методи і фіз. мех.поля. 1985. 41, 4.С.55-59. 11. Bartnik R. Existence of maximal surfaces in asymptotically flat spacetimes // Commun. Math. Phys. 1984. 94. P.155−175. Скоробогатько В.Я. Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1980. 12. Скоробогатько В.Я. Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. К.1980. 13. Лопатинский Я.Б. Зависимость решений системы дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа от коэффициентов системы // Доклады АН УССР. 1956. № 3. С.211−213. 14. Reula O. Existence theorem for solutions of Witten's equation and nonnegativity of total mass // J.Math.Phys. -22, 810-814, (1981). 15. Sen A. On the existence of neutrino “zero-modes” in vacuum spacetimes // J.Math.Phys. 1981. 22, P.1781−1786.

УДК 519.21

Перун Г.М.
Чернівецький державний університет ім. Ю. Федьковича

ОЦІНКА В СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ РОЗВ’ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЛІНІЙНОГО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ З ПУАССОНІВСЬКИМИ ЗБУРЕННЯМИ

It is proved a theorem on an evaluation on the average quadratic solution of a Cauchy problem for an integro-differential equation with Poisson perturbations.

Доводиться теорема про оцінку в середньому квадратичному розв’язку задачі Коші для лінійного інтегро-диференціального рівняння параболічного типу з пуассонівськими збуреннями.

У ймовірнісному просторі (Ω, F, P) з потоком неспадних $\sigma-$алгебр $\{F_t, t \geq t_0\}$, $F_{t_1} \subset F_{t_2}$ розглядається випадкова функція $u(t,x,\omega)$, $t \geq t_0$, $x \in R^n$, $\omega \in \Omega$, F_t-узгоджена, яка є розв’язком лінійного інтегро-диференціального рівняння параболічного типу

$$d_t u(t,x,\omega) = \left[A(t,D_x) \cdot u(t,x,\omega) + \int_{t_0}^{t} \int_{R^n} K(t,\tau,x-\xi) \cdot \widetilde{A}(\tau, D_\xi) u(\tau,\xi,\omega) d\xi d\tau \right] dt +$$
$$+ \int_Z g(z) \left[B(t,D_x) u(t,x,\omega) + \int_{t_0}^{t} \int_{R^n} K(t,\tau,x-\xi) \cdot \widetilde{B}(\tau,D_\xi) u(\tau,\xi,\omega) d\xi d\tau \right] \cdot \widetilde{\nu}(dz,dt) \tag{1}$$

з детермінованою початковою умовою

$$u(t,x,\omega)\Big|_{t=t_0} = \varphi(x), \ x \in R^n. \tag{2}$$

Тут $A(t,D_x), \widetilde{A}(t,D_x), B(t,D_x), \widetilde{B}(t,D_x)-$ диференціальні комплекснозначні многочлени вигляду $A(t,D_x)=\sum_{|k|\leq 2b} A_k(t)D_x^k, \widetilde{A}(t,D_x)=\sum_{|k|\leq p_1}\widetilde{A}_k(t)D_x^k, B(t,D_x)=\sum_{|k|\leq p_2} B_k(t)D_x^k$, $\widetilde{B}(t,D_x)=\sum_{|k|\leq p_3}\widetilde{B}_k(t)D_x^k$, $\widetilde{\nu}(dz,dt)=\nu(dz,dt)-M\{\nu(du,dt)\}-$ центрована міра Пуассона, $g(z)-$ випадкова функція, $z\in Z\subset R^m$, $F-$ вимірна. Крім того, $\int_Z \frac{g^2(z)}{|z|^{m+1}}dz<\infty$. Розв'язок $u(t,x,\omega)$ набуває значень в R^1 і належить простору неперервних справа функцій, які мають лівосторонні границі. Він вимірний при майже всіх ω по t і x відносно $\sigma-$ алгебри борелівських множин на $[t_0,T]\times R^n$ і має скінченну норму

$$\|u(t,x,\omega)\|^2=\int_{R^n} M\left\{|u(t,y,\omega)|^2\right\}dy, \tag{3}$$

де $M-$ операція математичного сподівання.

Застосуємо до задачі (1), (2) перетворення Фур'є. Відповідна задача в образах Фур'є має вигляд

$$\begin{gathered} d\ v(t,\sigma,\omega)=\left[A(t,\sigma)\cdot v(t,\sigma,\omega)+\int_{t_0}^{t}\widetilde{K}(t,\tau,\sigma)\cdot\widetilde{A}(\tau,\sigma)v(\tau,\sigma,\omega)d\tau\right]dt+ \\ +\int_Z g(z)\left[B(t,\sigma)v(t,\sigma,\omega)+\int_{t_0}^{t}\widetilde{K}(t,\tau,\sigma)\cdot\widetilde{B}(\tau,\sigma)v(\tau,\sigma,\omega)d\tau\right]\cdot\widetilde{\nu}(dz,dt) \end{gathered} \tag{4}$$

$$u(t,\sigma,\omega)\Big|_{t=t_0}=\widetilde{\varphi}(\sigma),\ \sigma\in E^n. \tag{5}$$

Стохастичне інтегро-диференціальне рівняння (4) еквівалентне інтегральному рівнянню

$$\begin{gathered} v(t,\sigma,\omega)=\widetilde{\varphi}(\sigma)+\int_{t_0}^{t}\left[A(\tau,\sigma)\cdot v(\tau,\sigma,\omega)+\int_{t_0}^{\tau}\widetilde{K}(t,s,\sigma)\cdot\widetilde{A}(s,\sigma)v(s,\sigma,\omega)ds\right]d\tau+ \\ +\int_{t_0}^{t}\int_Z g(z)\left[B(\tau,\sigma)v(\tau,\sigma,\omega)+\int_{t_0}^{\tau}\widetilde{K}(t,s,\sigma)\cdot\widetilde{B}(s,\sigma)v(s,\sigma,\omega)ds\right]\cdot\widetilde{\nu}(dz,d\tau). \end{gathered} \tag{6}$$

Інтегральне рівняння (6) є з одного боку рівнянням Вольтера, а з іншого воно має ознаки звичайних стохастичних диференціальних рівнянь, описаних [1]. Нехай з ймовірністю 1 існує розв'язок $v(t,\tau,\omega)$ з значеннями в R^1, який є F_t- вимірним і належить простору функцій неперервних справа і таких, що мають лівосторонні границі.

Запишемо розв'язок задачі (4), (5) у інтегральному вигляді за допомогою нормального фундаментального розв'язку $Q(t,\tau,\sigma)$

$$v(t,\sigma,\omega)=Q(t,t_0,\sigma)\tilde{\varphi}(\sigma)+\int_{t_0}^{t} Q(t,\beta,\sigma)\int_{t_0}^{\beta} \tilde{K}(\beta,\tau,\sigma)\cdot\tilde{A}(\beta,\sigma)v(\tau,\sigma,\omega)d\tau d\beta+$$
$$+\int_{t_0}^{t}\int_{Z} Q(t,\beta,\tau)g(z)B(\beta,\sigma)v(\beta,\sigma,\omega)\tilde{\nu}(dz,d\beta)+ \tag{7}$$
$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\beta}\int_{Z} Q(t,\beta,\tau)g(z)\tilde{K}(\beta,\tau,\sigma)\cdot\tilde{B}(\tau,\sigma)v(\tau,\sigma,\omega)d\tau\tilde{\nu}(dz,d\beta)$$

для якого справедлива оцінка [2]

$$\operatorname{Re}\sum_{|k|=2b} A_k\sigma^k \le -\delta|\sigma|^{2b},\ \delta-\text{стала параболічності}, \tag{8}$$

$$\left|Q(t,\tau,\sigma)\right| \le C_1\cdot\exp\left\{-\delta_1|\sigma|^{2b}(t-\tau)+1\right\},\ 0<\delta_1<\delta,\ C_1=C\left(\delta_1\right). \tag{9}$$

Розглянемо квадрат від модуля для (7), подіємо на нього операцією математичного сподівання, врахуємо властивості інтегралів за центрованою мірою Пуассона [1], до повторних інтегралів застосуємо формулу Діріхле. Дістанемо

$$M\{|v(t,\sigma,\omega)|^2\}=|Q(t,t_0,\sigma)|^2|\tilde{\varphi}(\sigma)|^2+M\left|\int_{t_0}^{t} Q(t,\beta,\sigma)\int_{t_0}^{\beta}\tilde{K}(\beta,\tau,\sigma)\cdot\tilde{A}(\beta,\sigma)v(\tau,\sigma,\omega)d\tau d\beta\right|^2+$$
$$+M\left|\int_{t_0}^{t}\int_{Z} Q(t,\beta,\tau)g(z)B(\beta,\sigma)v(\beta,\sigma,\omega)\tilde{\nu}(dz,d\beta)\right|^2+$$
$$+M\left|\int_{t_0}^{t}\int_{Z} g(z)\,Q(t,\beta,\tau)\int_{t_0}^{\beta}\tilde{K}(\beta,\tau,\sigma)\cdot\tilde{B}(\tau,\sigma)v(\tau,\sigma,\omega)d\tau\tilde{\nu}(dz,d\beta)\right|^2\le$$
$$\le|Q(t,t_0,\sigma)|^2|\tilde{\varphi}(\sigma)|^2+\int_{t_0}^{t} M\left|v(\tau,\sigma,\omega)\right|^2\int_{t_0}^{t}|Q(t,\beta,\sigma)|^2|\tilde{K}(\beta,\tau,\sigma)|^2\cdot|\tilde{A}(\beta,\sigma)|^2\,d\beta d\tau+$$
$$+\int_{t_0}^{t} M\left|v(\tau,\sigma,\omega)\right|^2\cdot\int_{Z}\frac{g^2(z)}{|z|^{m+1}}\cdot|B(\beta,\sigma)|^2\,dzd\beta+$$
$$+\int_{t_0}^{t}\int_{\tau}^{\beta}|Q(t,\beta,\sigma)|^2|\tilde{K}(\beta,\tau,\sigma)|^2\cdot|\tilde{B}(\beta,\sigma)|^2\int_{Z}\frac{g^2(z)}{|z|^{m+1}}dzd\beta\cdot M\,|v(\tau,\sigma,\omega)|^2\,d\tau;$$

$$M\{|v(t,\sigma,\omega)|^2\}\le|Q(t,t_0,\sigma)|^2|\tilde{\varphi}(\sigma)|^2+\int_{t_0}^{t} M\left|v(\tau,\sigma,\omega)\right|^2\int_{\tau}^{t}|Q(t,\beta,\sigma)|^2|\tilde{K}(\beta,\tau,\sigma)|^2\cdot\times$$
$$\times\left(|\tilde{A}(\beta,\sigma)|^2\,d\beta+|\tilde{B}(\beta,\sigma)|^2\cdot s_0\right)d\beta d\tau+\int_{t_0}^{t}|Q(t,\beta,\sigma)|^2\cdot|B(\beta,\sigma)|^2\,s_0\cdot M\,|v(\beta,\sigma,\omega)|^2\,d\beta \tag{10}$$

де $s_0\equiv\int_{Z}\frac{g^2(z)}{|z|^{m+1}}dz.$

У нерівності (10) позначимо

$$F_v(t,\sigma,\omega) \equiv F_v(t,\sigma) \equiv |Q(t,t_0,\sigma)|^2 |\widetilde{\varphi}(\sigma)|^2 + P(\sigma)\int_{t_0}^{t} M|v|^2\, d\tau, \tag{11}$$

$$P(t,\sigma,\omega) = \int_{\tau}^{t} |Q(t,\beta,\sigma)|^2 |\widetilde{K}(\beta,\tau,\sigma)|^2 \left(|\widetilde{A}(\beta,\sigma)|^2 + \widetilde{B}(\beta,\sigma)|^2 \cdot s_0 \right) d\beta \le$$

$$\le \frac{C_1(1+|\sigma|)^{2m}\left(\left\|\widetilde{A}(\sigma)\right\|^2 + \left\|\widetilde{B}(\sigma)\right\|^2\right)}{\delta_1\left(1+|\sigma|^{2b}\right)},$$

де $\left\|\widetilde{A}(\sigma)\right\|^2 = \sup\limits_{\beta\in[\tau,t]}\left|\widetilde{A}(\beta,\sigma)\right|^2$; $\left\|\widetilde{B}(\sigma)\right\|^2 = \sup\limits_{\beta\in[\tau,t]}\left|\widetilde{B}(\beta,\sigma)\right|^2$, а для ядра справджується оцінка

$$\sup_{\tau,\sigma}\left|\widetilde{K}(t,\tau,\sigma)\right| \le K_0. \tag{12}$$

Тобто,

$$P(\sigma) \equiv \frac{\left(\left\|\widetilde{A}(\sigma)\right\|^2 + \left\|\widetilde{B}(\sigma)\right\|^2\right)K_0}{\delta_1\left(1+|\sigma|^{2b}\right)}. \tag{13}$$

Отже, інтегральна нерівність (10) набуде вигляду

$$M\{|v(t,\sigma,\omega)|^2\} \le F_v(t,\sigma) + \int_{t_0}^{t}\left\|Q(t,\beta,\sigma)\right\|^2 \cdot \left\|B(\beta,\sigma)\right\|^2 s_0 \cdot M\,|v(\beta,\sigma,\omega)|^2\, d\beta.$$

Згідно з лемою [3, с.74] її розв’язок задовольняє нерівність

$$M\{|v(t,\sigma,\omega)|^2\} \le F_v(t,\sigma) + \int_{t_0}^{t} R(t,\beta,\sigma) F_v(\beta,\sigma)\, d\beta, \tag{14}$$

де $R(t,\sigma)-$ резольвента, яка відповідає ядру

$$I(t,\beta,\sigma) \equiv \left\|Q(t,\beta,\sigma)\right\|^2 \cdot \left\|B(\sigma)\right\|^2 \cdot s_0$$

і для неї справедлива оцінка

$$R(t,\sigma) \le C_0 \exp\left\{\left(-2\left(\delta_1|\sigma|^{2b}+1\right) + \left\|B(\sigma)\right\|^2 \cdot s_0\right)(t-t_0)\right\} \equiv C_0\exp\{-C(\sigma)(t-t_0)\}, \tag{15}$$

де $C(\sigma) = 2\left(\delta_1|\sigma|^{2b}+1\right) - \left\|B(\sigma)\right\|^2 \cdot s_0$, $C(\sigma) > 0$, $\sigma \in R^n$, якщо

$$\left\|B(\sigma)\right\|^2 \le \delta_1|\sigma|^{2b} + C_1,\ C_1 > 0. \tag{16}$$

Підставимо тепер значення $F_v(t,\sigma,\omega)$ у нерівність (14). Знову змінимо порядок інтегрування і скористаємось оцінкою (15). Після нескладних підрахунків отримаємо інтегральну нерівність

$$M|v(t,\sigma,\omega)|^2 \le \psi(t,\sigma)\left\|\widetilde{\varphi}(\sigma)\right\|^2 + L(\sigma)\int_{t_0}^{t} M|v(\tau,\sigma,\omega)|^2\, d\tau, \tag{17}$$

де $\psi(t,\sigma) \equiv C_0\left(\exp\left\{-2\left(\delta_1|\sigma|^{2b}+1\right)\left(t-t_0\right)\right\} + \exp\left\{-C(\tau)\left(t-t_0\right)\right\}\right)$, $L(\sigma) \equiv P(\sigma)\left(1+\dfrac{\left\|B(\sigma)\right\|^2 s_0}{C(\sigma)}\right)$.

За умови, що функції $\psi(t,\sigma)$ *і* $L(\sigma)$ неперервні і обмежені при всіх $\sigma \in R^n$, скористаємось лемою Гронуола [4, с.471]. З нерівності (17) дістаємо оцінку другого моменту

$$M|v(t,\sigma,\omega)|^2 \le \psi(t,\sigma)\|\tilde{\varphi}(\sigma)\|^2 + L(\sigma)\|\varphi\| \int_{t_0}^{t} \exp\{L(\sigma)(t-1)\}\psi(s,\sigma)ds, \tag{18}$$

звідки випливає

$$M|v(t,\sigma,\omega)|^2 \le C_0 \exp\{C_0 t\}\|\tilde{\varphi}(\sigma)\|^2,\ \sigma \in R^n. \tag{19}$$

Інтегруючи останню нерівність по $\sigma \in R^n$ та враховуючи рівність Парсеваля, дістанемо необхідну оцінку розв'язку задачі (1), (2).

Отже, доведена

Теорема. Нехай виконується умова параболічності рівняння, тобто справджується нерівність (8), степені многочленів $\tilde{A}(\sigma)$ *і* $\tilde{B}(\sigma)$ не перевищують b, тобто $p_1 \le b$, $p_3 \le b$, а норма $B(\sigma)$ оцінюється за допомогою (16), ядро інтегральної нерівності належить $\tilde{K}(t,\tau,\sigma) \in \mathbf{L}(\sigma)$, а початкова функція $\tilde{\varphi}(\sigma) \in \mathbf{L}_2(\sigma), \sigma \in R^n$, тоді для норми розв'язку задачі (1), (2) виконується нерівність

$$M|u(t,x,\omega)|^2 \le \exp\{C_0(t-t_0)\}\|\varphi(x)\|_2^2. \tag{20}$$

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. К., 1968. 2. Эйдельман С.Д. Параболические системы. М., 1964. 3. Перун Г.М. Про експоненціальну стійкість розв'язку стохастичної мішаної задачі для рівняння коливань // Нелінійні крайові задачі математичної фізики та їх застосування. Зб. наук. пр. Ч.II. К.: Ін-т матем. НАН України, 1996. С. 72–76. 4. Гихман И.И., Скороход А.В.. Введение в теорию случайных процессов. М., 1977. 5. Свердан М.Л., Царков Е.Ф., Ясинський В.К. Стійкість у стохастичному моделюванні складних динамічних систем. Снятин, 1996.

УДК 517.946

Пукальський І.Д.
Чернівецький державний університет ім. Ю.Федьковича

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ

In the fields of classical functions with the power weight there has been proved the existence and unity of Cauchi's non-local problem unevenly parabolic equation without limit on the power order of coefficient degeneration. The estimation of the solved problems in the corresponding fields has been found. References 3 items.

У просторах класичних функцій зі степеневою вагою доведено існування і єдиність розв'язку нелокальної задачі Коші для нерівномірно параболічного