2. $f^t(x') \in \{x_n^1 - x_n^t\} \cap H_s(R_t^n)\left(s > \frac{h}{2} + 1\right)$ $(t = 1,\ldots,b)$

де $\{a\}$ – класи функцій, визначені в [3].

Тоді система диференціальних рівнянь (1.10) має єдиний розв'язок в області $x_n > x_n^1$ який задовольняє умови (1.12).

1. Притуляк Я.Г. Конструкция и расчет электрически сканирующих вихретоковых преобразователей. Львовский политехнический институт. Деп. В УкрНИИНТИ 06.12.90. №1976. Ук 90. Львов-90. 2. Сухоруков В.В. Математическое моделирование электромагнитных полей в проводящих средах. М., 1975. 3. Гахов Ф.Д. Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. М., 1978.

УДК 517.9

Пелих В.О.
ІППММ НАН України

ПРО НУЛІ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ СЕНА-ВІТТЕНА

It is proved that the solutions of the Sen-Witten equation, that satisfy the Reula conditions, on the asymptotically flat initial data set do not equal zero in any point on spacelike hypersurfaces in a neighborhood of maximal hypersurface.

Доведено, що розв'язки рівняння Сена-Віттена, які задовольняють умови Реули, на асимптотично плоскій множині початкових умов не дорівнюють нулеві в жодній точці просторовоподібної гіперповерхні в деякому околі максимальної гіперповерхні.

Нехай ріманів простір-час (M, g) сигнатури (+,-,-,-) є асимптотично простором-часом Мінковського і нехай $M=\Sigma\times R$ із просторовоподібними гіперповерхнями Σ; t часоподібна координата. Надалі грецькі індекси від α до λ набувають значень від 1 до 3; індекси від κ до ω набувають значень від 0 до 3. Латинські індекси є лоренцівськими і від a до l набувають значень від 1 до 3; індекси від m до z набувають значень від 0 до 3.

На гіперповерхні Σ виконуються рівняння зв'язку загальної теорії відносності

$$-R^{(3)} - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} + K^2 = 2\mu \ , \tag{1}$$

$$D_\mu\left(K^{\mu\nu} - Kh^{\mu\nu}\right) = I^\nu \ , \tag{2}$$

де $R^{(3)}$ − скалярна кривина гіперповерхні Σ, $K_{\mu\nu}$ − її зовнішня кривина, $K = K_\mu^\nu$, $h^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - t_\mu t_\nu$ − індукована метрика на Σ. D_μ є зв'язність на Σ, індукована зв'язністю ∇_μ на M. μ та I^ν, відповідно, густина енергії та імпульс матерії у системі відліку спостерігача, один-форма 4-швидкості якого є $\xi = dt$. μ та I^ν задов□льняють умову енергодомінантності

$$\mu \geq \left| I^\nu I_\nu \right|^{1/2} . \tag{3}$$

Означення 1. Множина початкових даних $\left(\Sigma, h_{\mu\nu}, K_{\pi\rho}\right)$ називається асимптотично плоскою, якщо:

1) існує плоска метрика η на $\Sigma\backslash\Omega$, де Ω є компактна множина, і така постійна $C>0$, що для кожного вектора l^μ

$$C^{-1}\eta_{\mu\nu} l^\mu l^\nu \leq h_{\mu\nu} l^\mu l^\nu \leq C\eta_{\mu\nu} l^\mu l^\nu \ ;$$

Ω є об'єднанням скінченної кількості зв'язних множин, кожна з яких ізометрична до евклідового простору, з якого видалено кулю.

2) $\left|\nabla_\rho h_{\mu\nu}\right|^2, K_{\mu\nu}K^{\mu\nu}, \mu, \left|I^\nu\right|$ є інтегровними на Σ.

Далі – без обмеження фізичної загальності – вважатимемо, що $h_{\mu\nu}$, $K_{\pi\rho}$, μ і I^ν належать до класу C^∞ на гіперповерхні Σ класу C^∞.

Як показав Віттен [1], якщо на Σ існує SU(2)-спінорне поле β^C, яке задовольняє рівняння Сена-Віттена

$$\tilde{D}^B_C \beta^C = 0 \ , \tag{4}$$

прямуючи асимптотично до постійного спінора $\beta_0{}^C$, то повна енергія-маса у гравітаційному полі є невід'ємною. Дія оператора $\tilde{D}_{AB}$ на спінорне поле позначається так:

$$\tilde{D}_{AB}\lambda_C = D_{AB}\lambda_C + \frac{\sqrt{2}}{2} K^D_{ABC}\lambda_D \, . \tag{5}$$

Питання про можливість існування нулів рівняння Сена-Віттена було поставлено вперше Ештекаром та Горовіцем [2], які висловили також припущення про їх відсутність. Ключове значення розв'язання цього питання для вирішення проблеми зіставлення тензорних та спінорних методів доведення теореми про додатну визначеність гравітаційної енергії у загальній теорії відносності підкреслено Дімакісом та Мюллером [3].

Єдиність та існування нулів розв'язків задачі Діріхле для еліптичних рівнянь були предметом багатьох досліджень [6-9]. Їх результати узагальнено в роботах [8,9], де незалежно отримано подібні результати. Зокрема, з теорії Ароншайна [8] та Кордеса [9] випливає, що всі нетривіальні розв'язки у R^n рівняння

$$a^{\mu\nu}\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad u(x), \ a^{\mu\nu}(x) \in C^2 \ ,$$

яке є еліптичним для усіх $x^1, \ldots, x^n$ і u, не можуть мати нулів нескінченного порядку у жодній точці.

Відсутність нулів розв'язків рівняння Сена-Віттена у роботі [10] доведено за припущення, що оператор $\tilde{D}_{AB}\varepsilon^{BC} + R_{AB}\varepsilon^{BC}$, де R_{AB} – довільний спінор, діє з простору H^2_{-1} у простір H^1_0 ін'єктивно. У цій роботі питання про існування нулів розв'язків рівняння Сена-Віттена розв'яжемо повністю.

Означення 2. Будемо вважати, що SU(2) − спінорне поле λ^C задовольняє на Σ умови Реули, якщо воно має вигляд $\lambda^C=\lambda_0{}^C+\beta^C$, де спінорне поле $\lambda_0{}^C$ є асимптотично коваріантно постійним у зв'язності, узгодженій із метрикою η, і β^C є елементом гільбертового простору H. Простір H визначається як поповнення простору C_0^∞ спінорних полів за нормою

$$\left\|\beta^E\right\|_H^2=\int_\Sigma\left(\tilde{D}^A{}_B\beta^B\right)^+\left(\tilde{D}_{AC}\beta^C\right)dV .$$

Теорема.

Нехай:

а) множина початкових даних є асимптотично плоскою і задовольняє умови енергодомінантності;

б) гіперповерхня Σ є близькою до максимальної в області $D\subset K$, такій, що скрізь у $\Sigma\backslash D$ $|\lambda^C-\lambda_0{}^C|<|\lambda_0{}^C|$.

Тоді в жодній точці на Σ розв'язок рівняння Сена-Віттена, який задовольняє умови Реули, не обертається в нуль.

Доведення. З леми 2 [2] отримуємо, що усі розв'язки λ^C рівняння

$$\tilde{D}_A{}^B\tilde{D}_{BC}\lambda^C=0\ , \tag{6}$$

які задовольняють умови Реули, задовольняють також рівняння Сена-Віттена.

Рівняння (6) є еліптичною системою рівнянь. Дійсно,

$$\tilde{D}_A{}^B\tilde{D}_{BC}\lambda^C=-D_{AB}D^B{}_C\lambda^C-\frac{\sqrt{2}}{2}D_{AB}\lambda^B-\frac{\sqrt{2}}{4}\lambda^B D_{AB}K-\frac{1}{8}K^2\lambda_A\ ;$$

враховуючи, що

$$-D_{AB}D^B{}_C\lambda^C=-\frac{1}{2}D^{BF}D_{BF}\lambda_A-\frac{1}{8}R^{(3)}\lambda_A\ ,$$

і використавши рівняння (1), отримуємо

$$\tilde{D}_A{}^B\tilde{D}_{BC}\lambda^C=\frac{1}{2}D^{BC}D_{BC}\lambda_A-\frac{\sqrt{2}}{2}KD_{AB}\lambda^B-\frac{\sqrt{2}}{4}\lambda^B D_{AB}K-$$
$$-\frac{1}{4}K^2\lambda_A+\frac{1}{8}K_{\mu\nu}K^{\mu\nu}\lambda_A+\frac{1}{4}\mu\lambda_A .$$

Запровадимо у деякому околі гіперповерхні Σ і на її основі у локальній карті гауссову нормальну систему координат (t, x^α). Тоді у кожній локальній карті

$$\begin{aligned}\tilde{D}_A{}^B\tilde{D}_{BC}\lambda^C=\frac{1}{2\sqrt{-h}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{-h}h^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\lambda_A\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}KD_{AB}\lambda^B-\\-\frac{\sqrt{2}}{4}\lambda^B D_{AB}K+\frac{1}{4}K^2\lambda_A+\frac{1}{8}K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta}\lambda_A+\frac{1}{4}\mu\lambda_A=0,\end{aligned} \tag{7}$$

і еліптичність (6), як також і (4), випливає з від'ємної знаковизначеності матриці $\left\|h^{\alpha\beta}\right\|$.

Припустимо, що область D на Σ є максимальною (у асимптотично плоскому просторі-часі, який задовольняє однорідні внутрішні умови, існують максимальні шарування [11]; тим не менше, останні умови не є необхідними. Тому ми припускаємо лише, що M допускає шарування, на якому існує область $D\subset K$, інтеграл від три-форми об'єму, за яким набуває максимального значення).

Оскільки оператор $D_{AB} \equiv D_{\alpha}$ діє на Σ внутрішнім чином, то в D також $D_{AB}K\big|_{\Sigma} = 0$. Тому система рівнянь (7) в D Σ зводиться до двох незалежних самоспряжених рівнянь

$$\frac{1}{\sqrt{-h}}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\sqrt{-h}h^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\lambda_{A}\right)+\frac{1}{4}K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta}\lambda_{A}+\frac{1}{2}\mu\lambda_{A}=0. \qquad (8)$$

До кожного з них застосовна теорема Скоробогатька [12, с. 39], тому вузлові поверхні кожного розв'язку класу C^2 рівнянь (8) не є ізольованими в області D і ділять її. Відповідно до умов енергодомінантності (3)

$$K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} + 2\mu \geq 0\ , \qquad (9)$$

тому для рівнянь (8) виконується принцип максимуму, і, отже, розв'язок задачі Діріхле для кожного з них є єдиним. Звідси випливає, що замкнені вузлові поверхні цих розв'язків відсутні. Оскільки з умов теореми випливає, що на ∂D $\lambda^C \neq 0$, то вузлові поверхні, які виходять на межу області, також відсутні. Тому розв'язок λ^C рівнянь (4) скрізь у D відмінний від нуля. Цей висновок поширюється і на той випадок, коли D не є максимальною, а лише близькою до неї: з теореми Лопатинського [13] про неперервну залежність розв'язків задачі Діріхле від коефіцієнтів системи рівнянь, граничних даних та області отримуємо, що існує такий окіл мінімальної області, в якому нулі рівняння Сена-Віттена також відсутні.

У Σ\D існує єдиний розв'язок рівняння Сена-Віттена (класу C^{∞}), який задовольняє умови Реули [14]. В цій області він, очевидно, також не має нулів. Цим завершується доведення.

Із леми 1 та леми 2 [15] випливає висновок, що розв'язок рівняння (4), який перетворюється в нуль хоч би в одній точці на Σ, є тотожним нулем на Σ. Але в процесі доведення самої леми 1 використано припущення, яке грунтується на спостереженні властивостей розв'язків рівняння (4) на поверхні нульової зовнішньої кривини у просторі Мінковського і яке до цього часу залишилось не доведеним.

1. Witten E. A new proof of the positive energy theorem // Comm. Math. Phys. 80, 381–402 (1981). 2. Ashteckar A., Horowitz G. T. Phase space of general relativity revisited: A canonical choice of time and simplification of the Hamiltonian // J.Math.Phys. 1984, 25, 5, P.1473–1480. 3. Dimakis A., Muller-Hoissen F. Spinors fields and the positive energy theorem // Class. Quantum. Grav. 1990. 7, 3. P. 283–295. 4.Carleman T. Sur les systemes lineaires aux derivees partielles du premiere ordre a deux variables // Compt. rend. 1933. 197. P. 471–474 . 5. Morrey C.B. On the solutions of quasilinear elliptic partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1938. 43, P.126–166. 6. Muller C. On the behavior of solutions of the differential equations // Comm. Pure Applied Math. 1954. 7. P.505–515. 7. Heinz E. Uber die Eindeutigkeit bei Cauchyschem Anfangswertproblem einer elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung // Nachrict. Akad. Wiss. Gottingen. 1955. 1, S.1–12. 8. Aronszajn N. A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order // J. Math. pur. et appl. 1957. 36, P.235–249. 9. Cordes H. O. Uber die eindeutige Bestimmheit der Losungen elliptischer differentialgleichungen durch Anfangsvorhaben // Nachrict. Akad. Wiss. Gottingen. Math.-phys. Klasse. 1956. 11, S.239-258. 10. Пелих В.О. Умови еквівалентності спінорного і тензорного методів у проблемі додатної означеності гравітаційної енергії // Мат.

методи і фіз. мех.поля. 1985. 41, 4.С.55-59. 11. Bartnik R. Existence of maximal surfaces in asymptotically flat spacetimes // Commun. Math. Phys. 1984. 94. P.155−175. Скоробогатько В.Я. Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1980. 12. Скоробогатько В.Я. Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. К.1980. 13. Лопатинский Я.Б. Зависимость решений системы дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа от коэффициентов системы // Доклады АН УССР. 1956. № 3. С.211−213. 14. Reula O. Existence theorem for solutions of Witten's equation and nonnegativity of total mass // J.Math.Phys. -22, 810-814, (1981). 15. Sen A. On the existence of neutrino "zero-modes" in vacuum spacetimes // J.Math.Phys. 1981. 22, P.1781−1786.

УДК 519.21

Перун Г.М.
Чернівецький державний університет ім. Ю. Федьковича

ОЦІНКА В СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЛІНІЙНОГО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ З ПУАССОНІВСЬКИМИ ЗБУРЕННЯМИ

It is proved a theorem on an evaluation on the average quadratic solution of a Cauchy problem for an integro-differential equation with Poisson perturbations.

Доводиться теорема про оцінку в середньому квадратичному розв'язку задачі Коші для лінійного інтегро-диференціального рівняння параболічного типу з пуассонівськими збуреннями.

У ймовірнісному просторі (Ω, F, P) з потоком неспадних $\sigma-$алгебр $\{F_t, t \geq t_0\}$, $F_{t_1} \subset F_{t_2}$ розглядається випадкова функція $u(t,x,\omega)$, $t \geq t_0$, $x \in R^n$, $\omega \in \Omega$, F_t-узгоджена, яка є розв'язком лінійного інтегро-диференціального рівняння параболічного типу

$$d_t u(t,x,\omega) = \left[A(t,D_x)\cdot u(t,x,\omega) + \int_{t_0}^{t} \int_{R^n} K(t,\tau,x-\xi)\cdot \widetilde{A}(\tau,D_\xi) u(\tau,\xi,\omega) d\xi d\tau \right] dt + \\ + \int_Z g(z) \left[B(t,D_x) u(t,x,\omega) + \int_{t_0}^{t} \int_{R^n} K(t,\tau,x-\xi)\cdot \widetilde{B}(\tau,D_\xi) u(\tau,\xi,\omega) d\xi d\tau \right] \cdot \widetilde{\nu}(dz,dt) \tag{1}$$

з детермінованою початковою умовою

$$u(t,x,\omega)\Big|_{t=t_0} = \varphi(x), \ x \in R^n. \tag{2}$$