1. Иосида К. Функциональный анализ. М., 1967. 2. Лопушанський О.В., Лозинська В.Я. Аналітичні розподіли експоненціального типу // Мат. методи і фіз.-мех. поля. 1999. Т.42, 4. С.60–67. 3. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1977. 4. Хелемский А.Я. Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. М., 1989. 5. Шефер Г. Топологические векторные пространства. М., 1971.

УДК 517.983

Лучка А.Ю.
ІППММ НАН України

ЗАГАЛЬНИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ МЕТОДІВ АПРОКСИМАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО ТИПУ

The general approximational-iterative type method is proposed and its substantiation is given.

Запропоновано загальний метод апроксимаційно-ітеративного типу і дано його обгрунтування.

Проекційно-ітеративні методи розв'язання широких класів лінійних та нелінійних рівнянь, зокрема інтегральних, диференціальних, інтегро-диференціальних чи функціонально-диференціальних, досить повно вивчені. Теорія цих методів та їх застосування розглянуто у низці наукових праць, зокрема [1,2]. Дослідження крайових задач з керуванням чи інтегральних рівнянь з обмеженнями [3,4] привело до створення загального підходу до побудови методів апроксимаційно-ітеративного типу. Нижче викладається суть цього методу.

1. Загальна схема методу

Розглянемо рівняння

$$Ax = f\,, \tag{1}$$

де $A: X \to Y$ – лінійний оператор і $f \in Y$, де X, Y – банахові простори.

Нехай $S: Y \to E$ – деякий лінійний оператор, де E – банахів простір, зокрема підпростір простору Y. Поряд з даним рівнянням розглянемо рівняння

$$SAx = Sf \tag{2}$$

і будемо їх трактувати сумісно як одну задачу.

Суть методу полягає в тому, що наближені розв'язки задачі (1),(2) будуються на основі формул

$$Bx_k = u_k + z_k, \quad u_k \in U\,, \tag{3}$$

$$SAx_k = Sf\,, \tag{4}$$

$$z_k = Bx_{k-1} + K\left(f - Ax_{k-1}\right). \tag{5}$$

Припускається, що лінійний оператор B відображає простір X в гільбертів простір H і має обернений оператор $C = B^{-1}$, який можна побудувати в явному вигляді порівняно просто, оператор $K: Y \to H$ - лінійний, причому $KerK = 0$, а $U \subset H$-підпростір такий, що $\dim U = \dim E$. Початкове наближення визначаємо із задачі (3),(4), якщо $k = 0$ і заданому елементі $z_0 \in H$.

Якщо S – оператор проектування простору Y на його підпростір E, метод (3)–(5) – це відомий проекційно-ітеративний метод. Якщо ж при всіх k $u_k = 0$, метод (3)–(5) вироджується у відомий ітераційний процес.

2. Зведення даної задачі до еквівалентного їй рівняння з обмеженням .

Розглянемо допоміжну задачу з керуванням

$$Bx = u + z, \quad u \in U, \quad SAx = Sf, \tag{6}$$

де $z \in H$ – заданий елемент, і припустимо, що рівняння

$$SACw = Sf, \quad w \in U, \quad \forall f \in Y \tag{7}$$

має єдиний розв'язок $w = \Gamma Sf$. За такої умови існує єдиний розв'язок допоміжної задачі з керуванням. Виконавши нескладні перетворення з врахуванням формул (6) і (7), отримаємо

$$u = w - Rz, \quad Bx = w + Gz, \tag{8}$$

$$R = \Gamma SAC, \quad G = I - R, \tag{9}$$

де I -одиничний оператор в H, причому справедливі співвідношення

$$Ru = u, \quad Gu = 0, \quad \forall u \in U, \tag{10}$$

$$RG = GR = 0, \quad R^2 = R, \quad G^2 = G. \tag{11}$$

Зауважимо, що для всякого елемента x, який задовольняє рівняння (2), справедливі зображення

$$Bx = w + GBx, \quad RBx = w. \tag{12}$$

На основі формул (1),(12) і того факту, що $CB = I$, маємо

$$Bx = Bx + K(f - Ax) = Bx + K(f - ACBx) = Kf + (I - KAC)(w + GBx),$$

або, ввівши позначення

$$y = Bx, \quad g = Kf + w - KACw, \quad M = (I - KAC)G, \tag{13}$$

$$y = g + My. \tag{14}$$

Нехай $H = U \oplus V$ і P, Q-оператори ортогонального проектування простору H на його підпростори U і V відповідно. Тоді, врахувавши другу властивість (10), матимемо

$$Gy = Gv, \quad v = Qy. \tag{15}$$

Застосуємо до співвідношення (14) зліва оператор Q і врахуємо формулу (15) та введемо позначення

$$h = Qg, \quad L = QM. \tag{16}$$

В результаті отримаємо рівняння

$$v = h + Lv, \tag{17}$$

в якому $L: V \to V, \quad h \in V$.

Розглядатимемо надалі рівняння (17) з умовою

$$Rz = w, \quad z = g + Mv. \tag{18}$$

Теорема 1. Якщо існує обмежений оператор $\Gamma: E \to U$, то задача (1),(2) еквівалентна задачі (17),(18).

Доведення. Нехай $v^* \in V$ - розв'язок рівняння (17), тобто

$$v^* = h + Lv^*, \tag{19}$$

і справджується умова

$$Rz^* = w, \quad z^* = g + Mv^*. \tag{20}$$

Доведемо, що елемент $x^* \in X$, який однозначно визначається з рівняння

$$Bx^* = w + Gv^*, \tag{21}$$

задовольняє рівняння (1), отже, і умову (2). Для цього зауважимо, що, по-перше, із врахуванням співвідношень (20),(16),(19)

$$z^* = Pz^* + Qz^* = Pz^* + Q(g + Mv^*) = Pz^* + h + Lv^* = Pz^* + v^*, \tag{22}$$

а, по-друге, враховуючи до уваги першу властивість (10), позначення (9) і формулу (22),

$$Rz^* = Pz^* + Rv^* = Pz^* + v^* - Gv^* = z^* - Gv^*. \tag{23}$$

На підставі формул (1), (20), (21), (13) і (23) маємо

$$Kf - KAx^* = Kf + w - Rz^* - KAC(w + Gv^*) = g - z^* + Gv^* - KACGv^* = g - z^* + Mv^* = 0.$$

Звідси, оскільки за умовою $KerK = 0$, випливає $f - Ax^* = 0$.

Нехай тепер $x^* \in X$ - розв'язок рівняння (1). Тоді, очевидно виконується умова (2), отже, справджується рівність (12). Побудуємо елемент $v^* = QBx^*$ і доведемо, що він задовольняє рівняння (17).Для цього використаємо формули (16), (13), (12), на основі яких і того факту, що справедливе співвідношення $MQBx^* = MBx^*$, яке випливає із другої властивості (10),

$$h + Lv^* - v^* = Q(g + MBx^* - Bx^*) = Q(Kf + w - KACw + GBx^* - KACGBx^* - Bx^*) =$$

$$= QK\big(f - AC(w + GBx^*)\big) = QK(f - Ax^*) = 0.$$

Залишилось ще впевнитись, що виконується умова (18). Справді, згідно з формулами (20), (10), (13), (11), (12) і (1) маємо

$$w - Rz^* = w - Rg - RMv^* = w - Rg - RMBx^* = R(w - Kf - w + KACw - GBx^* + KACGBx^*) =$$

$$= RK(ACw + ACGBx^* - f) = RK(Ax^* - f) = 0.$$

Нарешті, можливий випадок, коли $QBx^* = 0$, тобто $v^* = 0$. Тоді рівняння (17) має тривіальний розв'язок, бо з врахуванням позначень (16), (13) і того факту, що із співвідношення (12) випливає $w = PBx^*$, маємо

$$h = Q(Kf + w - KACw) = QK(f - ACPBx^*) = QK(Ax^* - ACPBx^*) = QKAC(Bx^* - PBx^*) =$$

$$= QKACv^* = 0.$$

Теорема 2. Якщо існує обмежений оператор $\Gamma : E \to U$ і рівняння (17) має єдиний розв'язок, то або існує єдиний розв'язок рівняння (1) за умови, що виконується рівність (20), або рівняння (1) не має розв'язку.

Доведення. Якщо виконується умова теореми, тобто існує елемент $v^* \in V$, такий , що правильні рівності (19), (20), то за теоремою 1 елемент $x^* \in X$, що однозначно встановлюється з рівняння (21), є розв'язком рівняння (1). Цей розв'язок єдиний. Справді, нехай існує другий розв'язок $\bar{x} \in X$ цього самого рівняння, причому $\bar{x} \neq x^*$. Тоді, за теоремою 1 елемент $\bar{v} = QB\bar{x}$ задовольняє рівняння (17), тобто

$$\bar{v} = h + L\bar{v}, \tag{24}$$

і справедливе співвідношення (12), яке з урахуванням властивості (10) набуде вигляду

$$B\bar{x} = w + G\bar{v}. \tag{25}$$

Із формул (19), (24) і (21), (25) випливає

$$v^*-\bar{v}=L(v^*-\bar{v}),\quad B(x^*-\bar{x})=G(v^*-\bar{v}). \tag{26}$$

Але за умовою теореми рівняння (26) має лише розв'язок $v^*-\bar{v}=0$. Отже, на підставі другого співвідношення (26) $B(x^*-\bar{x})=0$. Звідси випливає $x^*-\bar{x}=0$, що суперечить припущенню.

Нехай рівняння (17) має єдиний розв'язок $v^*\in V$, але умова (20) не виконується. В цьому випадку рівняння (1) не має розв'язку, оскільки, якщо ми припустимо існування розв'язку, за теоремою 1 існував би розв'язок рівняння (17), який задовольняв би умову (20), що суперечить умові теореми. В даному випадку можна встановити, що елементи $x^*=Cw+CGv^*,\quad u^*=w-Rz^*$, де $z^*=g+Mv^*$, - єдиний розв'язок задачі з керуванням

$$KAx=u+Kf,\quad SAx=Sf,\quad u\in U. \tag{27}$$

3. Обґрунтування методу. Припустимо, як і раніше, що рівняння (7) однозначно розв'язуване. Тоді задача (3),(4) має єдиний розв'язок і, з врахуванням формули (8), справедливі зображення

$$u_k=w-Rz_k,\quad Bx_k=w+Gz_k. \tag{28}$$

Нехай $v_k=Qz_k$, тоді, врахувавши співвідношення (15), формулу (28) можна подати у вигляді

$$Bx_k=w+Gv_k. \tag{29}$$

На основі формул (5) і (29) маємо $z_k=Kf+(I-KAC)Bx_{k-1}=Kf+(I-KAC)(w+Gv_{k-1})$, або, використавши позначення (13),

$$z_k=g+Mv_{k-1}. \tag{30}$$

Якщо до останнього співвідношення застосувати зліва оператор Q і врахувати позначення (16), то отримаємо

$$v_k=h+Lv_{k-1}. \tag{31}$$

Отже, питання збіжності методу (3)–(5) для задачі (1), (2) звелось до питання збіжності методу послідовних наближень для рівняння (17). Умови збіжності останнього методу широко відомі. Використавши їх, а також теорему 2 та формули (28)–(31), приходимо до висновку.

Теорема 3. Якщо спектральний радіус $\rho(L)<1$, то існують границі $\lim\limits_{k\to\infty}v_k=v^*,\ \lim\limits_{k\to\infty}z_k=z^*,\ \lim\limits_{k\to\infty}x_k=x^*,\ \lim\limits_{k\to\infty}u_k=u^*$ і справедливі співвідношення

$$Bx^*=w+Gv^*,\quad u^*=w-Rz^*,\quad z^*=g+Mv^*. \tag{32}$$

Якщо, крім цього, виявиться, що $u^*=0$, тобто $Rz^*=w$, то існує єдиний розв'язок $x^*\in X$ рівняння (1) і послідовність $\{x_k, k\ge 0\}$, побудована за методом (3)-(5), збігається до цього розв'язку.

Якщо ж $u^*\neq 0$, то існує єдиний розв'язок задачі з керуванням (27) $x^*\in X$, $u^*\in U$ і побудовані за методом (3)–(5) послідовності $\{x_k, k\ge 0\}$, $\{u_k, k\ge 0\}$ збігаються до цього розв'язку.

1. Курпель Н.С. Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений.– К., 1968. 2. Лучка А.Ю. Проекционно-итеративные методы. К., 1993. 3. Лучка А.Ю.

Интегральные уравнения с ограничениями и методы их решения// Кибернетика и системный анализ. 1996. № 3. С.82–96. 4. Лучка А.Ю. Методи дослідження систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом // Укр. мат. журн. 1998. 50, № 2. С.189–194.

УДК 517.97

Лучка Т.Ф.
Київський державний університет технологій та дизайну

РОЗВИТОК ПРЯМИХ ВАРІАЦІЙНИХ МЕТОДІВ У ПРАЦЯХ М.М. БОГОЛЮБОВА

The main results of academician N.N. Bogolyubov`s work on calculus of variations and on the theory of direct methods of mathematical physics are presented.

Викладено основні результати праць академіка М.М.Боголюбова із варіаційного числення і теорії прямих методів математичної фізики.

Микола Миколайович Боголюбов – видатний вчений XX століття. Його роботи суттєво вплинули на розвиток сучасної математики, механіки і теоретичної фізики. В згаданих областях М.М. Боголюбов одержав фундаментальні результати, які збагатили світову науку.

Ранні роботи вченого стосуються прямих методів варіаційного числення, наближених методів математичної фізики і теорії майже періодичних функцій. Уже ці роботи зробили молодого вченого відомим.

У роботах з варіаційного числення було створено оригінальні методи дослідження мінімуму функціоналів, які не є регулярними або квазірегулярними, вони стосувалися розробки прямих методів побудови розв'язків диференціальних рівнянь, обґрунтування принципу Релея та інших питань. Розглянемо детальніше результати робіт в цьому напрямку.

1. Прямі методи варіаційного числення

Варіаційне числення виникло майже одночасно із диференціальним та інтегральним численнями і оформилося в самостійну математичну дисципліну в середині XVIII століття у працях Л.Ейлера і Ж.Лагранжа. У працях А.Лежандра, С.Пуассона, М.В.Остроградського, У.Гамільтона, К.Якобі, К.Вейєрштрасса, Ж.Дарбу та інших відомих вчених, які виконано переважно в XIX столітті, закладено основи класичних методів варіаційного числення, які базуються на теорії диференціальних рівнянь. Так, задача про екстремум функціонала

$$I(y)=\int_a^b f\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)dx \tag{1}$$

на класі функцій G, які мають скрізь в інтервалі (a,b) сумовну похідну і задовольняють умови

$$y(a)=a_1, \quad y(b)=b_1, \tag{2}$$