УДК 517.948

Ментинський С.М.
ІППММ НАН України

ЗАСТОСУВАННЯ ДВОСТОРОННІХ ІТЕРАЦІЙ ДО НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

One algorithm of two-sided approximating of the solutions of a linear boundary value problem is built for an ordinary differential equation of the maiden order. The conditions of existence both uniqueness of the solution are investigated also estimation of convergence of algorithm are obtained.

Побудовано алгоритм двосторонньої апроксимації розв'язків лінійної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння першого порядку. Досліджено умови існування єдності розв'язку, та отримано оцінки збіжності алгоритму.

Використання двосторонніх методів Чаплигіна та Курпеля на практиці часто неможливе через те, що відповідні лінеаризовані рівняння рідко вдається розв'язати у замкненому вигляді. Труднощі при використанні таких методів виникають також через потребу використовувати похідні відповідних операторів, які входять в структуру ітерацій- них формул. Б. Шуваром [1] (див. також [2]) запропоновано двосторонні аналоги методів Чаплигіна та Курпеля, структура яких не вимагає диференційовності згаданих операторів. При цьому, за певних умов, цим алгоритмам властива надлінійна, зокрема, квадратична збіжність ітерацій, характерна для основних варіантів методів Чаплигіна і Курпеля.

Застосовуємо один з двосторонніх методів Б Шувара до задачі

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), \tag{1}$$

$$\alpha x(0) + \beta x(T) = \gamma, \tag{2}$$

де $x(t)$ – елемент $C^{R_n}[0;T]$ неперервних m-вимірних векторних функцій скалярного аргументу $t \in [0;T]$; $f(t,x(t)): D = [0;T] \times [a;b] \to B,\quad (a \le b,\quad a,b \in B)$; γ – m-вимірний сталий вектор; α і β – сталі матриці порядку $m \times m$.

Задача (1),(2), за дещо інших припущень, досліджувалася в [3] (див. також [4, 5]).

Запровадимо позначення

$$\Lambda[\varphi(t),\psi(t)] = (\alpha+\beta)^{-1}\alpha\int_0^t \varphi(s)ds + (\alpha+\beta)^{-1}\beta\int_T^t \psi(s)ds, \tag{3}$$

Припускаємо, що права частина рівняння (1) при $t \in [0;T]$, $x \in [a;b]$має вигляд

$$f(t, x(t)) \equiv F(t, x(t), x(t)), \tag{4}$$

де $F(t, x(t), x(t))$ – неперервна за сукупністю аргументів функція.

Нехай:

1) матриця $\alpha+\beta$ є неособливою, $(\alpha+\beta)^{-1}\alpha \ge \theta$, $(\alpha+\beta)^{-1}\beta \ge \theta$.

2) задані матриці $G_k(t,y(t),z(t))$, $\alpha_k(t,y(t),z(t))$, $A_k(t,y(t),z(t))$ ($k=1,2$) неперервних за сукупністю аргументів, неспадних за y, незростаючих за z, при $t\in[0;T]$, $y,z\in[a;b]$ невід'ємних дійсних функцій $g_{i,j}^{(k)}(t,y(t),z(t))$, $\alpha_{i,j}^{(k)}(t,y(t),z(t))$, $a_{i,j}^{(k)}(t,y(t),z(t))$, ($k=1,2,\ i,j=1,2,3,...m$), для яких із співвідношень $y(t)\le z(t)$, $t\in[0;T]$, $x,y,z\in[a;b]$ випливають нерівності

$$\begin{gathered}(G_1(t,y(t),z(t))+\alpha_1(t,y(t),z(t))-A_1(t,z(t),y(t)))(z(t)-y(t))\le\\ \le F(t,z(t),x(t))-F(t,y(t),x(t)),\\ F(t,x(t),z(t))-F(t,x(t),y(t))\le\\ \le -(G_2(t,y(t),z(t))+\alpha_2(t,y(t),z(t))-A_2(t,z(t),y(t)))(z(t)-y(t)).\end{gathered} \tag{5}$$

3) задані умовою 2) матриці $G_k(t,y(t),z(t))$, $\alpha_k(t,y(t),z(t))$, $A_k(t,y(t),z(t))$ такі, що співвідношення $y(t)\le z(t)$, $t\in[0;T]$, $x,y,z\in[a;b]$

$$\begin{gathered}p(t)\ge\Lambda[G_1(t,y,z)p(t)+G_2(t,y,z)q(t);-(G_1(t,y,z)+\alpha_1(t,y,z))q(t)-(G_2(t,y,z)+\alpha_2(t,y,z))p(t)],\\ q(t)\ge\Lambda[(G_1(t,y,z)+\alpha_1(t,y,z))q(t)+(G_2(t,y,z)+\alpha_2(t,y,z))p(t);-G_1(t,y,z)p(t)-G_2(t,y,z)q(t)]\end{gathered} \tag{6}$$

спричинюють нерівності $p(t)\ge\theta$, $q(t)\ge\theta$.

Лема 1. Нехай справджуються умови 1)-3) і система

$$\begin{cases} y_{n+1}(t)=\Lambda[G_1(t,y_n,z_n)(y_{n+1}-y_n);(G_1(t,y_n,z_n)+\alpha_1(t,y_n,z_n))(z_{n+1}-z_n)]-\\ -\Lambda[G_2(t,y_n,z_n)(z_{n+1}-z_n);(G_2(t,y_n,z_n)+\alpha_2(t,y_n,z_n))(y_{n+1}-y_n)]+\\ +\Lambda[(A_1(t,y_n,z_n)+A_2(t,y_n,z_n))(y_n-z_n);(A_1(t,y_n,z_n)+A_2(t,y_n,z_n))(z_n-y_n)]\\ +\Lambda[F(t,y_n,z_n);F(t,z_n,y_n)]+(\alpha+\beta)^{-1}\gamma;\\ z_{n+1}(t)=\Lambda[(G_1(t,y_n,z_n)+\alpha_1(t,y_n,z_n))(z_{n+1}-z_n);G_1(t,y_n,z_n)(y_{n+1}-y_n)]-\\ -\Lambda[(G_2(t,y_n,z_n)+\alpha_2(t,y_n,z_n))(y_{n+1}-y_n);G_2(t,y_n,z_n)(z_{n+1}-z_n)]+\\ +\Lambda[(A_1(t,y_n,z_n)+A_2(t,y_n,z_n))(z_n-y_n);(A_1(t,y_n,z_n)+A_2(t,y_n,z_n))(y_n-z_n)]\\ +\Lambda[F(t,z_n,y_n);F(t,y_n,z_n)]+(\alpha+\beta)^{-1}\gamma;\end{cases} \tag{7}$$

при кожному $n=0,1,2,...$

$$y_0(t)=a,\quad z_n(t)=b, \tag{8}$$

має єдиний розв'язок. Тоді з нерівностей

$$y_0(t)\le y_1(t)\le z_1(t)\le z_0(t), \tag{9}$$

випливають співвідношення

$$y_n(t)\le y_{n+1}(t)\le z_{n+1}(t)\le z_n(t). \tag{10}$$

Доведення. Умови леми постулюють виконання співвідношень (10) при $n=0$.

Оскільки можна записати

$$\Lambda[\varphi(t),\psi(t)]=\Lambda^+[\varphi(t)]-\Lambda^-[\psi(t)], \tag{11}$$

де $\Lambda^{+}[\varphi(t)]=(\alpha+\beta)^{-1}\alpha\int_{0}^{t}\varphi(s)ds,\quad \Lambda^{+}[\psi(t)]=(\alpha+\beta)^{-1}\beta\int_{t}^{T}\psi(s)ds$ – лінійні додатні оператори, то згідно з умовами (1) та _2) з правдивості нерівностей (10) при $n=k-1$, отримаємо

$$\begin{aligned}&y_{k+1}(t)-y_k(t)\geq\Lambda[G_1(t,y_k,z_k)(y_{k+1}-y_k)-G_2(t,y_k,z_k)(z_{k+1}-z_k);(G_1(t,y_k,z_k)+\\&+\alpha_1(t,y_k,z_k))(z_{k+1}-z_k)-(G_2(t,y_k,z_k)+\alpha_2(t,y_k,z_k))(y_{k+1}-y_k)],\\&z_k(t)-z_{k+1}(t)\geq\Lambda[(G_1(t,y_k,z_k)+\alpha_1(t,y_k,z_k))(z_k-z_{k+1})+(G_2(t,y_k,z_k)+\\&+\alpha_2(t,y_k,z_k))(y_{k+1}-y_k);-G_1(t,y_k,z_k)(y_{k+1}-y_k)-G_2(t,y_k,z_k)(z_k-z_{k+1})].\end{aligned}\tag{12}$$

З попередніх нерівностей, на основі умови 3) маємо

$$\begin{cases}z_{k+1}(t)\leq z_k(t),\\ y_k(t)\leq y_{k+1}(t),\end{cases}\quad (t\in[0;T]).\tag{13}$$

Далі, із співвідношень (13) після нескладних перетворень, на основі тих же умов (1), (2) отримаємо

$$\begin{aligned}&z_{k+1}(t)-y_{k+1}(t)\geq\Lambda[(G_1(t,y_k,z_k)+G_2(t,y_k,z_k))(z_{k+1}-y_{k+1});(G_1(t,y_k,z_k)+\\&+\alpha_1(t,y_k,z_k)+G_2(t,y_k,z_k)+\alpha_2(t,y_k,z_k))(z_{k+1}-y_{k+1})],\\&z_{k+1}(t)-y_{k+1}(t)\geq\Lambda[(G_1(t,y_k,z_k)+\alpha_1(t,y_k,z_k)+G_2(t,y_k,z_k)+\alpha_2(t,y_k,z_k))\times\\&\times(z_{k+1}-y_{k+1});-(G_1(t,y_k,z_k)+G_2(t,y_k,z_k))(z_{k+1}-y_{k+1})].\end{aligned}\tag{14}$$

З нерівностей (14) на підставі умови 3) отримуємо

$$y_{k+1}(t)\leq z_{k+1}(t)..\tag{15}$$

Отже, зважаючи на принцип математичної індукції, можна вважати лему доведеною.

Зауваження 1. За припущення про існування на $[a;b]$ розв’язку $x^*(t)$ задачі (1), (2) умови леми 1 дають підставу для більш загального твердження, а саме:

з правдивості умов 1)-3), співвідношень (8),(9) та

$$a=y_0(t)\leq x^*(t)\leq z_0(t)=b,\tag{16}$$

у випадку, коли система (7) має розв’язок при кожному $n=0,1,2,...$ випливають співвідношення $y_n(t)\leq y_{n+1}(t)\leq x^*(t)\leq z_{n+1}(t)\leq z_n(t)$ ($n=0,1,2,...\ t\in[0;T]$) (17)

Нехай

4) задані матриці $\beta_1(t,y(t),z(t))$, $\beta_2(t,y(t),z(t))$ неперервних за сукупністю аргументів, неспадних за y, незростаючих за z, невід’ємних при $t\in[0;T]$, $y,z\in[a;b]$ дійсних функцій $\beta^{(1)}_{i,j}(t,y(t),z(t))$, $\beta^{(2)}_{i,j}(t,y(t),z(t))$, ,($i,j=1,2,3,...m$), для яких (разом з матрицями $G_1(t,y(t),z(t))$, $G_2(t,y(t),z(t))$, $A_1(t,y(t),z(t))$, $A_2(t,y(t),z(t))$заданими умовою (2) із співвідношень $y(t)\leq z(t)$, $t\in[0;T]$, $x,y,z\in[a;b]$ випливають нерівності

$$\begin{aligned}&F(t,z(t),x(t))-F(t,y(t),x(t))\leq\\&\leq(G_1(t,y(t),z(t))+\beta_1(t,y(t),z(t))-A_1(t,z(t),y(t)))(z(t)-y(t)).\\&-(G_2(t,y(t),z(t))+\beta_2(t,y(t),z(t))-A_2(t,z(t),y(t)))(z(t)-y(t))\leq\\&\qquad\leq F(t,x(t),z(t))-F(t,x(t),y(t)).\end{aligned}\tag{18}$$

З правдивості умов (1)–(4), згідно з наведеними вище міркуваннями, отримаємо нерівності

$$\begin{aligned} & z_{n+1}(t)-y_{n+1}(t)\le \Lambda\left[\left(G_1(t,y_n,z_n)+G_2(t,y_n,z_n)\right)(z_{n+1}-y_{n+1});\left(G_1(t,y_n,z_n)+\right.\right. \\ & \left.\left.+G_2(t,y_n,z_n)\right)(y_{n+1}-z_{n+1})\right]+\Lambda\left[\left(A_1(t,y_n,z_n)+A_2(t,y_n,z_n)+\beta_1(t,y_n,z_n)+\right.\right. \\ & \left.+\beta_2(t,y_n,z_n)\right)(z_n-y_n);\left(A_1(t,y_n,z_n)+A_2(t,y_n,z_n)+\beta_1(t,y_n,z_n)+\right. \\ & \left.\left.+\beta_2(t,y_n,z_n)\right)(y_n-z_n)\right]. \end{aligned} \tag{19}$$

Запровадимо позначення:

G,A,B – сталі матриці з елементами

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \max_{\substack{t\in[0,T] \\ y,z\in[a,b]}}\left|g_{ij}^{(1)}(t,y,z)+g_{ij}^{(2)}(t,y,z)\right|, \\ a_{ij} &= \max_{\substack{t\in[0,T] \\ y,z\in[a,b]}}\left|a_{ij}^{(1)}(t,y,z)+a_{ij}^{(2)}(t,y,z)\right| \\ b_{ij} &= \max_{\substack{t\in[0,T] \\ y,z\in[a,b]}}\left|\beta_{ij}^{(1)}(t,y,z)+\beta_{ij}^{(2)}(t,y,z)\right| \end{aligned} \tag{20}$$

відповідно.

З (19), користуючись в $C^{R_n}[0;T]$ нормою $\|x(t)\|=\max\limits_i\left(\max\limits_{t\in[0;T]}|x_i(t)|\right)$ та позначеннями (20), отримаємо оцінку

$$\|z_{n+1}(t)-y_{n+1}(t)\|\le GT\|z_{n+1}(t)-y_{n+1}(t)\|+T(A+B)\|z_n(t)-y_n(t)\|, \tag{21}$$

або

$$\|z_{n+1}(t)-y_{n+1}(t)\|\le (E-GT)^{-1}T(A+B)\|z_n(t)-y_n(t)\|. \tag{21}$$

Теорема 2. Нехай в області D справджуються умови (1)-(4), система (7) при кожному $n=0,1,2,...$ має єдиний розв’язок; мають місце співвідношення (9) і спектральний радіус матриці $Q=(E-GT)^{-1}T(A+B)$, менший за одиницю. Тоді існує єдиний на $[a,b]$ розв’язок $x^*(t)$ задачі (1), (2), до якого, рівномірно щодо $t\in[0;T]$ збігаються послідовності $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$ розв’язків системи (12),і при цьому справджуються співвідношення

$$y_n(t)\le y_{n+1}(t)\le x^*(t)\le z_{n+1}(t)\le z_n(t)\,(\,n=0,1,2,...\ \ t\in[0;T]) \tag{23}$$

Доведення. Доведення співвідношень (23) збігається з доведенням леми 1. В свою чергу, ці нерівності разом із оцінками (22) та умовами теореми на підставі принципу Шаудера, забезпечують існування на $[a,b]$ єдиного розв’язку задачі (1),(2). Рівномірна збіжність послідовностей $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$ забезпечується неперервністю відповідних операторів, що входять до структури алгоритму.

1. Шувар Б.А. Квазічаплигінські алгоритми та аналоги монотонного методу Ньютона // Вісник ДУ " Львівська політехніка". 1998. № 337, с. 410-413. 2. Шувар Б.А. Двусторонние итерационные методы решения нелинейных уравнений в полуупорядоченных пространствах. / Мат-лы II-го симпозиума по методам решения нелинейных уравнений и задач оптимизации, Т.1 // Таллин: Ин-т кибернетики АН ЭССР. 1981, с. 68-73. 3. Нестеренко Л. И. Об одном двустороннем методе решения двухточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. // Докл. АН УССР, 1980, № 11. С 18-21. 4. Шаманский В.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ/ К.,: 1966. 5. Плехотин А. П. Теорема о существовании и единственности решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. // Докл. АН СССР, 1958, 123. № 4. С.613-615.