

Лазурчак І.І., Бандирський Б.Й.\*

Дрогобицький педагогічний університет

\*НУ “Львівська політехніка”, кафедра обчислювальної математики і програмування

## АНАЛІЗ МЕТОДІВ ЗНАХОДЖЕННЯ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ДЛЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З ПЕРІОДИЧНИМИ УМОВАМИ

© Лазурчак І.І., Бандирський Б.Й., 2000

**Numerical-analytical methods of finding eigen values of the boundary problem with periodical conditions and eigen parameter in one of the boundary conditions for ordinary differential equations of the second order are analysed.**

**Проаналізовано чисельно-аналітичні методи знаходження власних значень крайової задачі з періодичними умовами та власним параметром в одній з крайових умов для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.**

Розглядається задача на власні значення з періодичними крайовими умовами для звичайного диференціального рівняння (ЗДР) другого порядку

$$y''(x) + [\lambda - q(x)]y(x) = 0, x \in (0,1), \quad (1)$$

$$y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1). \quad (2)$$

Якщо  $q(x)$  – кусково-стала або ж кусково-лінійна функція, то можна знайти точний розв’язок задачі (1), (2). Зокрема, при  $q(x)=x$  розв’язок можна подати у вигляді лінійної комбінації двох циліндричних функцій Бесселя  $J_{\pm\nu}(z)$ , ( $\nu = 1/3$ ), (або  $J_\nu(z)$ ,  $Y_\nu(z)$ ) [1].

$$u_n(x) = \sqrt{\lambda_n - x} \left\{ c_1 J_{\frac{1}{3}} \left[ \frac{2}{3} (\lambda_n - x)^{\frac{3}{2}} \right] + c_2 J_{-\frac{1}{3}} \left[ \frac{2}{3} (\lambda_n - x)^{\frac{3}{2}} \right] \right\}$$

Виходячи із крайових умов (2) та вимоги існування нетривіальних розв’язків  $c_1, c_2$  отриманої однорідної системи рівнянь, приходимо до характеристичного рівняння

$$\begin{aligned} \Delta_B(\lambda_n) \equiv & \left[ J_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} \lambda_n^{\frac{3}{2}} \right) - J_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} (\lambda - 1)^{\frac{3}{2}} \right) \right] \cdot \\ & \cdot \left\{ \left[ \sqrt{\lambda_n - x} J_{-\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} (\lambda - x)^{\frac{3}{2}} \right) \right]'_{x=0} - \left[ \sqrt{\lambda_n - x} J_{-\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} (\lambda - x)^{\frac{3}{2}} \right) \right]'_{x=1} \right\} - \\ & - \left[ J_{-\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} \lambda_n^{\frac{3}{2}} \right) - J_{-\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} (\lambda - 1)^{\frac{3}{2}} \right) \right] \cdot \\ & \cdot \left\{ \left[ \sqrt{\lambda_n - x} J_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} (\lambda - x)^{\frac{3}{2}} \right) \right]'_{x=0} - \left[ \sqrt{\lambda_n - x} J_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} (\lambda - x)^{\frac{3}{2}} \right) \right]'_{x=1} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для  $n > 0$  підкореневі вирази  $\lambda_n - x > 0$  і розв’язки рівняння (3) – це пари близьких між собою дійсних власних значень, які при  $n \rightarrow \infty$  збігаються. Якщо вказаний підкореневий вираз  $\lambda_n - x$  набуває від’ємних значень, то він береться за абсолютною

величиною, а функції Бесселя 1-роду  $J_{\pm\nu}(z)$  замінюються на модифіковані циліндричні функції  $I_{\pm\nu}$ . Аналітичне представлення рівняння (3) та його розв'язування можливе лише в середовищі систем символічної математики (с.с.м.) (Maple V, Mathematica 2.2, 3.0 і т.п.). Проте обчислення циліндричних функцій  $J_{\pm\nu}(z)$  при великих значеннях аргумента  $z$  і застосування внутрішніх процедур **BesselJ** приводить до досить великої розбіжності чисельних результатів порівняно з їх асимптотичними розкладами [1] ( $\Delta_{abs.} \approx 10^{-6} - 10^{-8}$ ). Ця обставина приводить до того, що корені рівняння (3) навіть при заданні великої розрядності (Digits=36 в с.с.м. Maple V, Working Precision  $\rightarrow$  36 в с.с.м. Mathematica 3.0), високої глобальної точності (AccuracyGoal  $\rightarrow$  24) і максимальної кількості ітерацій (MaxIterations=500) не забезпечують необхідної точності вихідного результату.

У зв'язку з цим пропонуються ще два способи знаходження власних значень задачі (1),(2) з довільно високою точністю та гарантованою кількістю правильних значущих цифр. Перший з них передбачає представлення власної функції  $u_n(x)$  у вигляді комбінації двох базових функцій

$$u_n(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x),$$

де  $v_\alpha(x)$ , ( $\alpha = 1,2$ ) розв'язки відповідних однорідних задач Коші

$$v_\alpha''(x) + (\lambda - q(x))v_\alpha(x) = 0, \quad (4)$$

$$v_1(0) = 0, \quad v_2(0) = 1, \quad (5)$$

$$v_1'(0) = 1, \quad v_2'(0) = 0.$$

Своєю чергою ЗДР – 2 порядку (4) зводиться до двох систем з двох ЗДР- першого порядку введенням допоміжних функцій  $w_\alpha(x) = u_\alpha'(x)$ , ( $\alpha = 1,2$ )

$$u_\alpha'(x) - w_\alpha(x) = 0, \quad (6)$$

$$w_\alpha'(x) + (\lambda - q(x))u_\alpha(x) = 0.$$

Виходячи з крайових умов (2) та враховуючи початкові умови (5), будемо однорідну систему алгебраїчних рівнянь, нетривіальні розв'язки якої (коефіцієнти  $c_1, c_2$ ) знаходять з умови

$$\Delta_K(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} v_1(1) & v_2(1) - 1 \\ w_1(1) - 1 & w_2(1) \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Співвідношення (7) – це рівняння, з якого і визначаються точні власні значення  $\lambda_n^T$ . Використовуючи в середовищі Maple-V процедуру **solve(...,type=numeric, 'abserr'='10^(-m),...)** для чисельного розв'язування системи двох ЗДР методами Рунге-Кутта-Фельберга 4-5 порядків із заданою абсолютною точністю ( $m=14, \dots, 16$ ), знаходять розв'язки задач (6)  $v_\alpha(1), w_\alpha(1)$  при різних фіксованих значеннях  $\lambda_n$ . За зміною знака нев'язки  $\Delta_K(\lambda_n)$  локалізують інтервали існування ізольованих коренів рівняння (7), після чого для отримання необхідної точності можна застосувати метод бінарного поділу. Значення системної змінної **Digits** повинно бути не меншим за **m+1**.

Другий спосіб передбачає застосування триточкової різницевої схеми другого порядку апроксимації [2]. У вузлах рівномірної сітки  $\omega_N = \{ih, i = \overline{0, N}, h = 1/N\}$  другі та

перші похідні задачі (1), (2) апроксимуються відповідно центральними та право- і лівосторонніми скінченними різницями

$$y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2), \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$y_0' = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + O(h^2),$$

$$y_n' = \frac{1}{2h}(3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}) + O(h^2),$$

де прийнято позначення  $y_i \equiv y(x_i)$ .

В результаті отримуємо однорідну систему рівнянь, для знаходження нетривіального розв'язку якої необхідно розв'язати характеристичне рівняння

$$\Delta_R(\lambda_n) = 0. \quad (8)$$

де  $\Delta_R(\lambda_n)$  – детермінант матриці розмірності  $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ , яка має майже тридіагональну форму (за винятком елемента  $a_{1,N} = 1/h^2$  та останнього рядка, де  $a_{N,1} = a_{N,N-1} = 4$ ,  $a_{N,2} = a_{N,N-2} = -1$ ,  $a_{N,N} = -6$ ). Вносячи множник  $1/h^2$ , можна добитися, щоб над- та під-діагональні елементи, а також  $a_{N,N}$  набирали значення 1. Отже, в пам'яті ПЕОМ достатньо зберігати лише два вектори

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}} &= (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{N-1}), & \text{де } \tilde{a}_i &= a_{ii} = (\lambda - \bar{q}_i)h^2 - 2, \\ \mathbf{b} &= (4, -1, -1, 4, -6), \end{aligned}$$

а в розробленій послідовності рекурентних формул уникнути двох операцій множення.

Розкладаючи характеристичний визначник  $\Delta_R(\lambda_n)$  по останньому рядку, отримаємо алгебраїчні доповнення у вигляді детермінантів трикутних матриць (в яких, до того ж, головна діагональ - одинична) та тридіагональних матриць  $N-3$ ,  $N-2$  та  $N-1$  порядків. Побудовані розрахункові формули

$$\Delta_R(\lambda_n) = \sum_{i=1}^5 b_i \tilde{A}_{N,i}, \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{N,1} &= (-1)^{N+1} - A_{2,N-1}, \\ \tilde{A}_{N,2} &= (-1)^N a_1 + A_{3,N-1}, \\ \tilde{A}_{N,3} &= (-1)^N \tilde{a}_{N-1} + A_{1,N-3}, \\ \tilde{A}_{N,4} &= (-1)^{N+1} - A_{1,N-2}, \\ \tilde{A}_{N,5} &= A_{1,N-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для обчислення перших двох алгебраїчних доповнень можна застосувати рекурентні формули типу “прогонки назад”

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_k &= \tilde{a}_k \hat{\Delta}_{k+1} - \hat{\Delta}_{k+2}, & k &= N-2, N-3, \dots, 3, \\ \hat{\Delta}_{N-1} &= \tilde{a}_{N-1}, & \hat{\Delta}_N &= 1, \end{aligned}$$

$$A_{3,N-1} = \hat{\Delta}_3, \quad (11)$$

$$A_{2,N-1} = \tilde{a}_2 \hat{\Delta}_3 - \hat{\Delta}_4,$$

а для останніх трьох – рекурентні формули типу “прогонки вперед”

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \tilde{a}_k \Delta_{k-1} - \Delta_{k-2}, \quad k=2,\dots,N-3, \\ \Delta_1 &= \tilde{a}_1, \quad \Delta_0 = 1, \end{aligned} \quad (12)$$

$$A_{1,N-3} = \Delta_{N-3},$$

$$A_{1,N-2} = \tilde{a}_{N-2} A_{1,N-3} - \Delta_{N-4},$$

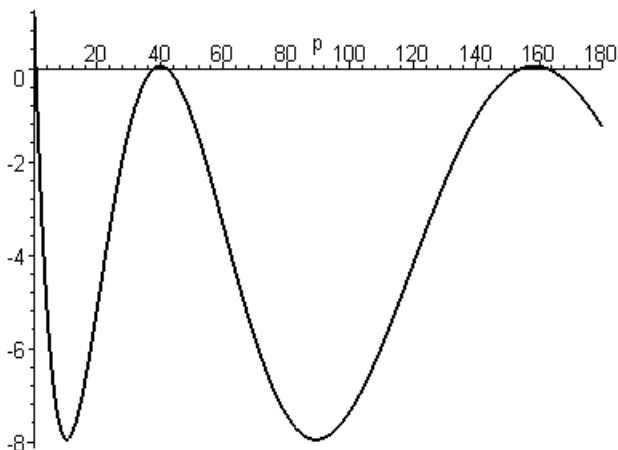
$$A_{1,N-1} = \tilde{a}_{N-1} A_{1,N-2} - \Delta_{N-3}.$$

Як видно, обчислення визначників  $\Delta_{N-3}$  та  $\hat{\Delta}_3$  можна організувати в одному циклі, на кожному кроці якого будуть виконуватись по дві операції множення і віднімання.

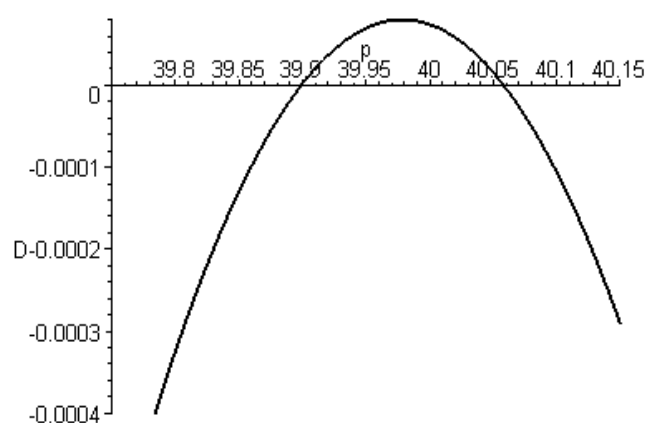
Звичайна ж схема обчислення п'яти визначників (N-2), (N-1)-го порядків вимагала б на одному кроці 15-ти арифметичних операцій множення і 5-ти операцій віднімання. Зрозуміло, що запропонована схема суттєво зменшує процесорний час, необхідний об'єм оперативної пам'яті та похибку заокруглення.

Розрахункові формули (9)-(12) та розв'язування р-ня (8) реалізовані для  $\mathbf{q}(\mathbf{x})=\mathbf{x}$ , в середовищі Maple V (Release 5) [3]. Засоби системи дають змогу досягти не тільки гарантованої точності результатів (порядку  $O(N^{-2})$ ), а й графічне зображення функцій  $\Delta_R(\lambda_n)$  (внаслідок можливості її аналітичного представлення), що дозволяє достатньо просто локалізувати інтервали існування та єдиності коренів  $\lambda_n$ .

На рисунку зображені графіки залежності  $\Delta_R(\lambda_n)$  на різних інтервалах. Як видно з рисунка б, власні значення  $\lambda_n$ , починаючи з  $n=1$ , йдуть парами і збігаються при  $n \rightarrow \infty$



а



б

Графіки функції  $y = \Delta_R(\lambda_n)$ : а –  $n=0,1,2,3,4$ ; б –  $n=1,2$

У таблиці наведені чисельні розрахунки молодших п'яти власних значень, отриманих описаними вище трьома різними способами.

**Власні значення, отримані через В-функції Бесселя, К-задачі Коші,  
R-різницеві схеми (N=131032)**

n	$\lambda_0/4\pi^2$	$\lambda_1/4\pi^2$	$\lambda_2/4\pi^2$	$\lambda_3/4\pi^2$	$\lambda_4/4\pi^2$
<b>B</b>	0.012629967834	1.00917494338	1.01615770591	4.01092206201	4.01441339381
<b>K</b>	0.012629967835	1.01065870049	1.01469020265	4.01166037417	4.01367609743
<b>R</b>	0.012629967834	1.01065870029	1.01469020246	4.01166037110	4.01367609438

Вказані способи можна успішно застосувати для інших крайових задач з умовами Неймана, з власним параметром в одній із крайових умов тощо, наприклад

$$y'(0) = 0, \quad y'(1) - \lambda y(1) = 0.$$

Тоді, зокрема, рівняння (7) набуде вигляду

$$\Delta_K(\lambda) \equiv w_2(1) - \lambda v_2(1) = 0,$$

а вектор **b** в різницевій схемі буде мати лише три ненульові елементи.

Треба відзначити, що наближені власні значення, отримані за допомогою функціонально-дискретного методу в [4], добре узгоджуються з наведеними в таблиці (способи K і R) результатами.

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., 1974. Т.1,2. 2. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., 1983. 3. Дьяконов В.П. Математическая система MAPLE V R3/R4/R5. М., 1998. 4. Бандырский Б.И., Макаров В.Л., Уханёв О.Л. Достаточные условия сходимости неклассических асимптотических разложений для задачи Штурма-Лиувилля с периодическими условиями // Дифференц. уравнения. 1999. Т.35. № 3. С.45–60.

УДК 517.524

Лозинська В.Я.  
ІППММ НАН України

## ЗГОРТКА ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є НА ПРОСТОРАХ ВЕКТОРНОЗНАЧНИХ ФУНКЦІЙ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ

© Лозинська В.Я., 2000

**It is introduced spaces of vector valued functions of exponential type  $E_{1,v}(R^n, X)$ . Some properties of such spaces, related to its tensor product structure and properties of convolutions and Fourier transform are described.**

**Введено простори векторнозначних функцій експоненціального типу  $E_{1,v}(R^n, X)$ . Описано властивості таких просторів, що пов'язані із зображенням їх у вигляді проективного тензорного добутку, а також деякі властивості згортки і перетворення Фур'є.**