УДК 517. 956. 4

Малицька Г.П.
Прикарпатський університет ім. В. Стефаника, Ів.-Франківськ

ПРО СТРУКТУРУ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЕЛІПТИКО-ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ, ЩО УЗАГАЛЬНЮЮТЬ РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ З ІНЕРЦІЄЮ

We constructed and researched the fundamental solution of Cauchy problem for elliptic-parabolic equations generalizing the Kolmogorov's equation.

Побудовано і досліджено фундаментальний розв'язок задачі Коші для еліптико-параболічних рівнянь, що узагальнюють рівняння Колмогорова.

Метою цієї статті є побудова і дослідження структури фундаментального розв'язку задачі Коші для класу рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузії з інерцією в інерціальній частині. Одержані результати дають можливість побудувати фундаментальний розв'язок для такого самого типу рівнянь, але із змінними коефіцієнтами в параболічній частині.

I. Використовуватимемо такі позначення:
n – деяке фіксоване натуральне число, $m_1, m_2, ..., m_r$ – фіксовані цілі невід'ємні числа,

$$n \ge m_1 \ge m_2 \ge ... \ge m_r, \; N = n + \sum_{j=1}^{r} m_j, \; X = (x, y_1, ..., y_r), \; x = (x_1, ..., x_n), \; x \in R^n,$$

$$y_1 = (y_{11}, ... y_{1m_1}) \;\; y_1 \in R^n, \ldots, \; y_r = (y_{r1}, ..., y_{rm_r}), \; y_r \in R^{m_r}, \; M = n + 3m_1 + 5m_2 + ... + (2r+1)m_r.$$

$$x^{(1)} = (x_1, ..., x_{m_1}), x^{(2)} = (x_1, ..., x_{m_2}), ..., x^{(r)} = (x_1, ..., x_{m_r}), x^{(k,j)} = (x_k, ..., x_j), k < j,$$

$$y_j^{(s)} = (y_{j1}, ..., y_{jm_s}), j < s, X \in R^N.$$

Аналогічний зміст мають символи: $E = (\xi, \eta_1, ..., \eta_r)$.

$$(X, E) = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_j} (y_{jk}, \eta_{jk}) = (x, \xi) + (y_1, \eta_1) + ... + (y_r, \eta_r).$$

$$(x^{(1)}, D_{y_1}) = \sum_{j=1}^{m_1} x_j D_{y_{1j}}, ..., (y_1^{(2)}, D_{y_2}) = \sum_{j=1}^{m_2} y_{1j} D_{y_{2j}}, ..., (y_{r-1}^{(r)}, D_{y_r}) = \sum_{j=1}^{m_r} y_{r-1,j} D_{y_{rj}},$$

$$\Delta_x = \sum_{j=1}^{n} D^2_{x_j^2},$$

$$\Delta_x = \Delta_{x^{(r)}} + \Delta_{x^{(m_r+1, m_{r-1})}} + ... + \Delta_{x^{(m_1+1, n)}}, x \in R^n.$$

II. Розглянемо таку задачу Коші:

$$(D_t-(x^{(1)},D_{y_1})-(y_1^{(2)},D_{y_2})-\ldots-(y_{r-1}^{(r)},D_{y_r})-a\Delta_x)u(t,X)=0, t>\tau, \tag{1}$$

$$u(t,X)\Big|_{t=\tau}=\varphi(X), X\in R^N, \tag{2}$$

де $a>0, \varphi: R^N\to C$ – досить гладка і фінітна функція.

Розв'язок шукатимемо у вигляді оберненого перетворення Фур'є функції $v(t,E)$, тобто

$$u(t,X)=(2\pi)^{-N}\int\limits_{R^N}\exp\{i(X,E)\}v(t,E)dE, \tag{3}$$

$t>\tau, X\in R^N$.

Для визначення функції $v(t,E)$ одержимо задачу

$$(D_t+(\eta_1,D_{\xi_1^{(1)}})+(\eta_2,D_{\eta_1^{(2)}})+\ldots+(\eta_r,D_{\eta_{r-1}^{(r-2)}})+a|\xi|^2)v(t,E)=0,$$
$$t>\tau, E\in R^N, \tag{4}$$

$$v(t,E)\Big|_{t=\tau}\equiv\psi(E), E\in R^N, \tag{5}$$

де

$$\psi(E)=\int\limits_{R^N}\exp\{-i(X,E)\}\varphi(X)dX \tag{6}$$

Задачу (5), (6) розв'яжемо методом характеристик [1]. Система звичайних диференціальних рівнянь, яка відповідає рівнянню (4), має вигляд

$$dt=\frac{d\xi_1}{\eta_{11}}=\frac{d\xi_2}{\eta_{12}}=\ldots=\frac{d\xi_{m_1}}{\eta_{1m_1}}=\frac{d\eta_{11}}{\eta_{21}}=\ldots=\frac{d\eta_{1m_2}}{\eta_{2m_2}}=\ldots=$$
$$=\frac{d\eta_{r-1,1}}{\eta_{r1}}=\ldots=\frac{d\eta_{r-1,m_r}}{\eta_{r,m_r}}=\frac{dv}{-a|\xi|^2v}.$$

Ця система містить $1+m_1+m_2+\ldots+m_r$ незалежних перших інтегралів. З рівнянь

$$dt=\frac{d\eta_{r-1,j}}{\eta_{r,j}}, j=1,2,\ldots,m_r$$

знаходимо

$$\eta_{r-1,j}=t\eta_{r,j}+C_{1,j.r-1}, C_{1,j,r-1}=const, \tag{7}$$

а із

$$dt=\frac{d\eta_{r-2,j}}{\eta_{r-1,j}}, j=1,2,\ldots,m_r$$

маємо

$$\eta_{r-2,j}=\frac{t^2}{2}\eta_{rj}+C_{1,j,r-1}t+C_{2,j,r-2} \tag{7$_1$}$$

і т. д. Із

$$dt=\frac{d\eta_{1,j}}{\eta_{2,j}}, j=1,2,\ldots,m_r$$

$$\eta_{1,j}=\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\eta_r+C_{1,j,r-1}\frac{t^{r-2}}{(r-2)!}+...+tC_{r-2,j,2}+C_{r-1,j,1},$$

а з $dt=\dfrac{d\xi_j}{\eta_{1j}}$ визначимо ξ_j, $j=1,2,...,m_r$,

$$\xi_j=\frac{t^r}{r!}\eta_{rj}+\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}C_{1,j,r-1}+\frac{t^{r-2}}{(r-2)!}C_{2,j,r-2}+...+tC_{r-1,j,1}+C_j. \qquad (7_r)$$

Якщо $j=m_r+1,...,m_{r-1}$, то

$$\eta_{r-2,j}=t\eta_{r-1,j}+C_{1,j,r-2}, \qquad (7_{r+1})$$

$$\eta_{r-3,j}=\frac{t^2}{2}\eta_{r-1,j}+C_{1,j,r-2}t+C_{2,j,r-3}, \qquad (7_{r+2})$$

$$\eta_{1,j}=\frac{t^{r-2}}{(r-2)!}\eta_{r-1,j}+C_{1,j,r-2}\frac{t^{r-3}}{(r-3)!}+...+C_{r-2,j,1}, \qquad (7_{r+3})$$

$$\xi_j=\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\eta_{r-1,j}+\frac{t^{r-2}}{(r-2)!}C_{1,j,r-2}+...+C_{r-2,j,1}t+C_j. \qquad (7_{r+4})$$

Поступово отримаємо $j=m_3+1,...,m_2$, тоді

$$\begin{aligned}\eta_{1j}&=t\eta_{2j}+C_{1j1},\\ \xi_j&=\frac{t^2}{2}\eta_{2j}+C_{1j1}t+C_j.\end{aligned} \qquad (8)$$

Якщо $j=m_2+1,...,m_1$, то

$$\xi_j=t\eta_{1j}+C_j. \qquad (9)$$

Оскільки

$$v=C\exp\{-\int_\tau^t a|\xi|^2 d\beta\},$$

то, використовуючи перші інтеграли для ξ_j, можна записати

$$v\equiv C\exp\{-a\int_\tau^t[\sum_{j=m_1+1}^{n}\xi_j^2+\sum_{j=m_2+1}^{m_1}\left|\beta\eta_{1j}+C_j\right|^2+\sum_{j=m_3+1}^{m_2}\left|\frac{\beta^2}{2}\eta_{1j}+\beta C_{1j1}+C_j\right|^2+...+$$

$$+\sum_{j=1}^{m_r}\left|\frac{\beta^r}{r!}\eta_{rj}+C_{1,j,r-1}\frac{\beta^{r-1}}{(r-1)!}+C_{2,j,r-2}\frac{\beta^{r-2}}{(r-2)!}+...+\beta C_{r-1,j,1}+C_j\right|^2]d\beta\}.$$

Нехай $\hat{\xi}_i,\hat{\eta}_1,...,\hat{\eta}_{r-1}$ і $\hat{v}$ значення при $t=\tau$ відповідно $\xi_j,\eta_1,...,\eta_{r-1},v$, тому $j=1,...,m_r$,

$$\hat{\eta}_{1j}=\frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!}\eta_{rj}+\frac{\tau^{r-2}}{(r-2)!}C_{1,j,r-1}+...+C_{r-1,j,1},$$

$$\hat{\xi}_j=\frac{\tau^r}{r!}\eta_{rj}+\frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!}C_{1,j,r-1}+...+\tau C_{r-1,j,1}+C_j.$$

Якщо $m_r+1\le j\le m_{r-1}$,

$$\hat{\eta}_{1j}=\frac{\tau^{r-2}}{(r-2)!}\eta_{r-1,j}+C_{1,j,r-2}\frac{\tau^{r-3}}{(r-3)!}+...+C_{r-1,j,1},$$

$$\hat{\xi}_j=\frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!}\eta_{r-1,j}+C_{1,j,r-2}\frac{\tau^{r-2}}{(r-2)!}+...+\tau C_{r-1,j,1}+C_j$$

і т. д., якщо $m_k+1\le j\le m_{k-1},1<k<r$,

$$\hat{\eta}_{1j}=\frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!}\eta_{k,j}+C_{1,j,k-1}\frac{\tau^{k-2}}{(k-2)!}+...+C_{k-1,j,1},$$

$$\hat{\xi}_j=\frac{\tau^k}{k!}\eta_{kj}+\frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!}C_{1,j,k-1}+...+\tau C_{k-1,j,1}+C_j.$$

Зокрема, якщо $m_2+1\le j\le m_1$

$$\hat{\xi}_j=\tau\eta_{1j}+C_j.$$

Аналогічно знаходимо $\hat{\eta}_{r-k,j}$ при відповідних $j,\hat{v}\equiv C$, але $\hat{v}=\psi$, тому $C=\psi(\hat{\xi},\hat{\eta}_1,...,\hat{\eta}_{r-1},\eta_r)$.

Окремо випишемо аргументи: $\hat{\xi},\hat{\eta}_1,...,\hat{\eta}_{r-1},\eta_r$:

$$(\frac{\tau^r}{r!}\eta_{r1}+\frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!}C_{1,1,r-1}+...+\tau C_{r-1,1,1}+C_1,...,$$

$$\frac{\tau^r}{r!}\eta_{rm_r}+\frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!}C_{1,m_r,r-1}+...+\tau C_{r-1,m_r,1}+C_{m_r},$$

$$\frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!}\eta_{r-1,1+m_r}+\frac{\tau^{r-2}}{(r-2)!}C_{2,m_r,r-2}+...+\tau C_{r-2,m_r+1,1}+C_{m_r+1},$$

$$\tau\eta_{1,m_r+1}+C_{m_r+1},...,\tau\eta_{1m_1}+C_{m_1},$$

$$\xi_{m_1+1},\dots,\xi_n,$$
$$\frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!}\eta_{r1}+\frac{\tau^{r-2}}{(r-2)!}C_{1,1,r-1}+\dots+C_{r-1,1,1},$$
$$\eta_{r,m_r}\frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!}+\frac{\tau^{r-2}}{(r-2)!}C_{1,m_r,r-1}+\dots+C_{r-1,m_r,1}$$
$$\eta_{r-1,1}\frac{\tau^{r-2}}{(r-2)!}+C_{1,1,r-2}\frac{\tau^{r-3}}{(r-3)!}+\dots+C_{r-2,1,1},\dots, \tag{10}$$
$$\tau\eta_{2,m_2}+C_{1,m_2,1},$$
$$\eta_{1,m_2+1},\dots,\eta_{1,m_1},\dots,\tau\eta_{r1}+C_{1,1,r-1},\dots,\tau\eta_{rm_r}+C_{1,m_r,r-1},$$
$$\eta_{r-1,m_r+1},\dots,\eta_{r-1,m_{r-1}},\eta_{r1},\dots,\eta_{rm_r}).$$

Використовуючи (7)–(9), знайдемо сталі C_{ijk} і, C_j і підставимо їх в (10) та в показник exp, одержимо

$$v(t,E)=\exp\{-a\int_{\tau}^{t}(\sum_{j=m_1+1}^{n}\left|\xi_j\right|^2+\sum_{j=m_2+1}^{m_1}\left|\xi_j-(t-\beta)\eta_{1j}\right|^2+\sum_{j=m_3+1}^{m_2}\left|\xi_j+\frac{(t-\beta)^2}{2}\eta_{1j}\right|^2+$$
$$+\dots+\sum_{j=1}^{m_r}\left|\xi_j-(t-\beta)\eta_{1j}+\frac{(t-\beta)^2}{2}\eta_{2j}+\dots+\frac{(-1)^r(t-\beta)^r}{r!}\eta_{rj}\right|^2)d\beta\psi(\xi^{(r)}-$$
$$-(t-\tau)\eta_1^{(r)}+\frac{(t-\tau)^2}{2}\eta_2^{(r)}+\dots+\frac{(-1)^r(t-\tau)^r}{r!}\eta_r,$$
$$\xi^{(r-1)}-(t-\tau)\eta_1^{(r-1)}+\frac{(t-\tau)^2}{2}\eta_2^{(r-1)}+\dots+\frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}(t-\tau)^{r-1}\eta_{r-1},$$
$$\xi^{(1)}-(t-\tau)\eta_1^{(1)},\xi^{(m_1+1,n)},\eta_1^{(r)}-(t-\tau)\eta_2^{(r)}+\dots+\frac{(-1)^{r-1}(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}\eta_r$$
$$\eta_1^{(k)}-(t-\tau)\eta_2^{(k)}+\dots+\frac{(-1)^{k-1}(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}\eta_k,\dots,\eta_1^{(2)}-(t-\tau)\eta_2,$$
$$\eta_1^{(m_2+1,m_1)},\dots,\eta_{r-1}^{(r)}-(t-\tau)\eta_r,\eta_{r-1}^{(m_r+1,m_r-1)},\eta_r) \tag{11}$$
$$t>\tau, E\in R^n$$

Підставивши (11) у формулу (3), зробивши відповідну заміну змінних, отримаємо

$$u(t,X)=(2\pi)^{-N}\int\limits_{R^N}\exp\{i(x^{(m_2+1,n)},\xi^{(m_1,n)})+i(x^{(m_2+1,m)},\xi^{(m_2+1,m_1)}+$$

$$+(t-\tau)\eta_1^{(m_2+1,m_1)})+\ldots+i(x^{(r)},\xi^{(r)}+(t-\tau)\eta_1^{(r)}+\ldots+\frac{(t-\tau)^r}{r!}\eta_r)+$$

$$+i(y_1^{(m_2+1,m_1)},\eta_1^{(m_2+1,m_1)})+\ldots+(y_1^{(r)},\eta_1^{(r)}+(t-\tau)\eta_2^{(r)}+\ldots+\frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}\eta_r)+$$

$$+i(y_2^{(m_3+1,m_2)},\eta_2^{(m_3+1,m_2)})+\ldots+i(y_2^{(r)},\eta_2^{(r)}+(t-\tau)\eta_2^{(r)}+\ldots+\frac{(t-\tau)^{r-2}}{(r-2)!}\eta_r)+$$

$$+\ldots+i(y_r,\eta_r)-a\int\limits_{\tau}^{t}[\sum_{j=m_1+1}^{n}\left|\xi_j\right|^2+\sum_{j=m_2+1}^{m_1}\left|\xi_j+(\beta-\tau)\eta_{1j}\right|^2+$$

$$+\sum_{j=m_3+1}^{m_2}\left|\xi_j+(\beta-\tau)\eta_{1j}+\frac{(\beta-\tau)^2}{2}\eta_{2j}\right|^2+\ldots+\sum_{j=1}^{m_r}\left|\xi_j+(\beta-\tau)\eta_{1j}+\right.$$

$$\left.+\frac{(\beta-\tau)^2}{2!}\eta_{2j}+\ldots+\frac{(\beta-\tau)^r}{r!}\eta_{rj}\right|^2]d\beta\}\psi(E)dE.$$

Скориставшись виразом (6) і змінивши порядок інтегрування, та зробивши перепозначення змінних, прийдемо до формули

$$u(t,X)=(2\pi)^{-N}\int\limits_{R^N}Z(t,X;\tau,E)\varphi(E)dE,t>\tau,$$

$$Z(t,X;\tau,E)\equiv(2\pi)^{-N}\int\limits_{R^N}\exp\{i(x-\xi,\lambda)+(y_1+x^{(1)}(t-\tau)-\eta_1,\mu_1)+i(y_2+$$

$$+y_1^{(2)}(t-\tau)+\frac{x^{(2)}(t-\tau)^2}{2!}-\eta_2,\mu_2)+i(y_3+y_2^{(3)}(t-\tau)+y_2^{(3)}\frac{(t-\tau)^2}{2!}+$$

$$+\frac{x^{(3)}(t-\tau)^3}{3!}-\eta_3,\mu_3)+\ldots+i(y_r+y_{r-1}^{(r)}(t-\tau)+y_{r-2}^{(r)}\frac{(t-\tau)^2}{2!}+\ldots+$$

$$+y_1^{(r)}\frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}+\frac{x^{(r)}(t-\tau)^r}{r!}-\eta_r\mu_r)-a\int\limits_{\tau}^{t}[\sum_{j=m_1+1}^{n}\left|\lambda_j\right|^2+$$

$$+\sum_{j=m_2+1}^{m_1}\left|\lambda_j+(\beta-\tau)\eta_{1j}\right|^2+\ldots+\sum_{j=1}^{m_1}\left|\lambda_j+(\beta-\tau)\eta_{1j}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{(\beta-\tau)^r}{r!}\eta_{rj}\right|^2]d\beta\}d\Lambda,\Lambda=(\lambda,\mu_1,\ldots,\mu_r). \quad (12)$$

У формулі (12) зробимо заміну змінних

$$\beta-\tau=(t-\tau)\hat{\beta},$$

$$\lambda=(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\hat{\lambda},$$

$$\mu_1=(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}\hat{\mu}_1,\mu_2=(t-\tau)^{-\frac{5}{2}}\hat{\mu}_2,...,\mu_r=(t-\tau)^{-\frac{(2r+1)}{2}}\hat{\mu}_r$$

і замість $\hat{\lambda},\hat{\mu}_1,...,\hat{\mu}_r,\hat{\beta}$ знову запишемо відповідно $\lambda,\mu_1,...,\mu_r,\beta$, тоді

$$Z(t,X;\tau,E)=(2\pi)^{-N}(t-\tau)^{-\frac{M}{2}}\int_{R^N}\exp\{i((x-\xi)(t-\tau)^{-\frac{1}{2}},\lambda)+$$

$$+i((y_1-(t-\tau)x^{(1)}-\eta_1)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}},\mu_1)+i((y_2+(t-\tau)y_1^{(2)}+\frac{(t-\tau)^2}{2!}x^{(2)}-$$

$$-\eta_2)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}},\mu_3)+...+i((y_r+(t-\tau)y_{r-1}^{(r)}+\frac{(t-\tau)^2}{2!}y_3^{(2)}+...+$$

$$+y_{r-1}\frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}+x^{(r)}\frac{(t-\tau)^r}{r!}-\eta_r)(t-\tau)^{-\frac{(2r+1)}{2}},\mu_r)-a\omega(\Lambda)\}d\Lambda,$$

де

$$\omega(\Lambda)\equiv\int_0^1[\sum_{j=m_1+1}^{n}\left|\lambda_j\right|^2+\sum_{j=m_2+1}^{m_1}\left|\lambda_j+\beta\mu_{1j}\right|^2+...+\sum_{j=1}^{m_1}\left|\lambda_j+\beta\mu_{1j}+\frac{\beta^2}{2!}\mu_{2j}+\right.$$

$$\left.+...+\frac{\beta^r}{r!}\mu_r\right|^2]d\beta=\left|\lambda_1^2+\frac{1}{3}\left|\mu_1\right|^2+...+\frac{\left|\mu_r\right|^2}{(r!)^2(2r+1)}+(\lambda^{(1)},\eta_1^{(1)})+...+\right.$$

$$+(\lambda^{(r)},\eta_r)\frac{2}{r(r+1)}+...+(\mu_{r-1}^{(r)},\mu_r)\frac{1}{(r-1)!r!r}.$$

Оскільки для $\omega(\Lambda)$ справедлива оцінка

$$\omega(\Lambda)\geq C(r,N)(\left|\lambda\right|^2+\left|\mu_1\right|^2+...+\left|\mu_r\right|^2),C(r,N)=const,$$

то перетворення Фур’є по всіх змінних існує.

Поступово визнаючи перетворення Фур’є по $\lambda,\mu_1,\mu_2,\mu_3$ і т. д., одержимо

$$Z(t,X;\tau,E)=\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left(\frac{12\pi}{a}\right)^{\frac{m_1}{2}}\left(\frac{720\pi}{a}\right)^{\frac{m_2}{2}}\left(\frac{25200\pi}{a}\right)^{\frac{m_3}{2}}\exp\{-\frac{\left|x-\xi\right|^2}{4a(t-\tau)}-$$

$$-\frac{3}{a}\left|y_1+(x^{(1)}+\xi^{(1)})\frac{(t-\tau)}{2}-\eta_1\right|^2(t-\tau)^{-3}-\frac{180}{a}\left|y_2-\eta_2+\frac{y_1^{(2)}+\eta_1^{(2)}}{2}(t-\tau)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{12}(x^{(2)}-\xi^{(2)})(t-\tau)^2\right|^2(t-\tau)^{-5}-\frac{6300}{a}\left|y_3-\eta_3+\frac{y_2^{(3)}+\eta_2^{(3)}}{2}(t-\tau)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{10}(y_1^{(3)}-\eta_1^{(3)})(t-\tau)^2+\frac{1}{120}(x^{(3)}-\xi^{(3)})(t-\tau)^3\right|^2(t-\tau)^{-7}\}\mathrm{I}(\Lambda),$$

де $\mathrm{I}(\Lambda)$ перетворення Фур'є по $(\mu_4,...,\mu_r)$ у відповідних точках, для $\mathrm{I}(\Lambda)$ справедлива оцінка

$$0 \le \mathrm{I}(\Lambda) \le C(M)\exp\{-c_1(\left|y_4-\eta_4+\frac{1}{2!}y_3^{(4)}(t-\tau)+\frac{1}{2!}y_2^{(3)}(t-\tau)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3!}y_1^{(4)}(t-\tau)^3+\frac{1}{4!}x^{(4)}(t-\tau)^4\right|^2(t-\tau)^{-9}+...+\left|y_r-\eta_r+\frac{1}{1!}y_{r-1}^{(r)}(t-\tau)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2!}y_{r-2}^{(r)}(t-\tau)^2+...+\frac{1}{(r-1)!}y_1^{(r)}(t-\tau)^{r-1}+\frac{1}{r!}x^{(r)}(t-\tau)^r\right|^2(t-\tau)^{-\frac{2r+1}{2}}\}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-\frac{9m_4+11m_5+...+(2r+1)m_r}{2}}.$$

Із способу доведення випливає, що функція $Z(t,X;\tau,E)$ є фундаментальним розв'язком задачі Коші (1), (2).

Для $Z(t,X;\tau,E)$ справедлива теорема про зображення через фундаментальні розв'язки рівняння такого самого типу, але з меншою кількістю відповідних груп змінних. [2].

1. Степанов В.В., Курс диференціальних рівнянь. М., 1959. 2. Ейдельман С.Д., Івасишен С.Д., Тичинська Л.М. Про структуру фундаментального розв'язку задачі Коші для одного модельного ультрапараболічного рівняння. Крайові задачі з різним виродженням. 1990. С.32–40.

УДК 517.946

Матійчук М.І.
Чернівецький державний університет ім. Ю.Федьковича

ПРО КРАЙОВУ ЗАДАЧУ З РУХОМОЮ МЕЖЕЮ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

The existence of the solution of the problem with conjugation condition and Stephen condition on the free boundary of domain and Neumann condition on the external boundary of domain is established in the two-connected domain for parabolic equations of the second order.

У двозв'язній області для параболічних рівнянь другого порядку встановлюється існування розв'язку задачі з умовою спряження і умовою Стефана на вільній межі області та умовою Неймана на зовнішній межі області.

Нехай $\Omega=\Omega_0\cup\Omega_1$, $\overline{\Omega}_i\subset E_n$, $n\ge 2$, $\partial\Omega_i=S_i$, $Q_i=(0,T)\times\Omega_i$, $(i=0,1)$. У області Q_i розглянемо задачу про знаходження класичного розв'язку рівнянь з умовами