) і використавши умову 1, одержуємо апріорну оцінку (14); а формула

$$U = Rf = F_B^{-1}\left[\left(L\left(\eta^2,\xi,q\right)\right)^{-1}\cdot F_B[f]\right] \tag{15}$$

при $0\neq q\in Q$ визначає для $f\in H_{l-r}\left(R_{n+1}^{+}\right)$ розв'язок системи (9^0).

III. Розглянемо модельну граничну задачу в R_{n+1}^{++}

$$L(B,D,q)U = f(y,x),\qquad (y,x)\in R_{n+1}^{++} \tag{16}$$

$$A_\nu(B,D,q)U\Big|_{x_n=0} = g_\nu(y,x'),\quad 0<y<\infty,\ x'\in R_{n-1},\ \nu=1,2,\ldots,p. \tag{17}$$

де A_ν – рядок довжини N елементів, які складаються з диференціальних виразів

$$A_\nu^j = \sum_{|\alpha|+k+2s=m_\nu} b_{r\alpha s}^{\nu,j} q^k D^\alpha B^s,\quad j=1,2,\ldots,N.$$

Позначимо $l_0=\max(r,m_\nu+1)$. Із задачею (16), (17) зв'язуємо оператор

$$\mathbf{L}U = \left\{LU, A_1U\Big|_{x_n=0},\ldots,A_pU\Big|_{x_n=0}\right\}. \tag{18}$$

Твердження 2. Нехай $l\geq l_0$. Оператор $\mathbf{L}$ обмежено діє із $H_l\left(R_{n+1}^{++}\right)$в прямий добуток просторів $H_{l-r}\left(R_{n+1}^{++}\right)$ і $H_{l-m_\nu-\frac{1}{2}}\left(R_n^{+}\right)$ і має місце нерівність

$$\|f\|_{l-r} + \sum_{\nu=1}^{p}\|g_\nu\|'_{l-m_\nu-\frac{1}{2}} \leq C\|U\|_{l,R_{n+1}^{++}}, \tag{19}$$

де $\|\cdot\|'$ - норма в граничній площині $R_n^{+}=\left\{(y,x'),\ x'\in R_{n-1},\ y>0\right\}$.

Доведення аналогічне доведенню твердження 3.1 в [2].

Умова 2. Розглянемо задачу на напівпрямій, яка відповідає задачі (16), (17)

$$L\left(\eta^2,\xi',-i\frac{d}{dx_n},q\right)W(x_n)=0,\ x_n>0 \tag{20}$$

$$A_\nu\left(\eta^2,\xi',-i\frac{d}{dx_n},q\right)W(x_m)\Big|_{x_n=0} = h_\nu,\ \nu=1,\ldots,p. \tag{21}$$

Якщо $|\eta|+|\xi'|+|q|\neq 0,\ q\in Q$, задача (20), (21) при довільних h_ν має єдиний розв'язок в класі стійких при $x_n\to\infty$ розв'язків системи (20).

Нехай виконуються умова 1 і умова 2. Позначимо простір стійких розв'язків системи (20) через M_L. Тоді $N\cdot r$ – парне і базис простору M_L стійких розв'язків системи (20) має $\frac{1}{2}N\cdot r$ елементів. Граничних умов (21) буде $p=\frac{1}{2}N\cdot r$.

Теорема 2. Нехай $l\geq l_0$ і виконуються умова 1 і умова 2. Тоді при достатньо великих за модулем $q\in Q$ для $\forall\ f\in H_l\left(R_{n+1}^{++}\right)$ i $g_\nu\in H_{l-m_\nu-\frac{1}{2}}\left(R_n^{+}\right)$ існує єдиний розв'язок задачі

(16), (17) $u \in H_l\left(R_{n+1}^{++}\right)$. Якщо $|q| \geq q_0$, має місце оцінка

$$\|U\|_{l,R_{n+1}^{++}} \leq C\left\{\|f\|_{l,R_{n+1}^{++}} + \sum_{\nu=1}^{p} \|g_\nu\|'_{l-m_\nu-\frac{1}{2},R_n^{+}}\right\},$$

де стала C не залежить від q.

1. Агронович И.С., Вишик М.И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. Успехи мат.наук. 1964. 19. Вып. 3. С. 53–162. 2. Крехивский В.В. Эллиптические задачи с оператором Бесселя // Линейные краевые задачи математической физики: Темат. сборник. К., 1973. С. 307–322. 3. Киприянов И.А. Преобразование Фурье–Бесселя и теоремы вложения для весовых классов // Труды Моск. мат. о-ва. 1967. 89. С.130-213.

УДК 517.95

Лавренюк С.П., Процах Н.П.
Львівський національний університет ім.І.Франка

ВНУТРІШНЯ ГЛАДКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОЇ СИСТЕМИ З ВИРОДЖЕННЯМ

Some sufficient conditions, for which the derivatives on t of the solution till s-th power, $s \in N$ and the derivatives on x_i, $i = 1,\ldots,n$ till r-th power, $r \in N$ exists are obtained for mixed problem for one evolutional degenerative system inside the noncylindrical domain Q.

Для однієї еволюційної системи з виродженням в нециліндричній області отримано умови, при яких існують похідні узагальненого розв'язку за змінною t до порядку s, $s \in N$, та за змінними x_i, $i = 1,\ldots,n$ до порядку r $r \in$ N.

Нехай Q – обмежена область в R^{n+1}, $\Omega_\tau = Q \bigcap \{t = \tau\}$ така, що mes $\Omega_\tau > 0$; $\tau \in [0,T]$; $\Omega_{\tau_1} \subset \Omega_{\tau_2}$ якщо $\tau_1 \leq \tau_2$. Позначимо $S = \bigcup_{\tau \in (0,T)} \partial\Omega_\tau$, ϑ_t – кут між поверхнею S і віссю t. Припустимо, що $S \in C^1$, ϑ_t ? 0.

Розглянемо в області Q систему рівнянь

$$(\Phi(x,t)u_t)_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u\right) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(B_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u_t\right) +$$
$$+ \sum_{1\leq|\alpha|\leq m} G_\alpha(x,t) D^\alpha u + \sum_{1\leq|\alpha|\leq m} C_\alpha(x,t) D^\alpha u_t = \sum_{|\alpha|\leq p} (-1)^{|\alpha|} F_\alpha(x,t), \quad (1)$$

з крайовими умовами