УДК 519.6

Обшта А.Ф.
НУ “Львівська політехніка”, кафедра обчислювальної математики і програмування

РІЗНОКОНТУРНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ В ПРОБЛЕМАХ НЕРУЙНІВНОГО КОНТРОЛЮ ТА ТЕХНІЧНОЇ ДІАГНОСТИКИ

The Shapiro-Lopatynsky-like conditions reducing the multicircuit problem for differential equations of elliptic type to the integral equations system.

Проблеми підвищення надійності, точності та інформаційності контролю є одними з головних в технічній діагностиці. Групою співробітників Національного університету “Львівська політехніка” під керівництвом Я.Г. Притуляка розроблено скануючий електромагнітний метод діагностики і вихрострумові та електромагнітноакустичні перетворювачі, які дозволяють не лише виявляти дефекти, а й встановлювати кількісні оцінки параметрів дефектів.

Конструкція вихрострумового перетворювача з магнітним полем, яке обертається, складається з двох кільцевих магнітопроводів, на одному з яких розташована збуджуюча обмотка, а на другому вимірювальна котушка. Складові $u_{\tau,x}$, $u_{\tau,y}$ інформативного сигналу являють собою проекції вектора тангенціальних складових магнітної індукції на осі *Ox* та *Oy* відповідно.

Оскільки розміри перетворювачів та електропровідних виробів набагато менші від довжини хвилі у повітрі, витрати на випромінення набагато менші, ніж у вихрострумовому перетворювачі та матеріалі, який досліджується, то поле можна вважати квазістаціонарним, а хвильовими процесами у просторі знехтувати. Вважаємо, що процеси, які відбуваються в електропровідному матеріалі, обумовлені провідністю σ, магнітною проникністю μ та зміною проміжку h.

Визначаючи наведену е.р.с. для вихрострумового перетворювача, ми тим самим знаходимо математичну залежність сигналу давача від властивостей неоднорідності об’єкта, який досліджується. Враховуючи допущені спрощення, можна стверджувати, що інформаційний сигнал (вектор-потенціал електромагнітного поля $\dot{A}$) задовольняє рівняння Максвелла з умовами, заданими на контурах.

Отже, вектор-потенціал електромагнітного поля $\dot{A}$ задовольняє рівняння Максвела:

$$rot\, A = B = \mu_0 \mu H \tag{1.1}$$

де B – магнітна індукція.

Якщо струм у витку змінюється за гармонійним законом, то рівняння для вектор-потенціала електромагнітного поля зводиться до неоднорідного рівняння Гельмгольца

$$\nabla^2 \dot{A} + k^2 \dot{A} = -\mu_0 \mu\, j_{CT} \tag{1.2}$$

де $k^2 = -j\omega\mu_0\mu\sigma$; j_{CT} – густина струму у витку; σ – питома електрична провідність.

У [2] виведено вираз для нормальної складової магнітного поля витка у вільному просторі при $\mu = 1, \sigma = 0$:

$$\dot{A}_{вн} = 0{,}5\mu_0 R \cdot I \cdot \int_0^\infty J_1(\lambda R) J_1(\lambda\rho) e^{-\lambda(z-h)} d\lambda \tag{1.3}$$

де I – струм, який тече в еквівалентному витку; J_1 – функція Бесселя першого роду, першого порядку; λ – параметр перетворення; $z - h$ – відстань від точки спостереження до площини витка.

Дійсна та уявна складові вектор-потенціала визначаються з рівностей:

$$\operatorname{Re}\dot{A} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{R}{\rho}} \cdot \frac{1}{\lambda}\left[\left(2-\lambda^2\right) \cdot K_{(\lambda)} - 2E_{(\lambda)}\right], \tag{1.4}$$

$$\operatorname{Im}\dot{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{R}{\rho}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\beta^2} \cdot \frac{R}{\rho}\left(\alpha_1 \cdot \beta + 2\right)\frac{\lambda}{4}\left[2K_{(\lambda)} - \frac{2-\lambda^2}{1-\lambda^2} E_{(\lambda)}\right], \tag{1.5}$$

де R – еквівалентний радіус витка збуджуючої котушки; $K_{(\lambda)}, E_{(\lambda)}$ – відповідно повні еліптичні інтеграли першого та другого роду; ρ – полярна координата; λ – параметр перетворення; $\beta = R\sqrt{\omega\mu\rho}$ – узагальнений параметр:

$$\lambda^2 = \frac{4\delta}{(1+\delta)^2 + \alpha^2\delta^2}; \qquad \text{при} \qquad \rho > R \tag{1.6}$$

$$\delta = \frac{\rho}{R} \tag{1.7}$$

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{2}{\beta}; \tag{1.8}$$

α_1 – нормований проміжок; h – проміжок між еквівалентним витком та електропровідною поверхнею, яка досліджується.

Тангенціальна складова напруженості магнітного поля знаходиться з виразу

$$\dot{H}_\tau = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial\dot{A}}{\partial z}, \tag{1.9}$$

де z – координата в циліндричній системі, розташована перпендикулярно до межі поділу двох середовищ. Із виразів для $\operatorname{Re}\dot{H}_\tau$ та $\operatorname{Im}\dot{H}_\tau$ видно, що форма кривої розподілу напруженості магнітного поля на поверхні провідного півпростору буде залежати від проміжку h та величини узагальненого параметра.

Одним із методів уточнення кількісних оцінок параметрів дефектів є використання моделей, в яких більше ніж два кільця, тобто з математичної точки зору слід розглядати системи диференціальних рівнянь з частинними похідними з умовами на декількох вкладених контурах.

Досліджується різноконтурна задача для системи лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними еліптичного типу з постійними коефіцієнтами, однорідними відносно порядку диференціювання. Розв’язок задачі знаходиться в півпросторі. Додатковими є умови на гіперплощинах, паралельних до півплощини, яка обмежує півпростір.

Введемо необхідні позначення та сформулюємо означення, які будемо використовувати нижче.

Область, в якій розв’язується задача, буде позначатися знаком V.

$$V = \{ x = (x_1, \ldots, x_n) : -\infty < x_j < +\infty \quad (j = 1, \ldots, n-1), \;\; 0 < x_n < +\infty \}$$

Розглянемо систему

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U = 0 \tag{1.10}$$

де $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = A\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \left\| \sum_{(k)} A_{ij}^{k_1 \ldots k_n} \frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right\|_{i,j=1}^{i,j=N}$, $A_{ij}^{k_1 \ldots k_n}$ – постійні числа, а U – невідома векторна функція, компонентами якої є функції $u_1, \ldots, u_N$ від змінних $x_1, \ldots, x_n$. Знак суми $\sum_{(k)}$ означає підсумовування за всіма системами цілих невід’ємних чисел $k_1, \ldots, k_n$, сума яких дорівнює $2m$.

Припускається, що система (1.10) правильно еліптична в сенсі Лопатинського, тобто

$$\det A(\alpha) \neq 0 \qquad A(\alpha) = \| A(i\alpha) \| \tag{1.11}$$

при будь-яких дійсних $\alpha \neq 0$.

Контурні умови задаються так:

Нехай Γ_i – гіперплощини, паралельні гіперплощині $x_n = 0$, яка обмежує півпростір V. На кожній з гіперплощин задається умова

$$\lim_{\substack{x \to x_n^t \\ x_n \in V}} B^t\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U = f_t(x') \qquad (t = 1, \ldots, b) \tag{1.12}$$

$$B^t\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\| \sum B_{ij,t}^{k_1, \ldots, k_n} \frac{\partial^{b_{ij}}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right\|_{i=1,\; j=1}^{i=N_t,\; j=N}$$

Тут $b_{it} < 2mN$, $N_1 + \ldots + N_b = N \cdot m$, $f_t(x') = \left(f_{t,1}, \ldots, f_{t,N_t}\right)$ – вектор-стовпець, записаний в рядок, $B_{ij,t}^{k_1, \ldots, k_n}$ – деякі постійні числа $x' = \left(x_1, \ldots, x_{n-1}\right)$.

Має місце

Теорема.

Нехай для задачі (1.10), (1.12) виконуються умови :

1. ранг $\int\limits_{(\Gamma^+)} B(i\alpha) \cdot A(\alpha) \mathrm{T}(\alpha_n) d\alpha_n = a \cdot N$

де $\mathrm{T}(\alpha_n) = \left(E, \alpha_n E, \ldots, \alpha_n^{2a-1} \cdot E\right)$, E – одинична матриця розмірів $N \times N$

2. $f^{t}(x') \in \{x_n^1 - x_n^t\} \cap H_s(R_t^n)\left(s > \frac{h}{2}+1\right); \quad (t = 1,\ldots,b)$

де $\{a\}$ – класи функцій, визначені в [3].

Тоді система диференціальних рівнянь (1.10) має єдиний розв'язок в області $x_n > x_n^1$ який задовольняє умови (1.12).

1. Притуляк Я.Г. Конструкция и расчет электрически сканирующих вихретоковых преобразователей. Львовский политехнический институт. Деп. В УкрНИИНТИ 06.12.90. №1976. Ук 90. Львов-90. 2. Сухоруков В.В. Математическое моделирование электромагнитных полей в проводящих средах. М., 1975. 3. Гахов Ф.Д. Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. М., 1978.

УДК 517.9

Пелих В.О.
ІППММ НАН України

ПРО НУЛІ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ СЕНА-ВІТТЕНА

It is proved that the solutions of the Sen-Witten equation, that satisfy the Reula conditions, on the asymptotically flat initial data set do not equal zero in any point on spacelike hypersurfaces in a neighborhood of maximal hypersurface.

Доведено, що розв'язки рівняння Сена-Віттена, які задовольняють умови Реули, на асимптотично плоскій множині початкових умов не дорівнюють нулеві в жодній точці просторовоподібної гіперповерхні в деякому околі максимальної гіперповерхні.

Нехай ріманів простір-час (M, g) сигнатури (+,-,-,-) є асимптотично простором-часом Мінковського і нехай M=Σ×R із просторовоподібними гіперповерхнями Σ; t часоподібна координата. Надалі грецькі індекси від α до λ набувають значень від 1 до 3; індекси від κ до ω набувають значень від 0 до 3. Латинські індекси є лоренцівськими і від a до l набувають значень від 1 до 3; індекси від m до z набувають значень від 0 до 3.

На гіперповерхні Σ виконуються рівняння зв'язку загальної теорії відносності

$$-R^{(3)} - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} + K^2 = 2\mu \ , \tag{1}$$

$$D_\mu\left(K^{\mu\nu} - Kh^{\mu\nu}\right) = I^\nu \ , \tag{2}$$

де $R^{(3)}$ − скалярна кривина гіперповерхні Σ, $K_{\mu\nu}$ − її зовнішня кривина, $K = K_\mu^\nu$, $h^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - t_\mu t_\nu$ − індукована метрика на Σ. D_μ є зв'язність на Σ, індукована зв'язністю ∇_μ на M. μ та I^ν, відповідно, густина енергії та імпульс матерії у системі