Власні значення, отримані через B-функції Бесселя, K-задачі Коші, R-різницеві схеми (N=131032)

n	$\lambda_0/4\pi^2$	$\lambda_1/4\pi^2$	$\lambda_2/4\pi^2$	$\lambda_3/4\pi^2$	$\lambda_4/4\pi^2$
B	0.012629967834	1.00917494338	1.01615770591	4.01092206201	4.01441339381
K	0.012629967835	1.01065870049	1.01469020265	4.01166037417	4.01367609743
R	0.012629967834	1.01065870029	1.01469020246	4.01166037110	4.01367609438

Вказані способи можна успішно застосувати для інших крайових задач з умовами Неймана, з власним параметром в одній із крайових умов тощо, наприклад

$$y'(0)=0, \quad y'(1)-\lambda y(1)=0.$$

Тоді, зокрема, рівняння (7) набуде вигляду

$$\Delta_K(\lambda) \equiv w_2(1)-\lambda v_2(1)=0,$$

а вектор $\mathbf{b}$ в різницевій схемі буде мати лише три ненульові елементи.

Треба відзначити, що наближені власні значення, отримані за допомогою функціонально-дискретного методу в [4], добре узгоджуються з наведеними в таблиці (способи K і R) результатами.

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., 1974. Т.1,2. 2. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., 1983. 3. Дьяконов В.П. Математическая система MAPLE V R3/R4/R5. М., 1998. 4. Бандырский Б.И., Макаров В.Л., Уханёв О.Л. Достаточные условия сходимости неклассических асимптотических разложений для задачи Штурма-Лиувилля с периодическими условиями // Дифференц. уравнения. 1999. Т.35. № 3. С.45–60.

УДК 517.524

Лозинська В.Я.
ІППММ НАН України

ЗГОРТКА ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є НА ПРОСТОРАХ ВЕКТОРНОЗНАЧНИХ ФУНКЦІЙ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ

It is introduced spaces of vector valued functions of exponential type $E_{1,v}(R^n, X)$. Some properties of such spaces, related to its thensor product structure and properties of convolutions and Fourier transform are described.

Введено простори векторнозначних функцій експоненціального типу $E_{1,v}(R^n, X)$. Описано властивості таких просторів, що пов'язані із зображенням їх у вигляді проективного тензорного добутку, а також деякі властивості згортки і перетворення Фур'є.

У комплексному банаховому просторі $L_1 = L_1(R^n)$ розглянемо оператори $D^k = D_1^{k_1}\dots D_n^{k_n}$, де $D_j \equiv {-i\partial}/{\partial t_j}$ $(\forall j = 1,\dots,n)$ та $k = (k_1,\dots,k_n) \in Z_+^n$. Будь-якому вектору $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_n)$ такому, що $\nu_j > 0$ $(\forall j = 1,\dots,n)$ будемо ставити у відповідність підпростір функцій

$$E_{1,\nu} \equiv \left\{ \varphi(t) \in \bigcap_{|k|=1}^{\infty} dom(D^k) : \|\varphi\|_{1,\nu} \equiv \sup_{k \in Z_+^n} \nu^{-k} \|D^k \varphi\|_{L_1} < \infty \right\}$$

з нормою $\|\cdot\|_{1,\nu}$, де $\nu^k \equiv \nu^{-k} \dots \nu^{-k_n}$.

Нехай $M_{1,\nu}$ – клас цілих функцій $\varphi : C^n \ni t + i\tau \to \varphi(t + i\tau)$ із скінченою нормою

$$\|\varphi\|_{M_{1,\nu}} \equiv \sup_{\tau \in R^n} \left(\int_{R^n} \left| \exp\left(\sum_{j=1}^{n} -\nu_j |\tau_j| \right) \varphi(t + i\tau) \right| dt \right)$$

Лема 1.

а) Справедливий ізометричний ізоморфізм $E_{1,\nu} \simeq M_{1,\nu}$ та ізометричне вкладення $E_{1,\nu} \subset L_1$.

б) Для будь-яких функції $\varphi \in E_{1,\nu}$ та вектора $t \in R^n$ функція $\psi : R^n \ni s \to T_s\varphi(t)$, де $T_s\varphi(t) = \varphi(t - s)$, також належить $E_{1,\nu}$.

Доведення.

а) Звуження функції $\varphi(t + i\tau) \in M_{1,\nu}$ на R^n задовольняє нерівність Бернштейна [3] $\|D^k\varphi\|_{L_1} \le \nu^k \|\varphi\|_{L_1}$ $(\forall \varphi \in M_{1,\nu})$, де $\nu^k \equiv \nu_1^{k_1} \dots \nu_n^{k_n}$. Отримуємо $\|\varphi\|_{1,\nu} \le \|\varphi\|_{L_1}$. З означення норми простору $M_{1,\nu}$ випливає $\|\varphi\|_{L_1} \le \|\varphi\|_{M_{1,\nu}}$ $(\forall \varphi \in M_{1,\nu})$, тобто, $M_{1,\nu}|_{R^n} \subset E_{1,\nu}$.

Навпаки, якщо $\varphi \in E_{1,\nu}$, то $\left(\int_{R^n} |\varphi(t + i\tau)| dt \right) \le \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{|\tau^k| \|D^k\varphi\|_{L_1}}{k!} \le \|\varphi\|_{L_1} \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \nu_j |\tau_j| \right)$, або $\|\varphi\|_{M_{1,\nu}} \le \|\varphi\|_{L_1}$, зокрема, $\varphi(t + i\tau) \in M_{1,\nu}$. Тому $E_{1,\nu} \subset M_{1,\nu}|_{R^n}$ і маємо рівність $E_{1,\nu} = M_{1,\nu}|_{R^n}$.

Оскільки $\|\varphi\|_{L_1} \le \|\varphi\|_{1,\nu}$, то $\|\varphi\|_{L_1} \le \|\varphi\|_{1,\nu} \le \|\varphi\|_{L_1} \le \|\varphi\|_{M_{1,\nu}} \le \|\varphi\|_{L_1}$ $(\forall \varphi \in E_{1,\nu})$ і потрібний ізометричний ізоморфізм реалізується звуженням $E_{1,\nu} = M_{1,\nu}|_{R^n}$. Зокрема, $E_{1,\nu} \subset L_1$.

б) Приймемо $\breve{\varphi}(t) \equiv \varphi(-t)$. Для всіх $k \in Z_+^n$ та $s \in R^n$ справедливі рівності $\|D^k\varphi\|_{L_1} = \|D^k\breve{\varphi}\|_{L_1}$, $\|T_s D^k\varphi\|_{L_1} = \|D^k\varphi\|_{L_1}$.

З тотожності $D^k\psi(s) = T_t D^k\breve{\varphi}(s)$,отримуємо $\|D^k\psi(s)\|_{L_1} = \|D^k\breve{\varphi}(s)\|_{L_1} = \|D^k\varphi(s)\|_{L_1}$. Тому $\|D^k\psi\|_{L_1} = \nu^k \|\varphi\|_{L_1}$. Звідси приходимо до нерівності $\left(\int_{R^n} |\psi(t + i\tau)| dt \right) \le \|\varphi\|_{L_1} \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \nu_j |\tau_j| \right)$, тому $\psi \in M_{1,\nu}$. Лема доведена.

На об'єднанні $E_1 = \bigcup_m E_{1,\nu(m)}$ можна задати топологію індуктивної границі $E_1 = \lim_{m\to+\infty} ind\, E_{1,\nu(m)}$. Сильно спряжений простір лінійних неперервних функціоналів до простору E_1 позначимо через E_1'. Із міркувань двоїстості [2] випливає топологічний ізоморфізм проективній границі $E_1' = \lim_{m\to+\infty} pr\, E_{1,\nu(m)}'$.

Розглянемо над простором E_1 групу зсувів $T_s{:}\varphi(t)\to\varphi(t-s)$ від векторної змінної $s\in R^n$. Для будь-яких функціонала $f\in E_1'$ та функції $\varphi(t)\in E_1$ згортку визначаємо співвідношенням

$$(f*\varphi)(t) = \langle f(s), T_s\varphi(t)\rangle,$$

де $f(s)$ позначає дію функціонала f на функцію $T_s\varphi(t)$ по змінній s. Із леми 1 випливає коректність такого визначення згортки. Справедливе таке узагальнення теореми Шварца [1]

Теорема 1. Для кожного функціонала $f\in E_1'$ оператор згортки

$$F{:}E_1 \ni \varphi \to f*\varphi \tag{1}$$

належить простору неперервних лінійних відображень $L(E_1)$ та задовольняє співвідношення

$$FT_s\varphi = T_sF\varphi \qquad (\forall\varphi\in E_1, s\in R^n). \tag{2}$$

Навпаки, якщо оператор $F\in L(E_1)$ задовольняє умову (2), то існує єдиний функціонал $f\in E_1'$ такий, що оператор F має вигляд (1).

Доведення. Нехай $f\in E_1'$ та $\varphi\in E_{1,\nu}$. Із означення згортки та леми 1 одержуємо $\|f*\varphi\|_{1,\nu} \le \|f\|_{1,\nu}\|\varphi\|_{L1}$, де $\|f\|_{1,\nu}$- норма звуження функціонала f на $E_{1,\nu}$. Тому з рівності $D^k(f*\varphi)(t) = \langle f(s), T_sD^k\varphi(t)\rangle = (f*D^k\varphi)(t)$ випливає

$$\|f*\varphi\|L_{1,\nu} = \sup_k \nu^{-k}\|f*D^k\varphi\|_{L_1} \le \|f\|_{1,\nu}\|\varphi\|_{1,\nu}.$$

Вкладення $E_{1,\nu}\subset E_1$ неперервні, тому $F\in L(E_{1,\nu})$ і, отже, $F\in L(E_1)$.

Співвідношення (2) випливає з рівностей $(f*T_s\varphi)(t) = (f*\varphi)(t-s) = T_s(f*\varphi)(t)$.

В протилежну сторону. Відображення $E_1\ni\varphi\to\breve\varphi\in E_1$ є ізоморфізмом. Тому відображення $f{:}\breve\varphi\to(F\varphi)(0)$ визначає функціонал $f\in E_1'$. Звідси $(F\varphi)(0) = \langle f,\breve\varphi\rangle = (f*\varphi)(0)$. Замінюючи φ на $T_t\varphi$ і користуючись (2), отримуємо (1).

Наслідок 1. Для будь-яких $f,g\in E_1'$ згортка $g*f$ визначається співвідношенням $(g*f)*\varphi = g*(f*\varphi)$, $(\forall\varphi\in E_1)$, зокрема, E_1' – згорткова алгебра.

Для комплексного банахового простору $(X,\|\cdot\|)$ позначимо через $E_{1,\nu}(R^n,X)$ простір векторно-значних інтегрованих на R^n функцій

$$E_{1,\nu}(R^n,X) = \left\{\varphi{:}\sup_{k\ge0}\nu^k\|D^k\varphi\|_{L_1(R^n,X)} < \infty\right\}, \text{ де } \|\varphi\|_{L_1(R^n,X)} = \int_{R^n}\|\varphi(t)\|_X dt$$

Нехай $E_1\left(R^n, X\right)=\bigcup_m E_{1,\nu(m)}\left(R^n, X\right)$. На об’єднанні можна задати топологію індуктивної границі $E_1\left(R^n, X\right)=\lim_{m\to+\infty} ind\, E_{1,\nu(m)}\left(R^n, X\right)$.

Лема 2. Справедливий ізометричний ізоморфізм

а) $E_{1,\nu}\left(R^n, X\right)\simeq X\hat{\otimes} E_{1,\nu}\left(R^n\right)$.

б) $E_1\left(R^n, X\right)\simeq X\hat{\otimes} E_1\left(R^n\right)$,

де $\hat{\otimes}$ – проективний тензорний добуток.

Доведення.

а) випливає з леми 1(а);

б) грунтується на такому співвідношенні:

$$E_1\left(R^n, X\right)=\lim_{m\to+\infty} ind\, E_{1,\nu(m)}\left(R^n, X\right)=\lim_{m\to+\infty} ind\left(X\hat{\otimes} E_{1,\nu(m)}\left(R^n\right)\right)=X\hat{\otimes}\lim_{m\to+\infty} ind\, E_{1,\nu(m)}\left(R^n\right)=X\hat{\otimes} E_1\left(R^n\right)$$

Лема доведена.

З леми 2 і теореми Гротендіка про зображення елементів прективного тензорного добутку [4],[5] випливає, що елемент $\varphi\in E_1\left(R^n, X\right)$ представляється у вигляді абсолютно збіжного ряду

$$\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n\otimes\varphi_n, \tag{3}$$

де $\sum_n\left|\lambda_n\right|<+\infty$ і $\left\{x_n\right\},\left\{\varphi_n\right\}$ послідовності, що прямують до нуля у просторах X і E_1 відповідно, $\|\varphi\|_{E_1\left(R^n, X\right)}=\inf\sum_{n=1}^{\infty}\left|\lambda_n\right|\left\|x_n\right\|_X\left\|\varphi_n\right\|_{E_1}<\infty$, де $\inf$ береться по всіх зображеннях (3).

Для будь-якого функціонала $f\in E_1'$, $\varphi\in E_1\left(R^n, X\right)$ згортку визначаємо співвідношенням: $f*\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n\otimes\left(f*\varphi_n\right)$. Використовуючи теорему 1, отримуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|x_n\right\|_X\left\|f*\varphi_n\right\|_{E_1}\le\sum_{n=1}^{\infty}\left\|x_n\right\|_X\|f\|_{1,\nu}\left\|\varphi_n\right\|_{L_1}=c\sum_{n=1}^{\infty}\left\|x_n\right\|_X\ \left\|\varphi_n\right\|_{L_1}<\infty,$$

де $c=\|f\|_{1,\nu}$– норма звуження функціонала f на $E_{1,\nu}$. Отже, для довільної функції $\varphi\in E_1\left(R^n, X\right)$ та функціонала $f\in E_1'$ згортка $f*\varphi\in X\hat{\otimes} E_1\left(R^n\right)$.

Визначимо зсув будь-якої функції $\varphi\in E_1\left(R^n, X\right)$ формулою

$$T_s\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n\otimes\varphi_n(t-s).$$

Використовуючи результат леми 1(b), отримаємо

$\left\|T_s\varphi\right\|=\inf\sum_{n=1}^{\infty}\left\|x_n\right\|_X\left\|\varphi_n(t-s)\right\|_{E_1\left(R^n\right)}\le\inf\sum_{n=1}^{\infty}\left\|x_n\right\|_X\left\|\varphi_n\right\|_{L_1}<\infty$. Тобто одержали, що для будь-якої функції $\varphi\in E_1\left(R^n, X\right)$ функція $T_s\varphi$ також належить $E_1\left(R^n, X\right)$.

Теорема 2. Для кожного функціонала $f \in E_1'$ оператор згортки

$$F : E_1\left(R^n, X\right) \ni \varphi \to f * \varphi \tag{4}$$

належить простору неперервних лінійних відображень $L\left[E_1\left(R^n, X\right)\right]$ та задовольняє співвідношення

$$FT_s\varphi = T_sF\varphi \qquad (F \in E_1\left(R^n, X\right), s \in R^n) . \tag{5}$$

Навпаки, якщо оператор $F \in E_1\left(R^n, X\right)$ задовольняє умову (5), то існує єдиний функціонал $f \in E_1'$ такий, що оператор F має вигляд (4).

Доведення.

1) Нехай $\varphi \in E_1\left(R^n, X\right)$, тоді з леми 1 $f * \varphi \in X \hat{\otimes} E_1\left(R^n\right)$. Співвідношення $FT_s\varphi = T_sF\varphi$ випливає з таких рівностей

$$\left(f * T_s\varphi\right)(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \otimes \left(f * \varphi_n(t-s)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \otimes \left(\left(f * \varphi_n\right)(t-s)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \otimes T_s\left(f * \varphi_n\right)(t) = T_s\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \otimes \left(f * \varphi_n\right)(t)\right);$$

2) Використовуючи теорему 1, отримуємо

$$F\varphi(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \otimes \left(F\varphi_n(0)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \otimes \left(f * \varphi_n\right)(0) = \left(f * \varphi\right)(0)$$

Якщо замінити $\varphi = T_s\varphi$ і скористатись умовою $FT_s\varphi = T_sF\varphi$, закінчуємо доведення.

Для будь-якої векторнозначної функції $\varphi(t) \in E_{1,\nu}\left(R^n, X\right)$ перетворення Фур'є визначимо формулою:

$$\hat{\varphi}(t) = \int_{R^n} e^{tA}\varphi(t)dt ,$$

де $\hat{\varphi}(A) \in X$. Позначимо $Y_\nu = \left\{\hat{\varphi}(A) : \varphi(t) \in E_{1,\nu}\left(R^n, X\right)\right\}$. Тоді Y_ν - банаховий простір з нормою $\left\|\hat{\varphi}(A)\right\|_\nu = \int_{R^n} \left\|e^{tA}\varphi(t)\right\|_{E_{1,\nu}} dt$.

На об'єднанні $Y = \bigcup_m Y_{\nu(m)}$ задаємо топологію індуктивної границі $Y = \lim_{m\to+\infty} ind\, Y_{\nu(m)}$.

Для довільного функціонала визначимо перетворення Фур'є формулою

$$\hat{f}(A)\hat{\varphi} = \int_{R^n} e^{tA}\left(f * \varphi\right)(t)dt .$$

Теорема 3. Для кожного функціонала $f \in E_1'$ оператор $\hat{f}(A)$ належить алгебрі $L(Y)$ і відображення $E_1' \ni f \to \hat{f}(A) \in L(Y)$ реалізує неперервний гомоморфізм згорткової алгебри функціоналів у алгебру операторів.

Як приклад розглянемо значення функції Дірака від оператора диференціювання

$$A = \frac{d}{dt} : L_1 \to L_1$$

$$\delta\left(\frac{d}{dt}\right)\hat{\varphi}(s) = \int e^{t\frac{d}{ds}}\left(1 * \varphi\right)(t)dt = \int\int e^{t\frac{d}{ds}}\varphi\left(t-\xi\right)dtd\xi = \int\int \varphi\left(t+s-\xi\right)dtd\xi$$

або $\delta\left(\dfrac{d}{ds}\right) : \Phi(s) \to \int \Phi\left(s-\xi\right)d\xi$, де прийнято $\Phi(s) = \int \varphi(t+s)dt$.

1. Иосида К. Функциональный анализ. М., 1967. 2. Лопушанський О.В., Лозинська В.Я. Аналітичні розподіли експоненціального типу // Мат. методи і фіз.-мех. поля. 1999. Т.42, 4. С.60–67. 3. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1977. 4. Хелемский А.Я. Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. М., 1989. 5. Шефер Г. Топологические векторные пространства. М., 1971.

УДК 517.983

Лучка А.Ю.
ІППММ НАН України

ЗАГАЛЬНИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ МЕТОДІВ АПРОКСИМАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО ТИПУ

The general approximational-iterative type method is proposed and its substantiation is given.

Запропоновано загальний метод апроксимаційно-ітеративного типу і дано його обгрунтування.

Проекційно-ітеративні методи розв'язання широких класів лінійних та нелінійних рівнянь, зокрема інтегральних, диференціальних, інтегро-диференціальних чи функціонально-диференціальних, досить повно вивчені. Теорія цих методів та їх застосування розглянуто у низці наукових праць, зокрема [1,2]. Дослідження крайових задач з керуванням чи інтегральних рівнянь з обмеженнями [3,4] привело до створення загального підходу до побудови методів апроксимаційно-ітеративного типу. Нижче викладається суть цього методу.

1. Загальна схема методу

Розглянемо рівняння

$$Ax = f\,, \tag{1}$$

де $A: X \to Y$ – лінійний оператор і $f \in Y$, де X, Y – банахові простори.

Нехай $S: Y \to E$ – деякий лінійний оператор, де E – банахів простір, зокрема підпростір простору Y. Поряд з даним рівнянням розглянемо рівняння

$$SAx = Sf \tag{2}$$

і будемо їх трактувати сумісно як одну задачу.

Суть методу полягає в тому, що наближені розв'язки задачі (1),(2) будуються на основі формул

$$Bx_k = u_k + z_k, \quad u_k \in U\,, \tag{3}$$

$$SAx_k = Sf\,, \tag{4}$$

$$z_k = Bx_{k-1} + K\left(f - Ax_{k-1}\right). \tag{5}$$