Б.Н., Геращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. К., 1985. 5. Сопронюк Ф.О., Тимофієва Є.М., Буряк Т.І. Синтез систем керування зі зміною вимірності фазового простору // Сучасні проблеми математики: Матеріали міжнар. наук. конф. Ч. 3. К., 1998. С. 111–113.

УДК 513.6

Стахів Л.
Львівський національний університет ім. І. Франка

ПРО ФІЛЬТРАЦІЇ МУЛЬТИПЛІКАТИВНОЇ ГРУПИ ТІЛА НАД ЗАГАЛЬНИМ ЛОКАЛЬНИМ ПОЛЕМ

© Стахів Л., 2000

Узагальнюється один результат Д.Ріма про фільтрації мультиплікативної групи тіла над локальним полем на випадок тіла над псевдолокальним полем.

Нехай K – загальне локальне поле із псевдоскінченним за Аксом [1] полем класів лишків. Розглянемо тіло D індексу n над полем K. Нехай v – нормування поля K, а w – продовження нормування v до нормування тіла D. Через O_K, P_K, U_K позначимо відповідно кільце цілих, ідеал нормування та групу одиниць поля K. Для тіла D відповідні об'єкти позначимо O_D, B_D, U_D. Через π (відповідно Π) позначаємо уніформізуючий елемент поля K (відповідно D). Для $a \in O_K$ (відповідно $a \in O_D$) через $\bar{a}$ позначимо a mod P_K (відповідно a mod B_D). Якщо P – максимальне підполе тіла D, то існує ізоморфізм $\varphi : D \otimes_K P \cong M_n(P)$. Відображення $Nrd_{D/K}(a) = \det \varphi\,(x \otimes 1)$ називають редукованою нормою. Позначимо $D^{(1)} = SL_1(D) = \{ x \in D^* \mid Nrd_{D/K}(x) = 1\}$ підгрупу елементів групи D* з редукованою нормою 1. Нехай $U_i = 1 + B_D^{\,i}$, $C_i = U_i \cap D^{(1)}$, $(i \ge 1)$. Вважаємо, що $U_0 = U_D$, $C_0 = D^{(1)}$. Якщо A і B – підгрупи групи C, то через [A,B] позначимо взаємний комутант цих підгруп, тобто підгрупу, породжену комутаторами $aba^{-1}b^{-1}$, де $a \in A$, $b \in B$.

Мета цієї роботи – узагальнити на випадок псевдолокальних полів один результат Д. Ріма [2] про фільтрації мультиплікативної групи тіла D над локальним полем. А саме, як і у випадку тіл над локальними полями, справедливий такий результат:

Теорема. Нехай n >2. Тоді

1) $[C_1, C_i] = C_{i+1}$ для кожного $i \ge 1$.

2) $[C_0, C_i] = \begin{cases} C_i, \text{ якщо } i \ne 0 \bmod n \\ C_{i+1}, \text{ якщо } i = 0 \bmod n \end{cases}$

Зокрема $[C_0, C_0] = C_1$.

Теорему доводимо за тією ж схемою, що і у класичному випадку тіл над локальними полями, тобто ми використовуємо міркування, наведені в [3, с.43–45].

Лема 1. Нехай D – тіло скінченного індексу n над загальним локальним полем K, тоді $Nrd_{D/K}(1+B_D^{\,i}) = 1+ P_K^{\,j}$, де j – найменше ціле число, що більше ніж i/n або дорівнює йому.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Відомо, що для тіл індексу n над загальними локальними полями індекс галуження нормування w дорівнює n. Нехай L – будь-яке максимальне нерозгалужене підполе тіла D. Через B_L позначимо максимальний ідеал кільця цілих поля L, а через l – поле лишків поля L. Нехай $d \in D$, тоді або $d \in L$, або d належить розгалуженому розширенню M поля K, індекс галуження якого є дільником n. У першому випадку відомо [4], що $N_{L/K}(U^{(i)}{}_L) = U^{(i)}{}_K$. Якщо ж $d \in 1+B^i{}_D$ і $d \notin L$, тоді існує цілком розгалужене підполе $M \subset D$ таке, що $d \in M \cap (1+B^i{}_D)$. Відомо, що $\mathrm{Nrd}(d) = N_{M/K}(d) \in 1+P^j{}_K$, де j – найменше ціле число, що більше або дорівнює i/n. Тобто $\mathrm{Nrd}(1+B^i{}_D) \subset 1+P^j{}_K$, де $j \geq i/n$. З іншого боку, нехай $\mathrm{Nrd}(1+u\,\Pi^i) = 1+v\,\pi^{j0}$, де $j_0 \geq j$. Але для $1+c\,\pi^j \in U_L{}^{(j)}$

$$\mathrm{Nrd}\,((1+u\,\Pi^i)(1+c\,\pi^j)) = \mathrm{Nrd}\,(1+u\,\Pi^i)\mathrm{Nrd}(1+c\,\pi^j)=$$
$$= (1+v\,\pi^{j0})(1+c'\pi^j)=1+c'\pi^j + v\pi^{j0} + c'v\,\pi^{j+j0} \in 1+P^j{}_K.$$

Звідси бачимо, що якщо $1+c\,\pi^j$ пробігає всі можливі значення з $U^{(j)}{}_L$, то $1+c'\,\pi^j$ пробігає всі можливі значення з $U_K{}^{(j)}$.

Лема 2. Існують природні ізоморфізми [3]

$$\rho_0 : U_0/U_1 \to l^*$$
$$\rho_i : U_i/U_{i+1} \to l^+,\ \ i \geq 1$$

такі, що

$$\rho_0\,(C_0) = l^{(1)} = \{x\in l^* \mid N_{L/K}(x) =1\},$$
$$\text{а } \rho_i\,(C_i) = \begin{cases} l, \text{якщо} \quad i \neq 0 \bmod n \\ l^{(0)} = \{x \in l \mid \ \mathrm{Tr}_{L/K}(x) = 0\}, \text{ якщо } i = 0 \bmod n. \end{cases}$$

Тут l^* та l^+ – відповідно мультиплікативна та адитивна групи поля лишків поля L.

Доведення. Для елемента $a \in O_D$ через $\bar{a}$ позначимо його образ в $l = O_D/B_D$. Тоді ρ_0 індукується відображенням $a \to \bar{a}$, а ρ_i $(i \geq 1)$ відображенням $1 + a\,\Pi^i \to \bar{a}$. Обчислення $\rho_0\,(C_0)$ можна знайти в [3]. Знайдемо $\rho_i\,(C_i)$. Нехай тепер $x \in l$ і $a \in O_D$, причому $\bar{a} = x$. Розглянемо $z = 1 + a\Pi^i$. Тоді $t = \mathrm{Nrd}_{D/K}(z) \in 1+P^j{}_K$, де j – найменше ціле з чисел, які дорівнюють або більші, ніж i/n. Якщо $i \neq 0 \bmod n$, то $j \geq (i+1)/n$, і за лемою 1 існує елемент $y \in U_{i+1}$ такий, що $\mathrm{Nrd}_{D/K}(y) = t$. Поклавши $z_1 = zy^{-1}$, отримаємо, що $\mathrm{Nrd}_{D/K}(z_1) = 1$, тобто $z_1 \in C_i$ і $\rho_i(z_1) = x$. Отже, $\rho_i(C_i) = l$ при $i \neq 0 \bmod n$. Нехай тепер $i = jn$. Оскільки $O_D = O_L + B_D$, то

$$B_D{}^i = O_L\pi^j + B_D\pi^j = B^j{}_L + B^{i+1}{}_D, \qquad (*)$$

де O_L і B_L – відповідно кільце цілих та ідеал нормування в L. Зауважимо, що $B_L = \pi\,O_L$ для уніформізуючого елемента π поля K, бо L/K – нерозгалужене розширення. З рівності (*) випливає, що

$$U_i=(U_i \cap L^*)\,U_{i+1} \quad \text{i} \quad U_i \cap L^* = 1+B^j{}_L.$$

Тому якщо $z \in C_i$ і $z = st$, де $s \in U_i \cap L^*$, $t \in U_{i+1}$, то

$$N_{L/K}(s) = \mathrm{Nrd}_{D/K}(t)^{(-1)} \in 1+P_K{}^{j+1}.$$

З іншого боку, якщо $s = 1+r\,\pi^j$, $r \in O_L$, то

$$N_{L/K}(s) = \Pi_{m=0}{}^{n-1}\,\varphi^m\,(1+r\pi^j) \cong 1+\mathrm{Tr}_{L/K}(r)\pi^j \bmod P_K{}^{j+1}.$$

Тобто $\mathrm{Tr}_{L/K}(r) \cong 0 \bmod P_K$, звідси $\mathrm{Tr}_{L/K}\,\bar{r}\,)=0$ і $\rho_i(C_i) \subset l^{(0)}$. Навпаки, якщо $\mathrm{Tr}_{L/K}(r) \cong 0 \bmod \{P_K\}$, то для $s = 1+r\pi^j$ маємо $N_{L/K}(s) \in 1+P_K{}^{j+1}$, обто існує елемент $t \in 1+B_L{}^{j+1}$ такий, що $N_{L/K}(s) = N_{L/K}(t)$ і елемент $z=st^{-1} \in L^{(1)} \cap (1+B_L{}^j)$ такий, що $\rho_i(z) = \bar{r}$.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Лема 3. Нехай $x = 1+a\Pi^i$, $y = 1+b\Pi^j$, де $a,b \in O_D$, $i, j \geq 1$ [3]. Тоді комутатор $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$ має вигляд $1+c\Pi^{i+j}$, де $\bar{c} = \bar{a}\ \sigma^i(\bar{b}) - \sigma^j(\bar{a})\bar{b}$ (тут σ – автоморфізм l над k, який задається відповідністю $\bar{d} \to \overline{\Pi\, d\, \Pi^{-1}}$). Зокрема, $[U_i,U_j] \subset U_{i+j}$.

Доведення. Нехай $(s,t) = st-ts$. Розглянемо $[x,y] = 1+(x-1,y-1)x^{-1}y^{-1}$. Звідси

$$[x,y] = 1 + (a\, \Pi^i\, b\, \Pi^j - b\, \Pi^j\, a\, \Pi^i)\, x^{-1}y^{-1} = 1 + c\Pi^{i+j},$$

де $c=(a\Pi^i b\Pi^{-i} - b\Pi^j a\Pi^{-j})\Pi^{i+j}x^{-1}y^{-1}\Pi^{(-i+j)}$. Перейшовши до лишків і враховуючи, що $\bar{x} = \bar{y} = 1$, отримаємо необхідне.

Лема 4. Нехай σ – твірна групи Gal(l/k). Тоді якщо n не ділить i, то елементи вигляду $\alpha\sigma(\beta) - \sigma^i(\alpha)\beta$ породжують групу l, якщо n ділить i, то такі елементи породжують групу $l^{(0)} = \{\alpha \in l \mid Tr_{L/K}(\alpha) = 0\}$. Зокрема, $\rho_{i+1}([C_1,C_i]) = \rho_{i+1}(C_{i+1})$.

Доведення. Нехай n ділить i. Тоді n не ділить i +1. Покажемо, що в такому випадку $\rho_{i+1}([C_1,C_i]) = l = \rho_{i+1}(C_{i+1})$. Маємо: $\alpha\sigma(\beta) - \sigma^i(\alpha)\beta = \alpha(\sigma(\beta)-\beta)$. Виберемо $\beta \in l^{(0)}$ так, щоб $\sigma(\beta) \neq \beta$ і позначимо $\sigma(\beta)-\beta = \beta_1 \neq 0$. Виберемо $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ \alpha_n$ так, щоб вони утворювали базу l/k. Тоді $\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_1, \ldots\ \alpha_n\beta_1$ теж утворюють базу. Отже лінійні комбінації цих елементів з коефіцієнтами з k породжують все поле l. Нехай n не ділить i, але n ділить i +1. Покажемо, що тоді $\rho_{i+1}([C_1,C_i]) = l^{(0)} = \rho_{i+1}(C_{i+1})$. Нехай $\beta \in l$. З того, що n ділить i+1 маємо i+1 = kn. Тоді $\sigma^i = \sigma^{kn-1} = \sigma^{-1}$ і $\alpha\ \sigma(\beta) - \sigma^i(\alpha)\beta = \alpha\ \sigma(\beta)-\sigma^{-1}(\alpha)\beta = \sigma(\sigma^{-1}(\alpha)\beta) - \sigma^{-1}(\alpha)\beta \in l^{(0)}$ за теоремою Гільберта – 90. Якщо заставимо β пробігати всі елементи поля l , то $\sigma(\sigma^{-1}(\alpha)\beta)-\sigma^{-1}(\alpha)\beta$ пробігає все $l^{(0)}$. Нехай тепер n не ділить i, і n не ділить i+1. Покажемо, що в цьому випадку $\rho_{i+1}([C_1,C_i]) = l = \rho_{i+1}(C_{i+1})$. Замінимо α на $\sigma(\alpha)$ у виразі $\alpha\ \sigma(\beta) - \sigma^i(\alpha)\beta$. Одержимо: $\sigma(\alpha)\ \sigma(\beta) - \sigma^{i+1}(\alpha)\beta = \sigma(\alpha\ \beta) - \alpha\ \beta + \alpha\ \beta - \sigma^{i+1}(\alpha)\ \beta = (\sigma(\alpha\ \beta) - \alpha\ \beta) + \beta(\alpha - \sigma^{i+1}(\alpha))$. $\sigma(\alpha\beta) - \alpha\beta$ пробігає підпростір елементів з нульовим слідом. Але якщо покласти $\alpha \in$ k , то $\sigma(\alpha) = \alpha$ і другий доданок дорівнює нулю, а в першому доданку $\sigma(\alpha\beta) - \alpha\beta$ пробігає підпростір елементів з нульовим слідом. Залишилося показати, що в таких сумах є і елементи з будь-яким ненульовим слідом. Оскільки n не ділить i+1, то можна вибрати α так, щоб $\alpha - \sigma^{i+1}(\alpha) \neq 0$. Тоді, оскільки β – довільний елемент поля l, то добуток $\beta\ (\alpha - \sigma^{i+1}(\alpha))$ пробігає всі ненульові елементи поля l, тому будь-який елемент поля l дорівнює сумі елементів вигляду $\alpha\ \sigma(\beta) - \sigma^i(\alpha)\beta$.

Лема 5. Нехай $i \neq 0 \bmod n$, тоді існує $\alpha \in l^{(1)}$ таке, що $\sigma^i(\alpha) \neq \alpha$.

Доведення. За лемою 4 з [5] кожне розширення псевдоскінченного поля може бути одержане приєднанням елемента α з нормою $N(\alpha) = 1$. Ми стверджуємо, що для цього елемента $\alpha \setminus \sigma^i(\alpha)\neq\alpha$. Якби трапилось, що $\sigma^i(\alpha) = \alpha$, то для будь-якого елемента $y \in l$, $y=a_1+a_2\alpha^2+ \ldots +a_{n-1}\alpha^{n-1}$ і ми отримали б $\sigma^i(y) = a_1 + a_2\ \alpha^2+ \ldots + a_{n-1}\ \alpha^{n-1}$. Тобто отримали б, що σ^i залишає інваріантним кожен елемент поля l. Але тільки нейтральний елемент групи Галуа поля l може мати цю властивість, тобто σ^i повинно дорівнювати 1, а це можливо тільки тоді, коли n ділить i.

Доведення теореми. З лем 2 і 3 випливає, що образ $\rho_{i+1}([C_1,C_i])$ породжується як абельова група елементами виду $\alpha\sigma\ (\beta) - \sigma^i\ (\alpha)\ \beta$, де $\alpha \in l$, $\beta \in l$ або $\beta \in l^{(0)}$ залежно від того, ділиться i на n чи ні. Лема 4 показує, що ці елементи породжують відповідно l або $l^{(0)}$, тобто $\rho_{i+1}(C_{i+1})$. Отже для довільного i маємо:

$$[C_1,C_i]C_{i+2} = C_{i+1} \qquad (**)$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Покажемо тепер, що $[C_1, C_i] = C_{i+1}$. За теоремою Ріма [2], [6] (див. також [3], ст.134-135) будь-який нецентральний нормальний дільник в $D^{(1)}$ є відкритим. Тоді існує j таке, що $[C_1, C_i] \supset C_j$, причому можна вважати, що j – мінімальне число з такою властивістю. Припустимо, що $j > i+1$, тоді $j - 2 \geq i$, тому, використовуючи (**), отримуємо $[C_1, C_i] \supset [C_1, C_{j-2}]\ C_j = C_{j-1}$, що суперечить означенню j. Тобто $j = i+1$ і твердження 1) доведено. З твердження 1) теореми тепер випливає, що $[C_0, C_i] \supset [C_1, C_i]=C_{i+1}$, тому для доведення твердження 2) досить показати, що

$$\rho_i ([C_0, C_i]) = \begin{cases} 1, \text{якщо} \quad i \neq 0 \bmod n \\ 0, \text{ якщо } i = 0 \bmod n. \end{cases}$$

Нехай для цього $x \in U_D$, $i \geq 1$, $y = 1 + a\,\Pi^i$, тоді $\rho_i([x,y]) = \bar{x}\,\sigma^i\,\sigma(\bar{x})^{-1} - 1)a$. Якщо $i = 0 \bmod n$, то $\rho_i([x,y]) = 0$. Якщо ж $i \neq 0 \bmod n$, то за лемою 5 існує такий елемент $\alpha \in l^{(1)}$, що $\sigma^i(\alpha) \neq \alpha$. Тоді, вибравши елемент $x \in D^{(1)}$ такий, що $\bar{x} = \alpha$, отримаємо, що $\rho_i([C_0, C_i]) = l$. Для завершення доведення теореми зауважимо, що

$$[C_0, C_0] \subset C_1 = [C_0, C_1].$$

Отже, $[C_0, C_0] = C_1$.

1. Ax J. The elementary theory of finite field // Ann. Math. 88. 1968. № 2. P. 239–271. 2. Riehm C. The norm 1 group of p-adic division algebra // Amer. J. Math. 1970. Vol.92. 2. P. 499–523. 3. Платонов В.П., Рапинчук А.С. Алгебраические группы и теория чисел. М., 1991. 4. Serre J.P. Corps locaux. Paris, Hermann, 1962. 5. Стахів Л.Л. Про приведену групу Уайтхеда для тіл над псевдолокальними полями // Вісн. ЛДУ. Сер. Мех-мат. 1998. Вип.49. С. 5–9. 6. Riehm C. The congruence subgroup problem over local fields // Amer. J. Math. 1970. Vol.92. 3. P.771–778.

УДК 517.948

Столярчук Р.Р.
НУ "Львівська політехніка", кафедра ОМП

ДВОСТОРОННЯ АПРОКСИМАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ НЕЯВНО ЗАДАНИХ РІВНЯНЬ

© Столярчук Р.Р., 2000

Two-sided Kurpel's type method for differential equations in implicit form were constructed. New theorems about monocity were proved.

Двосторонні ітераційні методи чаплигінського типу для рівняння $x = fx$, де f – нелінійний оператор у деякому напіввпорядкованому просторі E мають квадратичний характер збіжності за припущенням про монотонність та опуклість оператора f.

Для обґрунтування двостороннього методу Н.Бабкіна [1,2] не вимагається опуклості оператора f. Однак метод Бабкіна має лінійну швидкість збіжності.

М. Курпель запропонував двосторонній метод з квадратичною швидкістю збіжності [3] (див. також [4, 5]), для обґрунтування якого не конче потрібно, щоби оператор f був монотонним і опуклим.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua