1. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1984. 2. Илькив В.С. Многоточечная нелокальная задача для дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Мат-лы IX-ой конф. мол. ученых Ин-та прикл. пробл. мех. и матем. АН УССР, ч. II, Львов, 1983. С.64–72. 3. Ільків В.С. Продовження за часовою змінною розв'язку нелокальної багатоточкової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними і сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 1998. 41. № 4. С.78–82. 4. Штабалюк П.І., Пташник Б.Й. Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь у класі функцій, майже періодичних по просторових змінних // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 1992. 35. С. 210–215. 5. Берник В.И., Пташник Б.И., Салыга Б.О. Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1977. 13, № 4. С. 637–645.

УДК 621.007.52

Сопронюк Ф.О., Гайдайчук І.В., Гайдайчук Т.І., Тимофієва Є.М.
Чернівецький державний університет імені Ю. Федьковича

СИНТЕЗ КЕРУВАННЯ МЕХАТРОННОЮ СИСТЕМОЮ ЗА ЗАДАНОЮ ТРАЄКТОРІЄЮ

One method for optimal control synthesis for moving robot capture on the given trajectory is proposed. It is based on the special choose of quality functional and leading optimal control synthesis problem to the variation one. The methods of variation theory allows to write in the evident form the system of differential equations for optimal control calculation. That is why the problem of optimal control synthesis can be solved as Cauchy problem.

Пропонується один із методів синтезу оптимального керування для забезпечння руху захвату робота наперед заданою траєкторією. Він базується на спеціальному виборі функціонала якості і зведенні задачі синтезу до варіаційної задачі. Методи варіаційного числення дозволяють виписати в явному вигляді систему диференціальних рівнянь для знаходження оптимального керування. Певним чином вибрані заміни змінних перетворюють одержану систему разом із початковими умовами до задачі Коші.

Відомо [1,3,4], що математична модель геометричного стану простого робота може бути записана у такому вигляді:

$$\begin{gathered} O_j(t) = O_{j-1}(t) + K_{j-1}(t)\left[b_{j-1} + (1-\alpha_j)c_{j-1}^1\theta_j(t)\right], \\ K_j(t) = K_{j-1}(t)C_{j-1}\left[\alpha_j A_1^T(\theta_j(t)) + (1-\alpha_j)E\right], \qquad (1) \\ O_0(t) = 0, \qquad K_0(t) = E, \qquad j = 1,2\ldots m+1, \end{gathered}$$

де $O_j(t)$ – вектор координат точки входу j-ї ланки в абсолютній системі координат, $K_j(t)$ – матриця орієнтації j-ї ланки в абсолютній системі координат, b_j – вектор координат точки виходу j-ї ланки у власній системі координат, $C_j = (c_j^1, c_j^2, c_j^3)$ – матриця, стовпцями якої є орти, задані у зв'язаній системі координат, причому $c_1^T c_2 = 0$, $c_3 = c_1 \times c_2$, α_j – тип з'єднання між $(j-1)$-ю та j-ю ланками: 0 – телескопія, 1 – обертання, $A_1(\theta)$ – матриця обертання відносно осі OX: $A_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta_j(t)$ – узагальнена координата, що визначає розміщення j-ї ланки відносно $(j-1)$-ї.

Якщо робот складається з m ланок, то вектор $O_{m+1}(t)$ задає положення захвату. Необхідно знайти такі керування $\theta_j(t)$, щоб одержана траєкторія руху захвату робота $O_{m+1}(t)$ була якомога близькою до заданої траєкторії $T(t)$. Найчастіше для оцінки близькості двох траєкторій використовують функціонал

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\| O_{m+1}(t) - T(t) \right\|^2 dt \to \min,$$

де через $\|\cdot\|$ позначено евклідову норму у тривимірному просторі. Однак, для практичних застосувань зручніше розглянути дещо інший критерій

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\| O_{m+1}(t) - T(t) \right\|^2 + \left\| \dot{O}_{m+1}(t) - \dot{T}(t) \right\|^2 \to \min, \tag{2}$$

який враховує не лише відхилення між двома траєкторіями, але і осциляції між ними.

Запишемо з (1) рівняння руху захвату робота в явному вигляді

$$O_{m+1}(t) = \sum_{i=0}^{m} \left(\prod_{j=0}^{i-1} C_j [\alpha_{j+1} (A_1^T(\theta_{j+1}(t)) + (1-\alpha_{j+1})E] \right) \left[b_i + (1-\alpha_{i+1}) c_{i+1}^1 \theta_{i+1}(t) \right].$$

Тоді

$$\dot{O}_{m+1}(t) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{i-1} \left(\prod_{j=0}^{k-1} C_j [\alpha_{j+1} A_1^T(\theta_{j+1}(t)) + (1-\alpha_{j+1})E] \right) C_k \alpha_{k+1} B_1^T(\theta_{k+1}(t)) \dot{\theta}_{k+1}(t) \cdot$$

$$\cdot \left(\prod_{j=k+1}^{i-1} C_j [\alpha_{j+1} A_1^T(\theta_{j+1}(t)) + (1-\alpha_{j+1})E] \right) \left[b_i + (1-\alpha_{i+1}) c_{i+1}^1 \theta_{i+1}(t) \right] +$$

$$+ \sum_{j=0}^{i-1} \left(\prod_{j=0}^{i-1} C_j [\alpha_{j+1} A_1^T(\theta_{j+1}(t)) + (1-\alpha_{j+1})E] \right) (1-\alpha_{i+1}) c_{i+1}^1 \dot{\theta}_{i+1}(t),$$

де $B_1(\theta) = \dot{A}_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}$.

Критерій якості (2) набуде вигляду

$$J=\int_{t_0}^{t_1}\left\|\sum_{i=0}^{m}\left(\prod_{j=0}^{i-1}C_j[\alpha_{j+1}A_1^T(\theta_{j+1}(t))+(1-\alpha_{j+1})E]\right)\left[b_i+(1-\alpha_{i+1})c_{i+1}^1\theta_{i+1}(t)\right]-T(t)\right\|^2+$$

$$+\left\|\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{i-1}\left(\prod_{j=0}^{k-1}C_j[\alpha_{j+1}A_1^T(\theta_{j+1}(t))+(1-\alpha_{j+1})E]\right)C_k\alpha_{k+1}B_1^T(\theta_{k+1}(t))\dot{\theta}_{k+1}(t)\cdot\right.$$

$$\cdot\left(\prod_{j=k+1}^{i-1}C_j[\alpha_{j+1}A_1^T(\theta_{j+1}(t))+(1-\alpha_{j+1})E]\right)\left[b_i+(1-\alpha_{i+1})c_{i+1}^1\theta_{i+1}(t)\right]+ \tag{3}$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{m}\left(\prod_{j=0}^{i-1}C_j[\alpha_{j+1}A_1^T(\theta_{j+1}(t))+(1-\alpha_{j+1})E]\right)(1-\alpha_{i+1})c_{i+1}^1\dot{\theta}_{i+1}(t)-\dot{T}(t)\right\|^2dt\to\min.$$

Випишемо для задачі (3) систему рівнянь Ейлера. Оскільки для неї підінтегральна функція (позначимо її через $F(\theta_1,\theta_2\cdots\theta_{m+1},\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2\cdots\dot{\theta}_{m+1})$) не залежить явно від t, то перші інтеграли мають вигляд $F-\dot{\theta}_s\dot{F}_{\dot{\theta}_s}=const$, $s=1,2...m+1$. У нашому випадку

$$\dot{F}_{\dot{\theta}_s}=2\sum_{r=1}^{3}\left[\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{i-1}\left(\prod_{j=0}^{k-1}C_j[\alpha_{j+1}A_1^T(\theta_{j+1}(t))+(1-\alpha_{j+1})E]\right)C_k\alpha_{k+1}B_1^T(\theta_{k+1}(t))\dot{\theta}_{k+1}(t)\cdot\right.$$

$$\cdot\left(\prod_{j=k+1}^{i-1}C_j[\alpha_{j+1}A_1^T(\theta_{j+1}(t))+(1-\alpha_{j+1})E]\right)\left[b_i+(1-\alpha_{i+1})c_{i+1}^1\theta_{i+1}(t)\right]+$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{m}\left(\prod_{j=0}^{i-1}C_j[\alpha_{j+1}A_1^T(\theta_{j+1}(t))+(1-\alpha_{j+1})E]\right)(1-\alpha_{i+1})c_{i+1}^1\dot{\theta}_{i+1}(t)-\dot{T}(t)\right]^T e_r\cdot$$

$$\cdot\left[\sum_{i=0}^{m}\left(\prod_{j=0}^{i-1}C_j[\alpha_{j+1}A_1^T(\theta_{j+1}(t))+(1-\alpha_{j+1})E]\right)C_{s-1}\alpha_sB_1^T(\theta_s(t))\cdot\right. \tag{5}$$

$$\cdot\left(\prod_{j=s}^{i-1}C_j[\alpha_{j+1}A_1^T(\theta_{j+1}(t))+(1-\alpha_{j+1})E]\right)\left[b_i+(1-\alpha_{i+1})c_{i+1}^1\theta_{i+1}(t)\right]+$$

$$\left.+\left(\prod_{j=0}^{s-2}C_j[\alpha_{j+1}A_1^T(\theta_{j+1}(t))+(1-\alpha_{j+1})E]\right)(1-\alpha_s)c_s^1\right]^T e_r,$$

де e_r – r-ий орт у тривимірному просторі. Якщо підставити (5) у (4), то система рівнянь Ейлера набуде вигляду

$$\left\|\sum_{i=0}^{m}\left(\prod_{j=0}^{i-1}C_j[\alpha_{j+1}A_1^T(\theta_{j+1}(t))+(1-\alpha_{j+1})E]\right)\left[b_i+(1-\alpha_{i+1})c_{i+1}^1\theta_{i+1}(t)\right]-T(t)\right\|^2+$$

$$+\sum_{r=1}^{3}\left[\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{i-1}\left(\prod_{j=0}^{k-1}C_j[\alpha_{j+1}A_1^T(\theta_{j+1}(t))+(1-\alpha_{j+1})E]\right)C_k\alpha_{k+1}B_1^T(\theta_{k+1}(t))\dot{\theta}_{k+1}(t)\cdot\right.$$

$$\cdot\left(\prod_{j=k+1}^{i-1}C_j[\alpha_{j+1}A_1^T(\theta_{j+1}(t))+(1-\alpha_{j+1})E]\right)\left[b_i+(1-\alpha_{i+1})c_{i+1}^1\theta_{i+1}(t)\right]+$$

$$+\sum_{i=0}^{m}\left(\prod_{j=0}^{i-1}C_j[\alpha_{j+1}A_1^T(\theta_{j+1}(t))+(1-\alpha_{j+1})E]\right)(1-\alpha_{i+1})c_{i+1}^1\dot{\theta}_{i+1}(t)-\dot{T}(t)\Bigg]^T e_r\cdot$$

$$\cdot\Bigg[\sum_{i=0}^{m}\sum_{\substack{k=0\\k\neq s-1}}^{i-1}\left(\prod_{j=0}^{k-1}C_j[\alpha_{j+1}A_1^T(\theta_{j+1}(t))+(1-\alpha_{j+1})E]\right)C_k\alpha_{k+1}B_1^T(\theta_{k+1}(t))\dot{\theta}_{k+1}(t)\cdot \tag{6}$$

$$\cdot\left(\prod_{j=k+1}^{i-1}C_j[\alpha_{j+1}A_1^T(\theta_{j+1}(t))+(1-\alpha_{j+1})E]\right)\left[b_i+(1-\alpha_{i+1})c_{i+1}^1\theta_{i+1}(t)\right]+$$

$$+\sum_{\substack{i=0\\i\neq s-1}}^{m}\left(\prod_{j=0}^{i-1}C_j[\alpha_{j+1}A_1^T(\theta_{j+1}(t))+(1-\alpha_{j+1})E]\right)(1-\alpha_{i+1})c_{i+1}^1\dot{\theta}_{i+1}(t)-\dot{T}(t)-$$

$$-\sum_{i=0}^{m}\left(\prod_{j=0}^{i-1}C_j[\alpha_{j+1}A_1^T(\theta_{j+1}(t))+(1-\alpha_{j+1})E]\right)C_{s-1}\alpha_sB_1^T(\theta_s(t))\dot{\theta}_s(t)\cdot$$

$$\cdot\left(\prod_{j=s}^{i-1}C_j[\alpha_{j+1}A_1^T(\theta_{j+1}(t))+(1-\alpha_{j+1})E]\right)\left[b_i+(1-\alpha_{i+1})c_{i+1}^1\theta_{i+1}(t)\right]-$$

$$-\left(\prod_{j=0}^{s-2}C_j[\alpha_{j+1}A_1^T(\theta_{j+1}(t))+(1-\alpha_{j+1})E]\right)(1-\alpha_s)c_s^1\dot{\theta}_s(t)\Bigg]^T e_r=const\,.$$

Проаналізуємо другий доданок у (6). Він є сумою добутків двох множників, де всі члени однакові, за винятком коефіцієнтів коло $\dot{\theta}_s(t)$, які відрізняються знаками. Тому кожен добуток можна замінити різницею двох квадратів. Якщо перепозначити

$$P=\left\|\sum_{i=0}^{m}\left(\prod_{j=0}^{i-1}C_j[\alpha_{j+1}A_1^T(\theta_{j+1}(t))+(1-\alpha_{j+1})E]\right)\left[b_i+(1-\alpha_{i+1})c_{i+1}^1\theta_{i+1}(t)\right]-T(t)\right\|^2,$$

$$a_{sr}=\Bigg[\sum_{i=0}^{m}\left(\prod_{j=0}^{i-1}C_j[\alpha_{j+1}A_1^T(\theta_{j+1}(t))+(1-\alpha_{j+1})E]\right)C_{s-1}\alpha_sB_1^T(\theta_s(t))\cdot$$

$$\cdot\left(\prod_{j=s}^{i-1}C_j[\alpha_{j+1}A_1^T(\theta_{j+1}(t))+(1-\alpha_{j+1})E]\right)\left[b_i+(1-\alpha_{i+1})c_{i+1}^1\theta_{i+1}(t)\right]-$$

$$-\left(\prod_{j=0}^{s-2}C_j[\alpha_{j+1}A_1^T(\theta_{j+1}(t))+(1-\alpha_{j+1})E]\right)(1-\alpha_s)c_s^1\Bigg]^T e_r,$$

то система (6) запишеться так

$$P+\sum_{r=1}^{3}\left(\sum_{\substack{i=1\\i\neq s}}^{m+1}a_{ir}\dot{\theta}_i(t)-\dot{T}(t)e_r\right)^2-\sum_{r=1}^{3}\left(a_{sr}\dot{\theta}_s\right)^2=const\,,\qquad s=1,2...m+1. \tag{7}$$

Розкриємо у (7) дужки і згрупуємо коефіцієнти біля степенів $\dot{\theta}_i$. Якщо перепозначити $k_{ii}:=\sum_{r=1}^{3}a_{ir}^2$, $k_{ij}:=\sum_{r=1}^{3}a_{ir}a_{jr}$, $k_i:=\sum_{r=1}^{3}a_{ir}\dot{T}(t)e_r$, то (7) набуде вигляду

$$
\begin{gathered}
k_{11}\dot\theta_1^2 + k_{22}\dot\theta_2^2 + \cdots + k_{mm}\dot\theta_m^2 - k_{m+1m+1}\dot\theta_{m+1}^2 + k_{12}\dot\theta_1\dot\theta_2 + k_{13}\dot\theta_1\dot\theta_3 + \cdots + \\
+ k_{m-1m}\dot\theta_{m+1}\dot\theta_m + k_1\dot\theta_1 + k_2\dot\theta_2 + \cdots + k_m\dot\theta_m = const_1 - P - \|T\|, \\
k_{11}\dot\theta_1^2 + k_{22}\dot\theta_2^2 + \cdots - k_{mm}\dot\theta_m^2 + k_{m+1m+1}\dot\theta_{m+1}^2 + k_{12}\dot\theta_1\dot\theta_2 + k_{13}\dot\theta_1\dot\theta_3 + \cdots + \\
+ k_{m-2m+1}\dot\theta_{m-1}\dot\theta_{m+1} + k_1\dot\theta_1 + k_2\dot\theta_2 + \cdots + k_{m+1}\dot\theta_{m+1} = const_2 - P - \|T\|, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-k_{11}\dot\theta_1^2 + k_{22}\dot\theta_2^2 + \cdots + k_{mm}\dot\theta_m^2 + k_{m+1m+1}\dot\theta_{m+1}^2 + k_{23}\dot\theta_2\dot\theta_3 + k_{24}\dot\theta_2\dot\theta_4 + \cdots + \\
+ k_{mm+1}\dot\theta_m\dot\theta_{m+1} + k_2\dot\theta_2 + k_3\dot\theta_3 + \cdots + k_{m+1}\dot\theta_{m+1} = const_{m+1} - P - \|T\|.
\end{gathered} \tag{8}
$$

Розв'яжемо (8) відносно $\dot\theta_1, \dot\theta_2 \cdots \dot\theta_{m+1}$. Проілюструємо розв'язання для роботів з невеликою кількістю ланок.

1. $m = 1$. Система (8) має вигляд

$$
\begin{gathered}
k_{11}\dot\theta_1^2 - k_{22}\dot\theta_2^2 + k_1\dot\theta_1 = Q_1, \\
-k_{11}\dot\theta_1^2 + k_{22}\dot\theta_2^2 + k_2\dot\theta_2 = Q_2,
\end{gathered} \tag{9}
$$

де через Q_1 та Q_2 позначено відповідно $const_1 - P - \|T\|$ та $const_2 - P - \|T\|$. Сума цих рівнянь дає $k_1\dot\theta_1 + k_2\dot\theta_2 = Q_1 + Q_2$. Звідси можна виразити $\dot\theta_1$ через $\dot\theta_2$. Далі підставляємо вираз для $\dot\theta_1$ в одне з рівнянь (9) і розв'язуємо одержане квадратне відносно $\dot\theta_2$ рівняння.

2. $m = 2$. Система (8) має вигляд

$$
\begin{gathered}
k_{11}\dot\theta_1^2 + k_{22}\dot\theta_2^2 - k_{33}\dot\theta_3^2 + k_{12}\dot\theta_1\dot\theta_2 + k_1\dot\theta_1 + k_2\dot\theta_2 = Q_1, \\
k_{11}\dot\theta_1^2 - k_{22}\dot\theta_2^2 + k_{33}\dot\theta_3^2 + k_{13}\dot\theta_1\dot\theta_3 + k_1\dot\theta_1 + k_3\dot\theta_3 = Q_2, \\
-k_{11}\dot\theta_1^2 + k_{22}\dot\theta_2^2 + k_{33}\dot\theta_3^2 + k_{23}\dot\theta_2\dot\theta_3 + k_2\dot\theta_2 + k_3\dot\theta_3 = Q_3.
\end{gathered} \tag{10}
$$

Виключимо з неї одну із змінних, наприклад $\dot\theta_1$. Для цього додамо перше і третє рівняння і знайдемо, що

$$
\dot\theta_1 = \frac{Q_1/2 + Q_3/2 - k_{22}\dot\theta_2^2 - k_{23}\dot\theta_2\dot\theta_3 - 2k_2\dot\theta_2 + k_3\dot\theta_3}{k_{12}\dot\theta_2 + k_1}.
$$

Аналогічно, знайшовши різницю першого та другого рівнянь, одержимо

$$
\theta_1' = \frac{Q_1/2 - Q_2/2 - k_{22}\dot\theta_2^2 + k_{33}\dot\theta_3^2 - k_2\dot\theta_2 + k_3\dot\theta_3}{k_{12}\dot\theta_2 - k_{13}\dot\theta_3}.
$$

Прирівнюючи праві частини, маємо

$$
A_1\dot\theta_2^2\dot\theta_3 + A_2\dot\theta_3^2\dot\theta_2 + A_3\dot\theta_2^2 + A_4\dot\theta_3^2 + A_5\dot\theta_2\dot\theta_3 + A_6\dot\theta_2 + A_7\dot\theta_3 + A_8 = 0, \tag{11}
$$

де $A_1 = k_{22}k_{13} - k_{12}k_{23}$, $A_2 = k_{23}k_{13} - k_{12}k_{33}$, $A_3 = k_{22}k_1 - k_{12}k_2$,
$A_4 = k_{13}k_3 - k_{33}k_1$, $A_5 = 2k_{13}k_2 - 2k_{12}k_3$, $A_6 = k_1k_2 + k_{12}(Q_2 + Q_3)/2$,
$A_7 = -k_1k_3 - k_{13}(Q_1 + Q_3)/2$, $A_8 = k_1(Q_2 - Q_1)$.

Доведемо наступну теорему.

Теорема. Для будь-яких коефіцієнтів $A_1, A_2 \cdots A_8$, де $A_1 \neq 0$ та $A_2 \neq 0$ існує така однозначна заміна змінних

$$
\dot\theta_2 := \dot\theta_2 + \Delta\dot\theta_2, \qquad \dot\theta_3 := \dot\theta_3 + \Delta\dot\theta_3, \tag{12}
$$

за допомогою якої рівняння (11) можна розкласти на множники

$$
\left(B_1\dot\theta_2 + B_2\dot\theta_3 + B_3\right)\left(\dot\theta_2\dot\theta_3 + P_1\dot\theta_2 + P_2\dot\theta_3 + P_3\right) = 0. \tag{13}
$$

Доведення. Прирівнюємо у (11) і (13) коефіцієнти при відповідних степенях $\dot\theta_2$ та $\dot\theta_3$ і послідовно виражаємо

$$\dot\theta_2^2\dot\theta_3 : B_1 = A_1, \qquad \dot\theta_3^2\dot\theta_2 : B_2 = A_2, \qquad \dot\theta_2^2 : P_1 = A_3 / B_1 = A_3 / A_1, \qquad \dot\theta_3^2 : P_2 = A_4 / B_2 = A_4 / A_2,$$

$$\dot\theta_2\dot\theta_3 : B_3 = A_5 - B_1P_2 - B_2P_1 = A_5 - A_1A_4 / A_2 - A_2A_4 / A_1, \qquad 1 : P_3 = A_8 / B_3.$$

Тоді для коефіцієнтів при $\dot\theta_2$ та $\dot\theta_3$ одержуються рівняння

$$\begin{cases} A_2A_8 + A_4 / A_2\left(A_5 - A_1A_4 / A_2 - A_2A_3 / A_1\right)^2 - A_7\left(A_5 - A_1A_4 / A_2 - A_2A_3 / A_1\right) = 0, \\ A_1A_8 + A_3 / A_1\left(A_5 - A_1A_4 / A_2 - A_2A_3 / A_1\right)^2 - A_6\left(A_5 - A_1A_4 / A_2 - A_2A_3 / A_1\right) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Зауважимо, що при заміні (12) коефіцієнти $A_1, A_2 \cdots A_8$ змінюються так:

$$A_1 = A_1, \quad A_2 = A_2, \quad A_3 = A_3 + A_1\Delta\dot\theta_3, \quad A_4 = A_4 + A_2\Delta\dot\theta_2, \quad A_5 = A_5 + 2A_1\Delta\dot\theta_2 + 2A_2\Delta\dot\theta_3,$$

$$A_6 = A_6 + 2A_1\Delta\dot\theta_2\Delta\dot\theta_3 + A_2\Delta\dot\theta_3^2 + 2A_3\Delta\dot\theta_2 + A_5\Delta\dot\theta_3,$$

$$A_7 = A_7 + 2A_2\Delta\dot\theta_2\Delta\dot\theta_3 + A_1\Delta\dot\theta_2^2 + 2A_4\Delta\dot\theta_3 + A_5\Delta\dot\theta_2,$$

$$A_8 = A_8 + A_1\Delta\dot\theta_2^2\Delta\dot\theta_3 + A_2\Delta\dot\theta_3^2\Delta\dot\theta_2 + A_3\Delta\dot\theta_2^2 + A_4\Delta\dot\theta_3^2 + A_5\Delta\dot\theta_2\Delta\dot\theta_3 + A_6\Delta\dot\theta_2 + A_7\Delta\dot\theta_3.$$

Підставляючи ці вирази в (14), з'ясовуємо, що перше рівняння лінійно залежить від $\dot\theta_2$, а друге – від $\dot\theta_3$. Отже, заміна (12) знаходиться однозначно $\Delta\dot\theta_1 = R_1 / R_2$, $\Delta\dot\theta_2 = R_3 / R_4$, де

$$R_1 = A_1^2A_2^3A_5A_7 - A_1^3A_2^2A_4A_7 - A_1A_2^4A_3A_7 - A_1^2A_2^4A_8 - A_2^4A_3^2A_4 - A_1^4A_4^3 +$$
$$+ 2A_1^3A_4^2A_2A_5 - 2A_1^2A_2^2A_4^2A_3 - A_1^2A_2^2A_4A_5^2 + 2A_1A_2^3A_3A_4A_5,$$

$$R_2 = -A_1^3A_2^3A_7 + A_2^5A_3^2 + A_1^2A_2^4A_6 - A_1^4A_2A_4^2 - A_1A_2^4A_3A_5 + A_1^3A_2^3A_4A_5,$$

$$R_3 = -A_1^2A_2^3A_3A_6 - A_1^4A_2^2A_8 + 2A_1A_2^3A_3^2A_5 + A_1^3A_2^2A_5A_6 - A_1^2A_2^2A_3A_5^2 -$$
$$- 2A_1^2A_2^2A_3^2A_4 - A_1^4A_3A_4^2 + 2A_1^3A_2A_3A_4A_5 - A_1^4A_2A_4A_6 - A_2^4A_3^3,$$

$$R_4 = A_1^4A_2^2A_7 - A_1A_2^4A_3^2 - A_1^3A_2^3A_6 + A_1^5A_4^2 + A_1^2A_2^3A_3A_5 - A_1^4A_2A_4A_5.$$

Теорема доведена.

Застосуємо її до розв’язування системи (10). З (13) випливає, що один із співмножників дорівнює нулеві. Нехай, наприклад, нульовим є перший множник. Тоді, виразивши $\dot\theta_2$ через $\dot\theta_3$ і підставляючи його в (10), одержимо систему меншої вимірності, для якої розв’язок легко виписується. Аналогічно розглядається ситуація, коли дорівнює нулеві другий співмножник.

Отже, при $m > 1$ можна послідовно зменшувати вимірність системи (8) і розв’язати її відносно $\dot\theta_1, \dot\theta_2 \cdots \dot\theta_{m+1}$. Якщо додатково врахувати початкові умови для $\theta_1(t), \theta_1(t) \cdots \theta_{m+1}(t)$, то задача синтезу оптимального керування зводиться до задачі Коші.

1. Сопронюк Ф.О. Моделювання та оптимізація систем управління з розгалуженням структур. Чернівці. 1995. 2. Кириченко Н.Ф., Сопронюк Ф.А. Кинематические и динамические модели мехатронных систем // Проблемы управления и информатики. 1995. № 6. С.116–127. 3. Сопронюк Ф.А., Фодчук А.В. Математическое описание структур мехатронных систем // Проблемы управления и информатики. 1996. №3. С.127-134. 4. Sopronjuk F. Methods of Control and the Converse Problem for Mechatronic Systems // Development and application systems. Suceava, Romana, 1998. № 10. 5. Gaidaichuk I., Gaidaichuk T. Optimal *control synthesis for moving robot capture on the given trajectory // Development and application systems. Suceava , Romana, 2000. P.97–100. 6. Surdu A., Lazoric V. The Method of Successive Approximation in Converse Problems for Mechatronic Systems // Development and application systems. Suceava, Romana, 1998. № 10.*

УДК 519.711

Сопронюк Ф.О., Тимофієва Є.М., Гайдайчук Т.І.
Чернівецький державний університет ім. Ю. Федьковича

ПРОБЛЕМИ СИНТЕЗУ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ ЗІ ЗМІННОЮ СТРУКТУРОЮ

The method for optimal synthesis of control systems with structure change with continuous or discrete argument was proposed on the bases of maximum principle.

Для керованих систем зі зміною вимірності фазового простору як з дискретним, так і з неперервним аргументом запропоновано метод розв'язання задачі про оптимальний синтез на основі принципу максимуму.

Розглянемо лінійну систему керування зі зміною вимірності фазового простору з дискретним аргументом

$$x_{(j)}(k_{j-1}+k+1)=A_j\left(k_{j-1}+k\right)x_{(j)}(k_{j-1}+k)+$$
$$+b_{(j)}\left(k_{j-1}+k\right)u_{(j)}(k_{j-1}+k),\ k\in\left[0,k_j-k_{j-1}-1\right], \tag{1}$$

$$x_{(j)}(k_{j-1})=C_j x_{(j-1)}(k_{j-1})+d_{(j)}v_{(j)},\quad j=\overline{1,N}, \tag{2}$$

$$x_{(1)}(k_0)=0,\ x_{(N)}(k_N)=x_{(N)}, \tag{3}$$

де $x_{(j)}(k_{j-1}+k)\in X_j$, X_j – n_j-вимірний фазовий простір, $A_j(k_{j-1}+k)$, $C_j(k_{j-1}+k)$– матриці відповідно розмірів $n_j\times n_j$, $n_j\times n_{j-1}$, $u_j(k_{j-1}+k)$, v_j – скалярні величини, $b_{(j)}\left(k_{j-1}+k\right)$, $d_{(j)}$ – n_j-вимірні вектори, $k_0<k_1<...<k_N$ – значення аргумента, при яких змінюється вимірність фазового простору.

Якщо (1), (2) керована на $\left[k_0,k_N\right]$, то, як показано в [1], керування $\hat{u}_{(j)}(k_{j-1}+k)$, $k=0,1,...,k_j-k_{j-1}-1$, та параметри керувань у переключенні структур $\hat{v}_{(j)}$, $j=\overline{1,N}$, які переводять систему зі стану $x_{(1)}(k_0)=0\in X_1$ в стан $x_{(N)}(k_N)=x_{(N)}\in X_N$, мають вигляд

$$\hat{u}_j(k_{j-1}+k)=W_j^T(k_j,k_{j-1}+k)\Phi_N^T(k_N,k_j)V_N^{-1}(k_N,k_0)x_{(N)}, \tag{4}$$

$$\hat{v}_j=d_{(j)}^T X_j^T(k_j,k_{j-1})\Phi_N^T(k_N,k_j)V_N^{-1}(k_N,k_0)x_{(N)}, \tag{5}$$

де

$$X_j(k_{j-1}+k,k_{j-1}+s)=A_j(k_{j-1}+k-1)A_j(k_{j-1}+k-2)...A_j(k_{j-1}+s),$$