$$\frac{dx_1}{Q_1(t,x,F)} = \ldots = \frac{dx_n}{Q_n(t,x,F)} = dt\,. \qquad (20)$$

Позначимо через $\vec{\psi}(t,x) = \{\psi_1(t,x),\ldots,\psi_n(t,x)\}$ систему незалежних інтегралів, які при $t=0$ набувають значень $\vec{\psi}(x) = \vec{\psi}(0,x)$, а $\vec{\omega}(x)$ обернені функції до $\vec{\psi}(x)$. Тоді розв'язок задачі Коші (18), (19) для $\varphi \in C^{(1)}$ має вигляд

$$F(t,x) = \varphi\left[\omega_1\left(\vec{\psi}(t,x)\right),\ldots,\omega_n\left(\vec{\psi}(t,x)\right)\right]. \qquad (21)$$

Теорема. Нехай оператори $L_i(t,x,D)$ визначені в області $Q_i = (0,T)\times\Omega_i$ і рівномірно параболічні, $a_k^{(i)} \in C_{t,x}^{(\alpha)}(Q_i)$ при $|k|=2$, $a_k^{(i)} \in C_x^{(\alpha)}(Q_i)$, $\varphi_i \in C^{(2+\alpha)}(\Omega_i)$, $f_i \in C^{(\alpha)}(Q_i)$, b_1, $g_i \in C^{(\alpha)}(\Gamma_i)$, $(i=0,1)$, $S_1 \in C^{(2+\alpha)}$, $S_0(t) \in C^{(2+\alpha)}, t \in (0,\tau)$, $\varphi \in C^{(1)}$. Тоді існує класичний розв'язок задачі (1)–(6), який неперервно залежить від поточкових і крайових функцій (виконуються нерівності (13), (17)).

Приклад. Якщо у рівнянні (18) $Q_k = Q_k(t)$, то

$$F(t,x) = \varphi\left(x_1 - A_1(t) + A_1(0),\ldots,x_n - A_n(t) + A_n(0)\right), \quad A_k(t) = \int Q_k(t)dt, \quad \left(k=\overline{1,n}\right).$$

Якщо $Q_k = Q_k(x)$, то

$$F(t,x) = \varphi\left[\vec{\omega}\left(\vec{A}(x) - t\right)\right], \quad A_k(x) = \int \frac{dx_k}{Q_k(x)}, \quad \vec{A} = (A_1,\ldots,A_n),$$

де $\vec{\omega}\left(\vec{A}(x)\right) = x$.

1. Рубинштейн Л.И. Проблема Стефана. Рига, 1967. 2. Лейбензон Л.С. Собрание трудов. Т.4. М., 1955. 3. Матійчук М.І. Параболічні сингулярні крайові задачі. К., 1999.

УДК 512. 552.1

Матурін Ю.П.
Львівський національний університет ім. І. Франка

І-РАДИКАЛИ ТА НАПІВЛОКАЛЬНІ КІЛЬЦЯ

The properties of I-radicals over the semilocal ring are considered. In the paper there are obtained necessary and sufficient conditions for a semilocal ring over which every I-radical ixs a simple torsion.

Розглянуто властивості І-радикалів над напівлокальними кільцями. В праці одержано необхідні і достатні умови для напівлокального кільця, над яким кожний І-радикал є скрутом простого типу.

Всі кільця будемо вважати асоціативними з одиницею $1 \neq 0$, а модулі розглядаються тільки унітарні. Нехай R – кільце. Категорію лівих (правих) R-модулів будемо позначати через $R - Mod$ ($Mod - R$).

Нагадаємо, що ідемоптентним радикалом в категорії $R-Mod$ ($Mod-R$) називається підфунктор тотожного функтора 1_{R-Mod} (1_{Mod-R}) такий, що

1) $\forall M \in R-Mod$ $(\forall M \in Mod-R)$: $r(r(M)) = r(M)$;

2) $\forall M \in R-Mod$ $(\forall M \in Mod-R)$: $r(M / r(M)) = 0$.

Радикал Джекобсона кільця R будемо позначати через J(R).

Кільце R називається напівпростим, якщо воно є сумою своїх мінімальних лівих ідеалів.

Кільце називається напівлокальним, якщо $R / J(R)$ – напівпросте кільце.

Нехай P – простий лівий R-модуль і $J(P, R) := \{D | D-$ максимальний лівий ідеал в R і $R / D \cong P\}$.

Лема 1. Нехай R – напівлокальне кільце і P – простий лівий R-модуль. Тоді $\forall M \in R-Mod$: $Hom_R(M, P) = 0 \Leftrightarrow J(P, R)M = M$.

Доведення: Нехай M – лівий R-модуль.

$(\Rightarrow)$ Нехай $Hom_R(M, P) = 0$. Припустимо, що $J(P, R)M \neq M$. Тоді $M / (J(P, R)M)$ анулюється $J(P, R)$. Тому ми можемо розглядати, природно, $M / (J(P, R)M)$ як $R / J(P, R)$-модуль. Оскільки R – напівлокальне кільце і $J(P, R) \supseteq J(R)$, то $R / J(P, R)$ – напівпросте кільце.

Лівий модуль $R / J(P, R)$ копороджений простим лівим модулем P [2, с.109]. Тоді існує така послідовність:

$$0 \to R / J(P, R) \to \Pi_A P, \tag{1}$$

де A – деяка множина. Оскільки $R / J(P, R)$ - напівпросте кільце, то $R / J(P, R)$ – скінченно копороджений лівий модуль.

Отже, з (1) випливає, що існує точна послідовність

$$0 \to R / J(P, R) \to \Pi_F P, \tag{2}$$

де F – скінченна підмножина в A.

З (2) одержимо, що існує така підмножина D в F, що $R / J(P, R) \cong \oplus_D P$. Тому кільце $R / J(P, R)$ породжене простим лівим модулем P. Звідси випливає, що існує ізоморфізм

$$\beta : M / (J(P, R)M) \cong \oplus_B P,$$

де B – деяка множина.

Нехай $\alpha :: M \to M / (J(P, R)M)$ – природний епіморфізм. Оскільки $M / (J(P, R)M) \neq 0$, то $B \neq \varnothing$. Розглянемо природну u-проекцію $\pi_u : \oplus_B P \to P$, де u – деякий елемент з B. Зрозуміло, що $\pi_u \beta\alpha \neq 0$. Тому $Hom_R(M, P) \neq 0$. Протиріччя.

$(\Leftarrow)$ Нехай $J(P, R)M = M$. Припустимо, що існує ненульовий R-гомоморфізм лівих модулів $\delta : M \to P$. Тоді $\delta(M) \neq 0$. Тому маємо, що

$$0 \neq \delta(M) = \delta(J)P, R)M) = J(P, R)\delta(M) \subseteq J(P, R)P = 0.$$

Протиріччя.

Нехай P – простий лівий R-модуль. Розглянемо класи R- модулів

$$T_P := \{M \in R-Mod | Hom_R(M, P) = 0\},$$
$$F_P := \{N \in R-Mod | Hom_R(T, N) = 0 \text{ для всіх } T \in T_P\}.$$

Зрозуміло, що (T_P, F_P) – теорія скрутів для $R-Mod$ (див.[с. 139,1]). Нехай r(P) – відповідний ідемпотентний радикал.

Розглянемо лівий ідеал I кільця R і $r_I(M) = \sum\{N \le M | IN = N\}$ для будь-якого $M \in R-Mod$. Тоді r_I – ідемпотентний радикал в $R-Mod$ [6, с. 524].

Означення.(Горбачук О.Л.) Нехай I – лівий ідеал в R. Ідемпотентний радикал r_I називається I-радикалом.

Теорема 1. Нехай R – напівлокальне кільце і P – простий лівий R-модуль. Тоді $r(P) = r_S$, де $S = J(P, R)$.

Доведення. Використати лему 1.

Нехай S – підмножина кільця R. S називається T-нільпотентною справа (зліва), якщо для всякої послідовності $a_1, a_2, \dots$ в S існує таке $n \in N$, що

$$a_1 a_2 \cdots a_n = 0 \ (a_n \cdots a_2 a_1 = 0).$$

Кільце R називається досконалим справа (зліва), якщо R-напівлокальне кільце і J(R) – T-нільпотентний зліва (справа) ідеал.

Лема 2. Нехай R – напівлокальне кільце. Якщо кожний I-радикал є скрутом (= точним зліва ідемпотентним радикалом), то R – досконале зліва кільце.

Доведення: Нехай (T, F) – теорія скрутів, яка копороджена всіма простими R-модулями. Тоді

$T = \cap\{T_P | P -$простий лівий R-модуль$\}$

За теоремою 1 T_P – радикальні класи I-радикалів. Враховуючи умови леми 2, одержимо, що T_P – радикальні класи скрутів. Тому T теж радикальний клас деякого скруту, оскільки він є пертеном радикальних класів скрутів [4]. За теоремою 2 [8, с.213] маємо, що кожний ненульовий лівий R-модуль містить максимальний підмодуль. З 22.7.B [7, с.244] отримаємо, що J(R) – T-нільпотентний справа ідеал. Враховуючи напівлокальність кільця R, отримаємо, що R – досконале зліва кільце.

Множину усіх I-радикалів в $R-Mod$ позначатимемо через $Ir(l, R)$.

Лема 3. Нехай R – кільце, I, U – ідемпотентні ідеали в R_i $I \ne U$. Тоді $r_I \ne r_U$ і $r_I(M) = IM$ для будь-якого $M \in R-Mod$.

Доведення: Нехай I – ідемпотентний ідеал, тоді легко показати, що $S\colon \begin{cases} R-Mod \to R-Mod \\ M \mapsto IM \end{cases}$ – ідемпотентний радикал і $T(S) = T(r_I)$. Тому $S = r_I$ [1]. Нехай U – також ідемпотентний ідеал, причому $I \ne U$. Припустимо, що $r_I = r_U$. Тоді $U = U \cdot R = r_U(R) = r_I(R) = I \cdot R = I$. Протиріччя.

Лема 4. Нехай R – напівпросте кільце і n – кількість класів ізоморфних простих лівих R-модулів. Тоді $Card(Ir(l, R)) = 2^n$.

Доведення: Оскільки R – напівпросте кільце, то всі ідеали в ньому ідемпотентні і зрозуміло, що їх кількість 2^n, де n – кількість класів ізоморфних простих лівих R-модулів. За лемою 3 матимемо тоді, що $Card(Ir(l, R)) = 2^n$.

Лема 5. Нехай R-досконале зліва кільце. Тоді $Card(Ir(l,R)) = 2^n$, де n – кількість класів ізоморфних простих лівих модулів.

Доведення: Нехай $\varphi L: R \to R / J(R)$ – природний кільцевий гомоморфізм. Розглянемо відповідність

$$\Phi: \begin{cases} Ir(l,R) \to Ir(l,R / J(R)), \\ \qquad r_I \mapsto r_{\varphi(I)}, \end{cases} \quad \text{I – ідеал в R.}$$

Коректність задання відображення Ф легко перевіряється.

Доведемо, що Ф – бієкція.

Нехай I і U – ідеали в R і $r_{\varphi(I)} = r_{\varphi(U)}$. Покажемо що тоді $r_I = r_U$. Нехай $M \in R - Mod$ і $M \in T(r_I)$. Тоді $I(M / (J(R)M)) = (IM + J(R)M) / (J(R)M) = M / (J(R)M)$. Зрозуміло, що $M / (J(R)M) \in R / J(R) - Mod$. Тому $M / (J(R)M) \in T(r_{\varphi(I)}) = T(r_{\varphi(U)})$. Тоді $U(M / (J(R)M)) = M / (J(R)M)$, тобто $UM + J(R)M = M$. Тепер маємо, що

$$J(R)(M / (UM)) = (J(R)M + UM) / (UM) = M / (UM).$$

Враховуючи Т-нільпотентність справа J(R) і лему 28.3 [2, с.314], матимемо, що $M / (UM) = 0$, тобто $M = UM$. Це означає, що $M \in T(r_U)$. Ми довели, що $T(r_I) \subseteq T(r_U)$. Аналогічно доводиться, що $T(r_U) \subseteq T(r_I)$. Отже $r_I = r_U$.

Доведемо тепер сюр'єктивність для Ф. Якщо $\overline{S}$ – ідеал в $R / J(R)$, то існує ідеал S в R такий, що $\varphi(S) = \overline{S}$. Але тоді $r_{\overline{S}} = \Phi(r_S)$. Для закінчення доведення цієї леми використаємо лему 4 і той факт, що кількість класів ізоморфних простих лівих R-модулів дорівнює кількості класів ізоморфних простих лівих $R / J(R)$- модулів, якщо R – напівлокальне кільце [3].

Введемо тепер поняття скруту простого типу [1].

Розглянемо ідемпотентний радикал r, який відповідає теорії скрутів, що є породженою деяким класом простих лівих R-модулів. Тоді цей ідемпотентний радикал є скрутом. Такі скрути називаються скрутами простого типу.

Теорема 2. Нехай R – напівлокальне кільце. Якщо кожний І-радикал є скрутом простого типу, то $R \cong M_{n_1}(T_1) \times \ldots \times M_{n_k}(T_k)$, де T_i – локальні досконалі зліва і справа кільця.

Доведення: Нехай n – число кількість ізоморфних простих лівих (правих) R-модулів. [3]. Тоді скрутів простого типу в $R - Mod$ є 2^n. За лемою 2 маємо, що R – досконале зліва кільце. А за лемою 5 маємо, що $Card(Ir(l,R)) = 2^n$. Тоді з умови теореми отримаємо, що кожний скрут простого типу є І-радикалом. Використавши те, що для досконалого зліва кільця між множиною скрутів $Mod - R$ і множиною ідемпотентних ідеалів існує бієкція, а скрутів в $Mod - R$ є 2^n, одержимо, що ідемпотентних ідеалів в R є 2^n [1]. Тоді, враховуючи лему 3 і $Card(Ir(l,R)) = 2^n$, отримаємо, що кожний І - радикал r з $Ir(l,R)$ має вигляд r_S, де S – деякий ідемпотентний ідеал. Тому зрозуміло, що кожний І-радикал в $R - Mod$ зберігає епіморфізми. Оскільки ж кожен скрут простого типу є І-радикалом, то всі скрути простого типу є точними функторами.

Нехай r – скрут, який породжений всіма простими лівими R-модулями. Тоді він точний функтор. З теореми 3.1 [9] і наслідку 3.2 [9] матимемо, що кільце R є напівартіновим зліва. Тому всі скрути в $R-Mod$ є скрутами простого типу [1, 4]. З теорем 3.1, 3.3 [9] випливає, що

$$R \cong M_{n_1}(T_1)\times\ldots\times M_{n_k}(T_k)$$

де T_i – локальні досконалі справа кільця.

Оскільки R досконале зліва, то $M_{n_i}(T_i)$ – досконалі зліва кільця [2]. Оскільки $M_{n_i}(T_i)-Mod$ і T_i-Mod є Моріта – еквівалентними, то T_i – досконалі зліва.

Отже, T_i – локальні досконалі зліва і справа кільця.

Наслідок 1. Нехай R - кільце. Щоб R було напівлокальним кільцем і кожний I-радикал в $R-Mod$ був скрутом простого типу, необхідно і достатньо, щоб $R \cong M_{n_1}(T_1)\times\ldots\times M_{n_k}(T_k)$, де T_i – локальні досконалі зліва і справа кільця.

Доведення. ($\Rightarrow$) Використати теорему 2.

($\Leftarrow$) Застосовувати те, що всі I-радикали тривіальні в $M_{n_i}(T_i)-Mod$ (див. лему 5) і всі скрути тривіальні в $M_{n_i}(T_i)-Mod$. В першому випадку використовується досконалість T_i зліва, а в другому – справа.

На закінчення автор щиро дякує О.Л. Горбачуку за керівництво при роботі над статтею.

1. Stenström B. Rings of quotients. Berlin, Springer – Verlag, 1975. 2. Anderson F., Fuller K. Rings and categories of modules. Berlin, Springer – Verlag, 1974. 3. Каш Ф. Модули и кольца. М., 1981. 4. Кашу А.И. Радикалы и кручения в модулях. Кишинёв, 1983. 5. Ламбек И. Кольца и модули. М., 1971. 6. Горбачук Е.Л. О кручениях в модулях // Укр. мат. журнал. 1973. Т.25. № 4. С. 521-527. 7. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т.2. М., 1979. 8. Горбачук Е.Л., Комарницкий Н.Я. I-радикалы и их свойства // Укр. мат. журнал. 1978. Т.30, №. 2. С.212–217. 9. Teply M. Homological dimension and splitting torsion theories // Pacific J. Math. 1970. P. 447-459.

УДК 531.314.2

Мацюк Р.Я.
ІППММ НАН України

ЛЕЖАНДРІВСЬКІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДРУГОГО РЯДУ В МЕХАНІЦІ РЕЛЯТИВІСЬКОЇ ДЗИҐИ*

Generalized Legendre transformation is applied to the third-order equation of motion of the relativistic spherical top with Pirani constraint.

Узагальнене перетворення Лежандра застосоване до рівняння руху третього порядку для релятивіської дзиґи, що підлягає в'язі Пірані.

* Стаття опублікована з дотриманням термінології автора як спроба альтернативного підходу до формування української математичної лексики.