control synthesis for moving robot capture on the given trajectory // Development and application systems. Suceava , Romana, 2000. P.97–100. 6. Surdu A., Lazoric V. The Method of Successive Approximation in Converse Problems for Mechatronic Systems // Development and application systems. Suceava, Romana, 1998. № 10.

УДК 519.711

Сопронюк Ф.О., Тимофієва Є.М., Гайдайчук Т.І.
Чернівецький державний університет ім. Ю. Федьковича

ПРОБЛЕМИ СИНТЕЗУ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ ЗІ ЗМІННОЮ СТРУКТУРОЮ

The method for optimal synthesis of control systems with structure change with continuous or discrete argument was proposed on the bases of maximum principle.

Для керованих систем зі зміною вимірності фазового простору як з дискретним, так і з неперервним аргументом запропоновано метод розв'язання задачі про оптимальний синтез на основі принципу максимуму.

Розглянемо лінійну систему керування зі зміною вимірності фазового простору з дискретним аргументом

$$x_{(j)}(k_{j-1}+k+1)=A_j(k_{j-1}+k)x_{(j)}(k_{j-1}+k)+$$
$$+b_{(j)}(k_{j-1}+k)u_{(j)}(k_{j-1}+k),\ k\in[0,k_j-k_{j-1}-1], \tag{1}$$

$$x_{(j)}(k_{j-1})=C_j x_{(j-1)}(k_{j-1})+d_{(j)}v_{(j)},\quad j=\overline{1,N}, \tag{2}$$

$$x_{(1)}(k_0)=0,\ x_{(N)}(k_N)=x_{(N)}, \tag{3}$$

де $x_{(j)}(k_{j-1}+k)\in X_j$, X_j – n_j-вимірний фазовий простір, $A_j(k_{j-1}+k)$, $C_j(k_{j-1}+k)$ – матриці відповідно розмірів $n_j\times n_j$, $n_j\times n_{j-1}$, $u_j(k_{j-1}+k)$, v_j – скалярні величини, $b_{(j)}(k_{j-1}+k)$, $d_{(j)}$ – n_j-вимірні вектори, $k_0<k_1<...<k_N$ – значення аргумента, при яких змінюється вимірність фазового простору.

Якщо (1), (2) керована на $[k_0,k_N]$, то, як показано в [1], керування $\hat{u}_{(j)}(k_{j-1}+k)$, $k=0,1,...,k_j-k_{j-1}-1$, та параметри керувань у переключенні структур $\hat{v}_{(j)}$, $j=\overline{1,N}$, які переводять систему зі стану $x_{(1)}(k_0)=0\in X_1$ в стан $x_{(N)}(k_N)=x_{(N)}\in X_N$, мають вигляд

$$\hat{u}_j(k_{j-1}+k)=W_j^T(k_j,k_{j-1}+k)\Phi_N^T(k_N,k_j)V_N^{-1}(k_N,k_0)x_{(N)}, \tag{4}$$

$$\hat{v}_j=d_{(j)}^T X_j^T(k_j,k_{j-1})\Phi_N^T(k_N,k_j)V_N^{-1}(k_N,k_0)x_{(N)}, \tag{5}$$

де

$$X_j(k_{j-1}+k,k_{j-1}+s)=A_j(k_{j-1}+k-1)A_j(k_{j-1}+k-2)...A_j(k_{j-1}+s),$$

$$\Phi_j(k_{j-1}+k,k_{s-1}) = X_j(k_{j-1}+k,k_{j-1})C_j \times X_{j-1}(k_{j-1},k_{j-2})C_{j-1}...X_s(k_s,k_{s-1})C_s,$$
$$W_j(k_{j-1}+k,k_{j-1}+s) = X_j(k_{j-1}+k,k_{j-1}+s)b_{(j)}(k_{j-1}+s),$$
$$s \le k,\ 0 \le k \le k_j - k_{j-1} - 1,\ j = \overline{1,N},$$
$$V(k_N,k_0) = \sum_{j=1}^{N} \Phi_N(k_N,k_j)(X_j(k_j,k_{j-1})d_{(j)}d_{(j)}^T X_j^T(k_j,k_{j-1}) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{k_j-k_{j-1}-1} W_j(k_j,k_{j-1}+k)W_j^T(k_j,k_{j-1}+k)\Big)\Phi_N^T(k_N,k_j). \tag{6}$$

Означення. Якщо система (1), (2) керована, то *загальним розв'язком задачі керування* про переведення її зі стану $x_{(1)}(k_0)=0$ в стан $x_{(N)}(k_N)=x_{(N)}$ називатимемо множину

$$\Omega_{u,v} = \{(u_j(k_{j-1}), u_j(k_{j-1}+1),...,u_j(k_j-1), v_j) : u_j(k_{j-1}+k) \in R,$$
$$k \in [0, k_j - k_{j-1} - 1], v_j \in R, j = \overline{1,N},\ x_{(1)}(k_0) = 0, x_{(N)}(k_N) = x_{(N)}\},$$

тобто, множину всіх керувань, при яких виконується (3).

Використовуючи результати робіт [1]–[3], можна одержати множину $\Omega_{u,v}$ в явному вигляді.

Для обчислення матриці $V_N(k_N,k_0)$ потрібно розв’язати систему рівнянь

$$V_j(k_{j-1}+k+1,k_0) = A_j(k_{j-1}+k)V_j(k_{j-1}+k,k_0)A_j^T(k_{j-1}+k) +$$
$$+ b_{(j)}(k_{j-1}+k)b_{(j)}^T(k_{j-1}+k),\ j = 1,2,...,N, \tag{7}$$
$$V_1(k_0,k_0) = b_{(1)}(k_0)b_{(1)}^T(k_0), \tag{8}$$
$$V_j(k_{j-1}) = C_j V_{j-1}(k_{j-1},k_0)C_j^T + d_{(j)}d_{(j)}^T,\ j = 2,...,N. \tag{9}$$

Задамо у фазовому просторі X_N множину точок $Y = \{y_{(N)}^1,\ y_{(N)}^2,\ ...,\ y_{(N)}^M\}$. Задачу про оптимальний синтез системи керування вигляду (1), (2) подамо як задачу оптимального керування системою (7)–(9) за таким критерієм якості:

$$\sum_{s=0}^{M} (y_{(N)}^s)^T V_N^{-1}(k_N,k_0) y_{(N)}^s \to \min_{b_{(p)}(k_{p-1}+q),\, q=0,1,...,k_p+k_{p-1}-1,\, d_{(p)},\, p=\overline{1,N}}. \tag{10}$$

Така постановка задачі дозволяє оптимізувати структуру систем керування зі зміною вимірності фазового простору.

Для розв’язання задачі оптимального синтезу використовуються два підходи. Перший з них базується на явній залежності функціонала (10) від векторів $b_{(p)}(k_{p-1}+q)$, $q = 0, 1, ..., k_p + k_{p-1} - 1$, $d_{(p)}$, $p = \overline{1,N}$, а другий – на використанні функції Гамільтона [4–6].

Розглянемо тепер систему керування зі зміною вимірності фазового простору з неперервним аргументом [1]. Нехай $[T_0,T_1]$ – відрізок часу з розбиттям

$$\{t_j, 0 \le j \le N\} = \{T_0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{N-1} < t_N = T_1\},$$

а рух об'єкта керування задається у вигляді

$$\frac{dx_{(j)}(t)}{dt} = A_j(t)x_{(j)}(t) + b_{(j)}u_j(t),\ t \in [t_{j-1}, t_j), \tag{11}$$

$$x_{(j)}(t_{j-1}) = C_j x_{(j-1)}(t_{j-1}) + d_{(j)} v_j, \tag{12}$$

де $x_{(j)}(t)$ – n_j-вимірний вектор стану на інтервалі $[t_{j-1}, t_j)$, $A_j(t), C_j$ – матриці відповідно розмірів $n_j \times n_j$ та $n_j \times n_{j-1}$, $b_{(j)}, d_{(j)}$ – n_j-вимірні вектори, $u_j(t)$ і v_j – скалярні величини, $t \in [t_{j-1}, t_j)$, $j = \overline{1, N}$, причому компоненти матриць $A_j(t)$ і керувань $u_j(t)$ кусково-неперервні при $t \in [t_{j-1}, t_j)$, $C_1 = E_1$ – одинична матриця порядку n_1, а $d_{(1)}$ – нульовий вектор розміру n_1. Тоді, як відомо з теорії звичайних диференціальних рівнянь, існує і єдиний кусково-неперервний розв'язок (11), (12) – $x_{(j)}(t)$, $t \in [t_{j-1}, t_j)$, який відповідає функціям керування $u_j(t)$, $t \in [t_{j-1}, t_j)$, параметрам керувань у переключенні структур v_j, $j = \overline{1, N}$, і задовольняє початкову умову $x_{(1)}(T_0) = x_{(1)}$.

Нехай $X_j(t, \tau)$ – нормальна фундаментальна матриця розв'язків лінійної однорідної системи

$$\frac{dX_j(t,\tau)}{dt} = A_j(t) X_j(t,\tau),\ t, \tau \in [t_{j-1}, t_j), \tag{13}$$

$$X_j(\tau, \tau) = E_j, \tag{14}$$

де E_j – одинична матриця порядку n_j.

Позначимо

$$W_{jk}(t,\tau) = X_j(t, t_{j-1}) C_j\, X_{j-1}(t_{j-1}, t_{j-2}) C_{j-1} \ldots X_{k+1}(t_{k+1}, t_k) C_{k+1}\, X_k(t_k, \tau) b_{(k)}, \tag{15}$$
$$\tau \in [t_{k-1}, t_k),\ t \in [t_{j-1}, t_j),\ 1 \le k \le j,$$

$$W_{jk}(t) = X_j(t, t_{j-1}) C_j\, X_{j-1}(t_{j-1}, t_{j-1}) C_{j-1} \ldots X_{k+1}(t_{k+1}, t_k) C_{k+1} X_k(t_k, t_{k-1}) d_{(k)}, \tag{16}$$
$$t \in [t_{j-1}, t_j),\ 1 \le k \le j,\ j = \overline{1, N}.$$

Легко переконатися, що розв'язок (11), (12), який задовольняє початкову умову $x_{(1)}(T_0) = x_{(1)}$, має вигляд

$$x_{(j)}(t) = \int_{t_{j-1}}^{t} W_{jj}(t,\tau) u_j(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{j-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} W_{jk}(t,\tau) u_k(\tau) d\tau +$$
$$+ \sum_{k=1}^{j} W_{jk}(t) v_k + X_j(t, t_{j-1}) C_j \ldots X_1(t, t_0) C_1 x_{(1)},\ t \in [t_{j-1}, t_j).$$

Теорема. Якщо система (11), (12) цілком керована, то множина $\Omega_{u,v}$ всіх функцій керування $\bar{u}_j(t) \in R, t \in [t_{j-1}, t_j]$, та параметрів керувань v_j у переключенні структур, $j = \overline{1, N}$, які переводять вектор стану системи (11), (12) з $x_{(1)}(k_0) = 0 \in X_1$ в $x_{(N)}(k_N) = x_{(N)} \in X_N$, має вигляд

$$\Omega_{u,v} = \{(u_j(t), v_j):\ u_j(t) \in R,\ t \in [t_{j-1}, t_j],\ v_j \in R,$$
$$u_j(t) = \hat{u}_j(t) + \bar{u}_j(t) - W_{Nj}^T(t_N, t) W^{-1} \times$$
$$\times \sum_{m=1}^{N} \left(\int_{t_{m-1}}^{t_m} W_{Nm}(t_N, \tau) \bar{u}_m(\tau) d\tau + W_{Nm}(t_N) \bar{v}_m \right),$$

$$v_j = \hat{v}_j + \bar{v}_j - W_{Nj}^T(t_N)W^{-1} \times$$
$$\times \sum_{m=1}^{N} \left(\int_{t_{m-1}}^{t_m} W_{Nm}(t_N,\tau)\bar{u}_m(\tau)d\tau + W_{Nm}(t_N)\bar{v}_m \right), \ j=\overline{1,N} \Big\}, \tag{17}$$

де $\bar{u}_j(t) \in R$ – будь-які інтегровані на інтервалі $\lfloor t_{j-1}, t_j \rfloor$ функції, $\bar{v}_j \in R$ – довільні сталі, $\hat{u}_j(t) = W_{Nj}^T(t_N,t)W^{-1}x_{(N)}$, $t \in \lfloor t_{j-1}, t_j \rfloor$, $\hat{v}_j = W_{Nj}^T(t_N)W^{-1}x_{(N)}$, $W_{Nj}(t_N,t)$ та $W_{Nj}(t_N)$ – визначаються відповідно за формулами (15), (16), $j=\overline{1,N}$,

$$W = \sum_{j=1}^{N} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} W_{Nj}(t_N,\tau)W_{Nj}^T(t_N,\tau)d\tau + W_{Nj}(t_N)W_{Nj}^T(t_N) \right),$$

W^{-1} – обернена матриця до матриці W.

Нехай у фазовому просторі X_N задана множина векторів $\Omega_y = \{y_{(N)}^1, y_{(N)}^2, ..., y_{(N)}^M\}$. Задачу про синтез систем керування вигляду (11), (12) сформулюємо як задачу про вибір векторів $b_{(1)},...,b_{(N)}$, $d_{(1)},...,d_{(N)}$ так, щоб мінімізувати функціонал

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} u_j^2(\tau)d\tau + v_j^2 \right)$$

на траєкторіях системи (11), (12) при переведенні цієї системи з нульового стану у будь-який стан з множини Ω_y.

Розв’язання цієї задачі еквівалентне розв’язанню задачі

$$\sum_{j=1}^{M} (y_{(N)}^j)^T W^{-1} y_{(N)}^j \to \min_{b_{(1)},...,b_{(N)},d_{(1)},...,d_{(N)}} \tag{18}$$

на траєкторіях системи

$$\frac{dU_j(t)}{dt} = A_j(t)U_j(t) + U_j(t)A_j^T(t) + b_{(j)}b_{(j)}^T, \tag{19}$$

$$U_j(t_{j-1}+0) = C_j U_{j-1}(t_{j-1}-0)C_j^T + d_{(j)}d_{(j)}^T, \tag{20}$$

де $U_j(t) = \int_{t_{j-1}}^{t} W_{jj}(t,\tau)W_{jj}^T(t,\tau)d\tau + V_{jj}(t)V_{jj}^T(t) + \sum_{k=1}^{j-1}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} W_{jk}(t,\tau)W_{jk}^T(t,\tau)d\tau + V_{jk}(t)V_{jk}^T(t) \right)$ при $t \in \lfloor t_{j-1}, t_j \rfloor$, $j=\overline{1,N}$, $y_{(1)},...,y_{(M)}$ будь-які n_N-вимірні вектори.

Для розв’язання задачі (18)–(20) тепер застосуємо принцип максимуму Понтрягіна. Запровадимо такі функції:

$$H_{j1}(U_j(t), P_j(t), b_{(j)}) = tr(P_j^T(t)(A_j(t)U_j(t) + U_j(t)A_j^T + b_{(j)}b_{(j)}^T)),$$

де $P_j(t)$ – матриці розміру $n_j \times n_j$, $t \in \lfloor t_{j-1}, t_j \rfloor$, $j=\overline{1,N}$, які є розв’язками матричних рівнянь

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = -A_j^T(t)P_j(t) - P_j(t)A_j(t), \tag{21}$$

$$P_{j-1}(t_j - 0) = C_{j+1}^T P_j(t_j+0) C_{j+1}, \tag{22}$$

$$P_N(t_N) = \sum_{j=1}^{M} y_{(N)}^j (y_{(N)}^j)^T\,; \tag{23}$$

$$H_{j2}(U_j(t_j-0), P_{j+1}(t_j+0), d_{(j+1)}) = tr(P_{j+1}^T(t_j+0)(C_{j+1}U_j(t_j-0)C_{j+1}^T + d_{(j+1)}d_{(j+1)}^T))\,,$$

$$j = 1,\ldots,N-1\,.$$

Знайшовши розв’язок задачі (21)–(23), застосуємо до розв’язання задачі (18)–(20) градієнтну процедуру. Для цього виберемо деякі вектори $b_{(1)}^0,\ldots,b_{(N)}^0, d_{(1)}^0,\ldots,d_{(N)}^0$ як нульове наближення векторів $b_{(1)},\ldots,b_{(N)}, d_{(1)},\ldots,d_{(N)}$. Одержимо рекурентні вирази для обчислення $(s+1)$ - го наближення значень векторів $b_{(1)},\ldots,b_{(N)}, d_{(1)},\ldots,d_{(N)}$

$$b_{(1)}^{s+1} = b_{(1)}^s - \gamma_1 grad_{b(1)} H_{11}\left(U_1(t), P_1(t), b_{(1)}^s\right),$$

$$b_{(2)}^{s+1} = b_{(2)}^s - \gamma_2 grad_{b(2)} H_{21}\left(U_2(t), P_2(t), b_{(2)}^s\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{(N)}^{s+1} = b_{(N)}^s - \gamma_N grad_{b(N)} H_{N1}\left(U_N(t), P_N(t), b_{(N)}^s\right),$$

$$d_{(2)}^{s+1} = d_{(2)}^s - \eta_1 grad_{d(2)} H_{12}\left(U_1(t_1-0), P_2(t_1+0), d_{(2)}^s\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d_{(N)}^{s+1} = d_{(N)}^s - \eta_{N-1} grad_{d(N)} H_{N2}\left(U_N(t_{N-1}-0), P_N(t_{N-1}+0), d_{(N)}^s\right)$$

де верхній індекс означає номер ітерації, $\gamma_1,\ldots,\gamma_N,\eta_1,\ldots,\eta_{N-1}$ – деякі сталі, $\gamma_j \in (0,1)$, $j=\overline{1,N}$, $\eta_j \in (0,1)$, $j=1,\ldots,N-1$, а $grad_{b(j)} H_{j1}\left(U_j(t), P_j(t), b_{(j)}^s\right) = \left(P_j(t) + P_j^T(t)\right) b_{(j)}^s$ для будь-якого t, $t \in \left[t_{j-1}, t_j\right)$, $j=\overline{1,N}$, $grad_{d(j+1)} H_{j2}\left(U_j(t_j-0), P_{j+1}(t_j+0), d_{(j+1)}^s\right) = \left(P_{j+1}(t_j+0) + P_{j+1}^T(t_j+0)\right) d_{(j+1)}^s$, $j=1,\ldots,N-1$.

Зауваження 1. Наведений вище алгоритм розв’язання задачі оптимального синтезу можна узагальнити на випадок векторних функцій керування та параметрів керування у переключенні структур.

Зауваження 2. Якщо система керування нестаціонарна, то запропонована рекурентна процедура може бути застосована для синтезу такої системи у кожній точці із вибраної множини зміни параметра t з наступною побудовою апроксимацій невідомих функцій $b_{(1)}(t),\ldots,b_{(N)}(t)$ за знайденими їх значеннями відповідно на інтервалах $t \in \left[t_{j-1}, t_j\right)$, $j=\overline{1,N}$.

***Зауваження* 3.** Для розв’язання задачі оптимального синтезу системи керування зі змінною структурою з дискретним аргументом (1), (2) за критерієм (10) легко записати функцію Гамільтона-Понтрягіна і одержати відповідні рекурентні співвідношення для знаходження $b_{(p)}(k_{p-1}+q), q=0,1,\ldots,k_p+k_{p-1}-1, d_{(p)}, p=\overline{1,N}$.

1. Сопронюк Ф.О. Моделювання та оптимізація систем керування з розгалуженням структур. Чернівці, 1995. 2. Кириченко Н.Ф. Псевдообращение матриц и их рекуррентность в задачах моделирования и управления // Проблемы управления и информатики. 1995. № 1. С. 114–127. 3. Кириченко Н.Ф. Аналитическое представление возмущений псевдообратных матриц // Кибернетика и системный анализ. 1997. № 2. С. 98–107. 3. Кириченко Н.Ф. Введение в теорию стабилизации движения. К., 1978. 4. Бублик

Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. К., 1985. 5. Сопронюк Ф.О., Тимофієва Є.М., Буряк Т.І. Синтез систем керування зі зміною вимірності фазового простору // Сучасні проблеми математики: Матеріали міжнар. наук. конф. Ч. 3. К., 1998. С. 111–113.

УДК 513.6

Стахів Л.
Львівський національний університет ім. І. Франка

ПРО ФІЛЬТРАЦІЇ МУЛЬТИПЛІКАТИВНОЇ ГРУПИ ТІЛА НАД ЗАГАЛЬНИМ ЛОКАЛЬНИМ ПОЛЕМ

Узагальнюється один результат Д.Ріма про фільтрації мультиплікативної групи тіла над локальним полем на випадок тіла над псевдолокальним полем.

Нехай K – загальне локальне поле із псевдоскінченним за Аксом [1] полем класів лишків. Розглянемо тіло D індексу n над полем K. Нехай v – нормування поля K, а w – продовження нормування v до нормування тіла D. Через O_K, P_K, U_K позначимо відповідно кільце цілих, ідеал нормування та групу одиниць поля K. Для тіла D відповідні об'єкти позначимо O_D, B_D, U_D. Через π (відповідно Π) позначаємо уніформізуючий елемент поля K (відповідно D). Для $a \in O_K$ (відповідно $a \in O_D$) через $\bar{a}$ позначимо a mod P_K (відповідно a mod B_D). Якщо P – максимальне підполе тіла D, то існує ізоморфізм $\varphi : D \otimes_K P \cong M_n(P)$. Відображення $Nrd_{D/K}(a) = \det \varphi (x \otimes 1)$ називають редукованою нормою. Позначимо $D^{(1)} = SL_1(D) = \{ x \in D^* \mid Nrd_{D/K}(x) = 1\}$ підгрупу елементів групи D* з редукованою нормою 1. Нехай $U_i = 1 + B_D^i$, $C_i = U_i \cap D^{(1)}$, $(i \geq 1)$. Вважаємо, що $U_0 = U_D$, $C_0 = D^{(1)}$. Якщо A і B – підгрупи групи C, то через [A,B] позначимо взаємний комутант цих підгруп, тобто підгрупу, породжену комутаторами $aba^{-1}b^{-1}$, де $a \in A$, $b \in B$.

Мета цієї роботи – узагальнити на випадок псевдолокальних полів один результат Д. Ріма [2] про фільтрації мультиплікативної групи тіла D над локальним полем. А саме, як і у випадку тіл над локальними полями, справедливий такий результат:

Теорема. Нехай $n > 2$. Тоді

1) $[C_1, C_i] = C_{i+1}$ для кожного $i \geq 1$.

2) $$[C_0, C_i] = \begin{cases} C_i, \text{ якщо } i \neq 0 \bmod n \\ C_{i+1}, \text{ якщо } i = 0 \bmod n \end{cases}$$

Зокрема $[C_0, C_0] = C_1$.

Теорему доводимо за тією ж схемою, що і у класичному випадку тіл над локальними полями, тобто ми використовуємо міркування, наведені в [3, с.43–45].

Лема 1. Нехай D – тіло скінченного індексу n над загальним локальним полем K, тоді $Nrd_{D/K}(1+B_D^i) = 1+ P_K^j$, де j – найменше ціле число, що більше ніж i/n або дорівнює йому.