УДК 517.95

МельникО.М., Миколик А.Д., Пташник Б.Й.
ІППММ НАН України

ЗАДАЧА ТИПУ ДІРІХЛЕ ДЛЯ НЕІЗОТРОПНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

The conditions of the correctness for problem with local two-point conditions by some variable and with periodic conditions by another coordinates for linear nonisotropic partial differential equations with constant coefficients are established.

Встановлено умови коректності задачі з локальними двоточковими умовами за виділеною змінною та умовами періодичності за іншими координатами для лінійних неізотропних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами.

1. Задачі з даними на всій границі обмеженої області для лінійних загальних (зокрема гіперболічних) рівнянь із частинними похідними є, взагалі, умовно-коректними, а їх розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників (див. [1,2,5-7] та бібліографію в них). Дана робота є продовженням праць [5, 6,гл.3] длябезтипних рівнянь, неізотропних стосовно похідних за змінною t та змінними $x_1,\dots,x_p$.

Нижче використовуватимемо позначення, наведені в [6], а також такі функціональні простори: $A_\delta^\beta\left(\Omega_{2\pi}^p\right)$ $(\delta>0,\beta>0)$– простір 2π-періодичних за $x_1,\dots,x_p$ функцій $\varphi(x)=\sum\limits_{|k|\ge 0}\varphi_k\exp(ik,x)$, для яких скінченна норма $\|\varphi\|_{\delta,\beta}=\sum\limits_{|k|\ge 0}|\varphi_k|\exp\left(\delta|k|^\beta\right)$; $C_n\left([0,T],A_\delta^\beta\left(\Omega_{2\pi}^p\right)\right)$ – простір 2π-періодичних за $x_1,\dots,x_p$ функцій $v(t,x)=\sum\limits_{|k|\ge 0}u_k(t)\exp(ik,x)$ таких, що $\dfrac{\partial^j v}{\partial t^j}$, $j=0,1,\dots,n,$– неперервна за t і для будь-якого фіксованого $t\in[0,T]$ належить простору $A_\delta^\beta\left(\Omega_{2\pi}^p\right)$, $\|v(t,x)\|_{C_n\left([0,T],A_\delta^\beta\left(\Omega_{2\pi}^p\right)\right)}=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{|k|\ge 0}\max\limits_{0\le t\le T}\left|u_k^{(j)}(t)\right|\exp\left(\delta|k|^\beta\right)$;

$C^{(r,q)}\left(D^p\right)$– простір функцій $u(t,x)$ з нормою $\|u(t,x)\|_{C^{(r,q)}\left(D^p\right)}=\sum\limits_{\substack{j\le r\\|\nu|\le q}}\max\limits_{D^p}\left|\dfrac{\partial^{r+|\nu|}u(t,x)}{\partial t^r\partial x_1^{\nu_1}\dots\partial x_p^{\nu_p}}\right|$.

Зауважимо, що $A_\delta^\beta\left(\Omega_{2\pi}^p\right)\subset G_\beta$, де G_β– клас Жеврe 2π-періодичних функцій порядку $\dfrac{1}{\beta}$ типу Берлінга [3,с.113].

2. В області $D^p = \{(t,x) \in R^{p+1} : 0 \le t \le T, x \in \Omega_{2\pi}^p\}$, де $\Omega_{2\pi}^p -$ p-вимірний тор, розглянемо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u \equiv \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2n} + \sum_{\substack{|\nu| \le q \\ j<n}} a_{j\nu}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2j} \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_p^{\nu_p}}\right]u(t,x) = f(t,x), \tag{1}$$

$$l_m(u) \equiv \left.\frac{\partial^{2(m-1)}u}{\partial t^{2(m-1)}}\right|_{t=0} = \varphi_m(x), \quad l_{n+m}(u) \equiv \left.\frac{\partial^{2(m-1)}u}{\partial t^{2(m-1)}}\right|_{t=T} = \varphi_{n+m}(x), \quad m = 1, \dots, n, \tag{2}$$

де $n \ge 1, a_{j\nu} \in R,\ j = 0,1,\dots,n-1, |\nu| \le q$. Вигляд області D^p накладає умови 2π-періодичності за змінними $x_1, \dots, x_p$ на функції $u(t,x),\ f(t,x),\ \varphi_j(x),\ j = 1,\dots,2n$.

Розв’язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k| \ge 0} u_k(t) \exp(ik, x) \tag{3}$$

де $u_k(t)$, $k \in Z^p$, є розв’язком задачі

$$L(d/dt, ik)u_k(t) = f_k(t), \ l_m(u_k) = \varphi_{mk}, \quad m = 1,\dots,2n, \tag{4}$$

в якій $f_k(t)$, φ_{mk}, $m = 1,\dots,2n$ – коефіцієнти розвинення в ряди Фур'є за змінними $x_1,\dots,x_p$ функцій $f(t,x), \varphi_m(x), m = 1,\dots,2n$, відповідно.

При цьому $u_k(t) = v_k(t) + w_k(t)$, де $v_k(t)$ та $w_k(t)$ розв'язки задач

$$L(d/dt, ik)v_k(t) = 0, \ l_m(v_k) = \varphi_{mk}, \quad m = 1,\dots,2n, \tag{5}$$

$$L(d/dt, ik)w_k(t) = f_k(t), \ l_m(w_k) = 0, \quad m = 1,\dots,2n. \tag{6}$$

Надалі вважатимемо, що для будь-якого $k \in Z^p$ усі корені $\pm\lambda_j \equiv \pm\lambda_j(k)$, $j = 1,\dots,n$, рівняння

$$\lambda^{2n} + \sum_{\substack{|\nu| \le q \\ j<n}} a_{j\nu} \lambda^{2j} (ik_1)^{\nu_1} \dots (ik_p)^{\nu_p} = 0 \tag{7}$$

є різні, а, отже, відмінні від нуля, і що $\operatorname{Re}\lambda_j \ge 0$, $j = 1,\dots,n$; для них справедливі оцінки

$$|\lambda_j(k)| \le M|k|^{q/2}, \ j = 1,\dots,n. \tag{8}$$

Однорідне рівняння $L(d/dt, ik)z(t) = 0$ має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$\left\{z_{k,j} = \exp(\lambda_j(k)t), z_{k,n+j} = \exp(-\lambda_j(k)t), j = 1,\dots,n\right\}.$$

Характеристичний визначник задачі (5) дорівнює

$$\Delta(k) \equiv \det\left\|l_m(z_{k,j})\right\|_{m,j=1}^{2n} = \prod_{l=1}^{n}\left(\exp(-\lambda_l T) - \exp(\lambda_l T)\right) \prod_{1 \le \alpha < \beta \le n}\left(\lambda_\beta^2 - \lambda_\alpha^2\right)^2. \tag{9}$$

Теорема 1. Для єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $H_r^{2n}(D^p), r \ge q$, необхідно і достатньо, щоб рівняння

$$\lambda_j(k)T - i\pi m = 0\,,\ \ j = 1,\dots,n\,,$$

не мали розв'язків у цілих числах $k_1,\dots,k_p,m$.

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 4.1 з [5, гл.2].

Наслідок. Для єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $H_r^{2n}\left(D^p\right), r \geq q$, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $k \in Z^p$ виконувалась хоча б одна з умов

а) $\operatorname{Re}\lambda_j(k) \neq 0,\ j = 1,\dots,n$; б) $\operatorname{Im}\lambda_j(k) \neq m\pi/T$, $m \in Z$ $j = 1,\dots,n$.

3. Розглянемо питання про існування розв'язку задачі (1), (2) у припущенні, що справджуються умови єдиності розв'язку. Тоді для будь-якого $k \in Z^p$ кожна із задач (5) та (6) має єдиний розв'язок, причому

$$v_k(t) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{2n} \frac{\varphi_{mk}A_{m,s}\exp\left(\lambda_s t\right) + \varphi_{mk}A_{m,n+s}\exp\left(-\lambda_s t\right)}{\Delta(k)}\,, \tag{10}$$

$$w_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)d\tau\,, \tag{11}$$

де $A_{l,j}$, $l,j = 1,\dots,2n$, – алгебраїчне доповнення елемента, який лежить на перетині l-го рядка та j-го стовпця, визначника $\Delta(k)$, а $G_k(t,\tau)$ – функція Гріна задачі (6). Величини $A_{l,j}(k)$ виражаються формулами

$$\left.\begin{array}{ll} A_{r,s} = \exp\left(-\lambda_s T\right)B_{r,s}, & A_{r,n+s} = -\exp\left(\lambda_s T\right)B_{r,s}, \\ A_{n+r,s} = -B_{r,s}, & A_{n+r,n+s} = B_{r,s} \end{array}\right\} r,s = 1,\dots,n, \tag{12}$$

де

$$B_{r,s} = (-1)^{r+s}C_{n-r}^{(s)}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq s}}^{n}\left(\exp\left(-\lambda_l T\right) - \exp\left(\lambda_l T\right)\right)\prod_{\substack{1\leq\alpha<\beta\leq n\\ \alpha\neq s,\ \beta\neq s}}\left(\lambda_\beta^2 - \lambda_\alpha^2\right)^2\prod_{1\leq\alpha<\beta\leq n}\left(\lambda_\beta^2 - \lambda_\alpha^2\right)^2, \tag{13}$$

$C_{n-r}^{(s)}$ – сума різних добутків елементів λ_j^2 ($j = 1,\dots,n$; $j \neq s$), взятих по n-r в кожному добутку ($C_0^{(s)} \equiv 1$). У квадраті $K = \left\{(t,\tau) \in \oplus_+^2 : 0 \leq t,\tau \leq T\right\}$ (крім сторін $\tau = 0, \tau = T$) функція Гріна задачі (6) визначається формулою [4]

$$G_k(t,\tau) = g_k(t,\tau) - \frac{1}{\Delta(k)}\sum_{m=1}^{2n} l_m\left(g_k\right)\sum_{s=1}^{n}\left(A_{m,s}\exp\left(\lambda_s t\right) + A_{m,n+s}\exp\left(-\lambda_s t\right)\right), \tag{14}$$

де

$$g_k(t,\tau) = \frac{(-1)^{n+1}\operatorname{sgn}(t-\tau)}{4}\sum_{j=1}^{n} D_j\lambda_j^{-1}\left(\exp\left(\lambda_j(t-\tau)\right) - \exp\left(\lambda_j(\tau - t)\right)\right);$$

$$\left.\begin{aligned} l_m(g_k) &= \frac{(-1)^n}{4}\sum_{j=1}^{n} D_j\lambda_j^{2n-3}\left(\exp\left(-\lambda_j\tau\right)-\exp\left(\lambda_j\tau\right)\right),\\ l_{n+m}(g_k) &= \frac{(-1)^{n+1}}{4}\sum_{j=1}^{n} D_j\lambda_j^{2n-3}\left(\exp\left(\lambda_j(T-\tau)\right)-\exp\left(\lambda_j(\tau-T)\right)\right),\end{aligned}\right\} m=1,\ldots,n;$$

$$D_j = \prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq j}}^{n}\left(\lambda_j^2-\lambda_\beta^2\right)^{-1},\ j=1,\ldots,n.$$

На основі формул (3),(10)-(14) отримаємо формальне зображення розв'язку задачі (1), (2) у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{|k|\geq 0}\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{m+n}C_{n-m}^{(s)}D_s}{\exp(-\lambda_s T)-\exp(\lambda_s T)}\left(\varphi_{mk}\left(\exp\left(\lambda_s(t-T)\right)-\exp\left(\lambda_s(T-t)\right)\right)+\right.\right.$$
$$+\varphi_{n+m,k}\left(\exp(-\lambda_s t)-\exp(\lambda_s t)\right)\Big)+\int_0^T\frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{4}\sum_{j=1}^{n}\Big(D_j\lambda_j^{-1}\left(\exp\left(\lambda_j(t-\tau)\right)-\exp\left(\lambda_j(\tau-t)\right)\right)-$$
$$\frac{(-1)^{m+n}C_{n-m}^{(s)}D_s}{\exp(-\lambda_s T)-\exp(\lambda_s T)}\Big(l_m(g_k)\left(\exp\left(\lambda_s(t-T)\right)-\exp\left(\lambda_s(T-t)\right)\right)+$$
$$\left.\left.+\,l_{n+m}(g_k)\left(\exp(-\lambda_s t)-\exp(\lambda_s t)\right)\Big)\Big)f_k(\tau)d\tau\right)\exp(ik,x) \qquad (15)$$

Ряд (15) загалом є розбіжним, бо величини $\left|\lambda_\beta^2(k)-\lambda_\alpha^2(k)\right|$ та $\left|\exp\left(-\lambda_j(k)T\right)-\exp\left(\lambda_j(k)T\right)\right|$, будучи відмінними від нуля, можуть набирати як завгодно малі значення для нескінченного числа векторів $k\in Z^p$.

Теорема 2. Нехай існують такі сталі $C_j>0,\ s_j\in\oplus,\ j=1,2,3$, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in\subseteq^p$ виконуються нерівності

$$\prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq j}}^{n}\left|\lambda_\beta^2(k)-\lambda_\alpha^2(k)\right|\geq C_1|k|^{-s_1},\ j=1,\ldots,n, \qquad (16)$$

$$\left|\exp\left(-\lambda_j(k)T\right)-\exp\left(\lambda_j(k)T\right)\right|\geq C_2|k|^{-s_2},\ j=1,\ldots,n, \qquad (17)$$

$$\left|\lambda_j(k)\right|\geq C_3|k|^{-s_3},\ j=1,\ldots,n. \qquad (18)$$

Нехай $\varphi_m\in A_{\delta_1}^{\beta}\left(\Omega_{2\pi}^p\right)$, $m=1,\ldots,2n$, $f\in C\left([0,T],A_{\delta_2}^{\beta}\left(\Omega_{2\pi}^p\right)\right)$, $\delta_1>MT$, $\delta_2>2MT$, $\beta=q/2$, *де M – константа із (8). Тоді існує розв'язок задачі (1),(2) із простору* $C^{(2n,q)}\left(D^p\right)$, *який неперервно залежить від функцій* $f(t,x)$ *та* $\varphi_m(x)$, $m=1,\ldots,2n$.

Доведення. Враховуючи формули (3),(10)-(14) та оцінки (16)-(18), отримаємо

$$\|u(t,x)\|_{C^{(2n,q)}(D^p)} \le C_4 \sum_{|k|\ge 0} |k|^{s_1+s_2+2nq} \sum_{m=1}^{2n} \left(|\varphi_{mk}| \exp\left(MT|k|^{q/2}\right) + |k|^{\alpha} \bar{f}_k \exp\left(2MT|k|^{q/2}\right)\right), \qquad (19)$$

де $\alpha = \max\left\{s_3; \frac{(2n-3)q}{2}\right\}$, $\bar{f}_k = \max_{0\le t\le T} |f_k(t)|$. Скориставшись елементарною нерівністю

$$b^{\mu} \le A(\mu)\exp(\varepsilon b),\ A(\mu)>0,$$

яка при $0<b<+\infty$ справедлива для довільних $\mu \ge 0$ і $\varepsilon>0$, із оцінки (19) одержимо

$$\|u(t,x)\|_{C^{(2n,q)}(D^p)} \le C_5\left(\sum_{m=1}^{2n} \|\varphi_m(x)\|_{\delta_1,\beta} + \|f(t,x)\|_{C\left([0,T],A^{\beta}_{\delta_2}\left(\Omega^p_{2\pi}\right)\right)}\right).$$

Із останньої нерівності випливає доведення теореми.

4. З'ясуємо можливість виконання оцінок (16)-(18). Позначимо через $a=\left(a_1,\ldots,a_\gamma\right)$ вектор, складений із усіх коефіцієнтів $a_{0,\nu}$, $|\nu|\le q$, рівняння (1).

Теорема 3. Для майже всіх (стосовно міри Лебега в R^{γ}) векторів a нерівності (18) виконуються при $s_3 > p+(2n-3)q/2$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in Z^p$.

Доведення. Оскільки $\lambda_j(k)\ne 0$, $j=1,\ldots,n$, то вільний член рівняння (7) $F(k,a)\ne 0$. Нехай для вектора $k\ne(0)$ $|k_1| = \max_{1\le j\le p}|k_j|$ і $a_1 \equiv a_{(0,q,0,\ldots,0)} \ne 0$, що, звичайно, не обмежує загальності. Враховуючи оцінки (8), отримуємо, що для довільного r $(1\le r\le n)$ справджуються нерівності

$$M^{2n-1}|k|^{\frac{(2n-1)q}{2}}|\lambda_r(k)| \ge |F(k,a)| = \left|a_1(ik_1)^q + F_1(k,a)\right| \ge |k_1|^q |a_1 + A(k)|, \qquad (20)$$

де величина $A(k)\equiv \mathrm{Re}\left\{(ik_1)^{-q}F_1(k,a)\right\}$ не залежить від a_1 і є рівномірно обмежена для всіх $k\in Z^p\setminus\{(0)\}$. Із (20) видно, що для доведення теореми 3 досить показати, що міра тих векторів $a\in R^{\gamma}$, для яких нерівність

$$|a_1 + A(k)| < |k|^{-p-\varepsilon} \quad (\varepsilon>0)$$

має безмежну множину розв'язків у цілих числах $k_1,\ldots,k_p$ ($|k|\ne 0$), дорівнює нулеві. Доведення останнього твердження проводиться за схемою доведення теореми 4.4 із [6,гл.2].

Для встановлення оцінки (17) скористаємось таким твердженням.

Лема. Нехай $\Phi(k)=\Phi\left(k_1,\ldots,k_p\right)$ – обмежена послідовність дійсних чисел. Тоді нерівність

$$\left|\Phi(k) - \frac{lb}{\|k\|^r}\right| < \frac{1}{|k|^{p+r+\varepsilon}},\ r>0,\ \varepsilon>0, \qquad (21)$$

для майже всіх (стосовно міри Лебега в R) чисел $b>0$ має не більше, ніж скінченну кількість розв'язків у цілих числах $k_1,\ldots,k_p,l$, $l\ne 0$, $|k|\ne 0$.

Доведення аналогічне доведенню леми 2.4 з [6,гл.1].

Теорема 4. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* R^{γ}*) векторів* a *та для майже всіх (стосовно міри Лебега в* R*) чисел* π/T *оцінки (17) справджуються для всіх (крім скінченного числа) векторів* $k \in Z^{p}$ *при* $s_2 > \max\{p; p + (2n-3)q/2\}$.

Доведення. Якщо $\operatorname{Im}\lambda_j(k) = 0$, то, на основі теореми (3), отримуємо, що для майже всіх векторів $a \in R^{\gamma}$ справджуються оцінки

$$\left|\exp\left(-\lambda_j(k)T\right) - \exp\left(\lambda_j(k)T\right)\right| = 2\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\left(\operatorname{Re}\lambda_j(k)T\right)^{2p+1}}{(2p+1)!} > T\operatorname{Re}\lambda_j(k) =$$

$$= T\left|\lambda_j(k)\right| \geq C_6|k|^{-p-(2n-3)q/2-\varepsilon},\ \varepsilon > 0,\ j = 1,\ldots,n,\ |k| > K > 0. \tag{22}$$

Якщо $\operatorname{Im}\lambda_j(k) \neq 0$, то, на основі леми, враховуючи, що для довільного $x \in [0;\pi/2]$ $\sin x \geq 2x/\pi$, встановимо, що для майже всіх чисел π/T і для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in Z^{p}$ виконуються оцінки

$$\left|\exp\left(-\lambda_j(k)T\right) - \exp\left(\lambda_j(k)T\right)\right| > |k|^{q/2}\frac{T}{\pi}\left|\frac{\operatorname{Im}\lambda_j(k)}{|k|^{q/2}} - \frac{\pi}{T}\frac{m}{|k|^{q/2}}\right| \geq C_7|k|^{-p-\varepsilon}, \varepsilon > 0. \tag{23}$$

Із нерівностей (22) та (23) випливає доведення теореми.

Позначимо через δ кількість розв'язків у цілих невід'ємних числах нерівності $\nu_1 + \ldots + \nu_p \leq q$, а через $b = (b_1,\ldots,b_{\gamma})$ – вектор, складений з усіх коефіцієнтів $a_{j\nu}$ рівняння (1), де $\gamma = \delta(n-1)$.

Теорема 5. Для майже всіх (стосовно міри Лебега в R^{γ}) векторів b нерівність (16) справджується для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in Z^{p}$ при $s_1 > (p + q(n-3))(n-1)/2$.

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 4.5 із [6,гл.2].

1. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. К., 1965. 2. Бобик І.О., Бобик О.І., Пташник Б.Й. Крайові задачі для безтипних диференціальних рівнянь // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех. - матем. 1997. Вип. 47. С.32-39. 3. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. К., 1984. 4. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969. 5. Пташник Б.Й. Задача типу Діріхле для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. 1970. 22, N 6. С. 829-836. 6. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К. 1984. 7. Пташник Б.И., Штабалюк П.И. Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным // Дифференц.уравнения. 1986. 22, N 4. С.669-678.