Тому з умови В) випливає, що $y_2 \le x^* \quad x^* \le z_2$.

Отже, принцип індукції дає підставу вважати теорему доведеною.

1. Бабкин Б.Н. О приближенном решении методом С.А.Чаплыгина обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, неразрешенных относительно производной. ПММ. 17. 1953. С.634–648. 2. Rabczuk R. Elementy nierownosci rozniczkowych. Warczawa, 1976. 3. Курпель М.С. Про деякі модифікації методу С.О. Чаплигіна наближеного інтегрування диференціальних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1969. № 4. С. 303–306. 4. Курпель Н.С. Некоторые обобщения и модификации метода С.А. Чаплыгина: В кн. Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и интегральных уравнений. К., 1971. С. 51–72. 5. Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применения. К., 1980. 6. Шувар Б.А. Двусторонние итерационные методы решения нелинейных уравнений в полуупорядоченных пространствах. В кн.: Второй симпозиум по методам решения нелинейных уравнений и задач оптимизации. Т.1. Таллин, 1981. С.68–73.

УДК 517.524

Сусь О.М., Кучмінська Х.Й.*, Возна С.М.*

ІППММ НАН України

*НУ "Львівська політехніка", кафедра обчислювальної математики і програмування

ДІЙСНА ТА УЯВНА ЧАСТИНИ ДЛЯ ЗАЛИШКІВ ДВОВИМІРНОГО НЕПЕРЕРВНОГО ДРОБУ

Bounds for the real and imaginary parts of remainders of a two-dimensional continued fractions with complex elements have been obtained under some conditions on coefficients of the two-dimensional continued fraction and using the representation of these real and imaginary parts.

За допомогою одержаних формул для дійсної та уявної частини залишків двовимірного неперервного дробу для них встановлено оцінки при певних умовах на коефіцієнти двовимірного неперервного дробу.

Під час дослідження збіжності багатовимірних узагальнень неперервних дробів широко використовують оцінки, встановлені для їх залишків методом мажорант [1].Для інтегральних та гіллястих неперервних дробів запропоновано також інший підхід до отримання оцінок залишків з використанням їх зображень у вигляді дійсної та уявної частини [2].

Виведемо формули для дійсної та уявної частин для залишків двовимірного неперервного дробу (ДНД).

Розглянемо ДНД вигляду

$$\mathop{D}_{s=0}^{\infty}\frac{a_{ii}}{b_{ii}+\mathop{D}\limits_{j=i+1}^{\infty}\frac{a_{ji}}{b_{ji}}+\mathop{D}\limits_{j=i+1}^{\infty}\frac{a_{ij}}{b_{ij}}} \tag{1}$$

та його n-е наближення – скінченний двовимірний неперервний дріб

$$f_n := \mathop{D}_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{a_{ii}}{b_{ii}+\mathop{D}\limits_{j=i+1}^{n-2i-1}\frac{a_{ji}}{b_{ji}}+\mathop{D}\limits_{j=i+1}^{n-2i-1}\frac{a_{ij}}{b_{ij}}} \qquad n=1,2,.., \tag{2}$$

де [к] – ціла частина числа к.

Нехай елементи ДНД (1) a_{kj} (k=0,1,..j=0,1,..) комплексно-значні функції такі, що

$$a_{kk} = |a_{kk}|\exp(i\psi_{kk}),\quad k=0,1,..$$

$$a_{kj} = |a_{kj}|\exp(i\vartheta_{kj}),\quad k=1,2,..;j=0,1,..$$

$$a_{jk} = |a_{jk}|\exp(i\varphi_{jk}),\quad j=0,1,..;k=1,2,..$$

де $\psi_{kk} = \arg a_{kk}$; $\vartheta_{kj} = \arg a_{kj}$; $\varphi_{kj} = \arg a_{jk}$; $i=\sqrt{-1}$ – уявна одиниця та всі $b_{kj} > 0$ (k,j = 0,1,..).

Вираз вигляду

$$Q_k^{([(n-1)/2])} = b_{kk} + \frac{a_{k+1,k}}{Q_{1,k+1}^{(n-2k-1)}} + \frac{a_{k,k+1}}{Q_{2,k+1}^{(n-2k-1)}} + \frac{a_{k+1,k+1}}{Q_{k+1}^{([(n-1)/2])}}, \tag{3}$$

k = 0,1,.., $[(n-1)/2]$, називається залишком, або "хвостом" ДНД (2), причому

$$Q_{1,k+j}^{(n-2k-1)} = b_{k+j,k} + \frac{a_{k+j+1,k}}{Q_{1,k+j+1}^{(n-2k-1)}}, \tag{4}$$

k=0,1,.., $[(n-1)/2]$, j=1,..,n-2k-2,

$$Q_{2,k+j}^{(n-2k-1)} = b_{k,k+j} + \frac{a_{k,k+j+1}}{Q_{2,k+j+1}^{(n-2k-1)}},$$

k=0,1,.., $[(n-1)/2]$, j=1,..,n-2k-2,

– це залишки звичайних неперервних дробів, що складають ДНД (2).

Нехай

$$U_k^{([(n-1)/2])} = \operatorname{Re} Q_k^{([(n-1)/2])}, \qquad k=0,1,..,\ [(n-1)/2] \tag{5}$$

$$V_k^{([(n-1)/2])} = \operatorname{Im} Q_k^{([(n-1)/2])},$$

$$U_{1,k+j}^{(n-2k-1)} = \operatorname{Re} Q_{1,k+j}^{(n-2k-1)},\quad V_{1,k+j}^{(n-2k-1)} = \operatorname{Im} Q_{1,k+j}^{(n-2k-1)} \tag{6}$$

k=0,1,.., $[(n-1)/2]$, j=1,..,n-2k-2,

$$U_{2,k+j}^{(n-2k-1)}\ \operatorname{Im} Q_{2,k+j}^{(n-2k-1)},\ V_{2,k+j}^{(n-2k-1)} = \operatorname{Im} Q_{2,k+j}^{(n-2k-1)}$$

k=0,1,.., $[(n-1)/2]$, j=1,..,n-2k-2,

Враховуючи позначення (5), (6), для залишку (3), одержимо

$$Q_k^{([(n-1)/2])} = b_{kk} + \frac{a_{k+1,k}\left(U_{1,k+1}^{(n-2k-1)} - iV_{1,k+1}^{n-2k-1}\right)}{\left|Q_{1,k+1}^{(n-2k-1)}\right|^2} + \frac{a_{k,k+1}\left(U_{2,k+1}^{(n-2k-1)} - iV_{2,k+1}^{n-2k-1}\right)}{\left|Q_{2,k+1}^{(n-2k-1)}\right|^2} +$$

$$+\frac{a_{k+1,k+1}\left(U_{k+1}^{([(n-1)/2])} - iV_{k+1}^{([(n-1)/2])}\right)}{\left|Q_{k+1}^{([(n-1)/2])}\right|^2} = b_{kk} + \frac{\left|a_{k+1,k}\right|e^{i\vartheta_{k+1,k}}\left(U_{1,k+1}^{(n-2k-1)} - iV_{1,k+1}^{n-2k-1}\right)}{\left|Q_{1,k+1}^{(n-2k-1)}\right|^2} +$$

$$+\frac{\left|a_{k,k+1}\right|e^{i\varphi_{k+1,k}}\left(U_{2,k+1}^{(n-2k-1)} - iV_{2,k+1}^{n-2k-1}\right)}{\left|Q_{2,k+1}^{(n-2k-1)}\right|^2} + \frac{\left|a_{k+1,k+1}\right|e^{i\psi_{k+1,k+1}}\left(U_{k+1}^{([(n-1)/2])} - iV_{k+1}^{([(n-1)/2])}\right)}{\left|Q_{k+1}^{([(n-1)/2])}\right|^2}.$$

З останньої рівності отримаємо рекурентні формули для знаходження дійсної та уявної частини k-го залишку:

$$U_k^{([(n-1)/2])} = b_{kk} + \frac{\left|a_{k+1,k}\right|\left(U_{1,k+1}^{(n-2k-1)}\cos\vartheta_{k+1,k} + V_{1,k+1}^{n-2k-1}\sin\vartheta_{k+1,k}\right)}{\left|Q_{1,k+1}^{(n-2k-1)}\right|^2} +$$

$$\frac{\left|a_{k,k+1}\right|\left(U_{2,k+1}^{(n-2k-1)}\cos\varphi_{k+1,k} + V_{2,k+1}^{n-2k-1}\sin\varphi_{k+1,k}\right)}{\left|Q_{2,k+1}^{(n-2k-1)}\right|^2} +$$

$$+\frac{\left|a_{k+1,k+1}\right|\left(U_{k+1}^{([(n-1)/2])}\cos\psi_{k+1,k+1} + V_{k+1}^{([(n-1)/2])1}\sin\psi_{k+1,k+1}\right)}{\left|Q_{k+1}^{([(n-1)/2])}\right|^2} \quad (7)$$

та

$$V_k^{([(n-1)/2])} = \frac{\left|a_{k+1,k}\right|\left(U_{1,k+1}^{(n-2k-1)}\cos\vartheta_{k+1,k} - V_{1,k+1}^{n-2k-1}\sin\vartheta_{k+1,k}\right)}{\left|Q_{1,k+1}^{(n-2k-1)}\right|^2} +$$

$$+\frac{\left|a_{k,k+1}\right|\left(U_{2,k+1}^{(n-2k-1)}\sin\varphi_{k+1,k} - V_{2,k+1}^{n-2k-1}\cos\varphi_{k+1,k}\right)}{\left|Q_{2,k+1}^{(n-2k-1)}\right|^2} +$$

$$+\frac{\left|a_{k+1,k+1}\right|\left(U_{k+1}^{([(n-1)/2])}\sin\psi_{k+1,k+1} - V_{k+1}^{([(n-1)/2])}\cos\psi_{k+1,k+1}\right)}{\left|Q_{k+1}^{([(n-1)/2])}\right|^2}. \quad (8)$$

Враховуючи, що

$U_{1,n-2k-1}^{(n-2k-1)} = b_{n-2k-1,k}$, $\quad V_{1,n-2k-1}^{(n-2k-1)} = 0$, k=0,1,..[(n-1)/2],

$V_{2,n-2k-1}^{(n-2k-1)} = b_{k,n-2k-1}$, $\quad V_{2,n-2k-1}^{(n-2k-1)} = 0$, k=0,1,..[(n-1)/2],

$U_{[(n-1)/2]}^{([(n-1)/2])} = b_{[(n-1)/2],[(n-1)/2]}$, $\quad V_{[(n-1)/2]}^{([(n-1)/2])} = 0$,

та використовуючи рекурентні формули (7), (8) для k=[(n-1)/2], [(n-1)/2]-1,..,0, методом повної математичної індукції отримаємо:

$$U_k^{([(n-1)/2])} = b_{kk} + \sum_{p=k+1}^{n-2k-1}\prod_{l=k+1}^{p}\frac{\left|a_{l,k}\right|}{\left|Q_{1,l}^{(n-2k-1)}\right|^2} b_{pk}\cos\left(\sum_{i=0}^{p-(k+1)}(-1)^i\vartheta_{p-i,k}\right) +$$

$$+\sum_{p=k+1}^{n-2k-1}\prod_{l=k+1}^{p}\frac{|a_{k,l}|}{\left|Q_{2,l}^{(n-2k-1)}\right|^2}b_{kp}\cos(\sum_{i=0}^{p-(k+1)}(-1)^i\varphi_{p-i,k})+4$$

$$+\sum_{p=k+1}^{[(n-1)/2]}\prod_{j=k+1}^{i}\frac{|a_{j,j}|}{|Q_j|^2}b_{ii}\cos(\sum_{s=0}^{i-(k+1)}(-1)^s\psi_{i-s,i-s})+\sum_{i=k+1}^{[(n-1)/2]-1}\prod_{j=k+1}^{i}\frac{|a_{j,j}|}{|Q_j|^2}\left\{\sum_{p=i+1}^{n-2i-1}\prod_{l=i+1}^{p}\frac{|a_{l,i}|}{|Q_{1,l}|^2}b_{pi}\times\right.$$

$$\times\cos(\sum_{s=0}^{p-(i+1)}(-1)^s\vartheta_{p-i,i}+\sum_{r=0}^{i-(k+1)}(-1)^{r+1}\psi_{i-r,i-r})+\sum_{p=i+1}^{n-2i-1}\prod_{l=i+1}^{p}\frac{|a_{i,l}|}{\left|Q_{2,l}^{(n-2k-1)}\right|^2}b_{ip}\times$$

$$\left.\times\cos(\sum_{s=0}^{p-(i+1)}(-1)^s\varphi_{p-i,i}+\sum_{r=0}^{i-(k+1)}(-1)^{r+1}\psi_{i-r,i-r})\right\} \tag{9}$$

$$V_k^{([(n-1)/2])}=b_{kk}+\sum_{p=k+1}^{n-2k-1}(-1)^{p-(k+1)}\prod_{l=k+1}^{p}\frac{|a_{j,k}|}{\left|Q_{1,l}^{(n-2k-1)}\right|^2}b_{pk}\sin(\sum_{i=0}^{p-(k+1)}(-1)^i\vartheta_{p-i,k})+$$

$$+\sum_{p=k+1}^{n-2k-1}(-1)^{p-(k+1)}\prod_{l=k+1}^{p}\frac{|a_{k,l}|}{\left|Q_{2,l}^{(n-2k-1)}\right|^2}b_{kp}\sin(\sum_{i=0}^{p-(k+1)}(-1)^i\varphi_{p-i,k})+\sum_{i=k+1}^{[(n-1)/2]}(-1)^{i-(k+1)}\times$$

$$\times\prod_{j=k+1}^{i}\frac{|a_{j,j}|}{\left|Q_j^{([(n-1)/2])}\right|^2}b_{ii}\sin(\sum_{s=0}^{i-(k+1)}(-1)^s\psi_{i-s,i-s})+\sum_{i=k+1}^{[(n-1)/2]-1}(-1)^{i-k}\prod_{j=k+1}^{i}\frac{|a_{j,j}|}{\left|Q_j^{([(n-1)/2])}\right|^2}\times$$

$$\times\left\{\sum_{p=i+1}^{n-2i-1}(-1)^{p-(i+1)}\prod_{l=i+1}^{p}\frac{|a_{l,i}|}{\left|Q_{1,l}^{(n-2i-1)}\right|^2}b_{pi}\sin(\sum_{s=0}^{p-(i+1)}(-1)^s\vartheta_{p-s,i}+\sum_{r=0}^{i-(k+1)}(-1)^{r+1}\psi_{i-r,i-r})+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=i+1}^{n-2i-1}(-1)^{p-(i+1)}\prod_{l=i+1}^{p}\frac{|a_{i,l}|}{\left|Q_{1,l}^{(n-2i-1)}\right|^2}b_{ip}\sin(\sum_{s=0}^{p-(i+1)}(-1)^s\varphi_{p-s,i}+\sum_{r=0}^{i-(k+1)}(-1)^{r+1}\psi_{i-r,i-r})\right\}. \tag{10}$$

Для дійсної та уявної частини залишку (3) справедливі такі леми

Лема 1. Нехай ϑ_{ij}, φ_{ij}, ψ_{ii}, i=0,1,.. j=1,2,..такі, що

$$0\le\vartheta_{ij}\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le\varphi_{ij}\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le\psi_{ij}\le\frac{\pi}{2}$$

і, крім того,

$\vartheta_{k+1,j}>\vartheta_{k,j}$, k=1,2,3,..; j=0,1,..,

$\varphi_{k+1,j}>\varphi_{k,j}$, k=1,2,3,..; j=0,1,..,

$\psi_{i+1,i+1}>\psi_{i,i}$, i=0,1,..,

$\vartheta_{i+1,i}>\psi_{i,i}$, i=0,1,..,

$\varphi_{i+1,i}>\psi_{i,i}$, i=0,1,….

Тоді

$U_k^{([(n-1)/2])}\ge b_{kk}$ k=0,1,..,[(n-1)/2]; n=1,2,...

$V_k^{([(n-1)/2])}\ge 0$ k=0,1,..,[(n-1)/2]; n=1,2,...

Лема 2. Нехай ϑ_{ij}, φ_{ij}, ψ_{ii}, i=1,2,.. j=0,1,2,..такі, що

$$-\frac{\pi}{2} \le \vartheta_{ij} \le 0, \qquad -\frac{\pi}{2} \le \varphi_{ij} \le 0, \qquad -\frac{\pi}{2} \le \psi_{jj} \le 0$$

і, крім того,

$$\vartheta_{i+1,j} < \vartheta_{i,j}, \quad i=1,2,3,..; j=0,1,..,$$
$$\varphi_{i+1,j} < \varphi_{i,j}, \quad i=1,2,3,..; j=0,1,..,$$
$$\psi_{j+1,j+1} < \psi_{j,j}, \quad j=0,1,..,$$
$$\vartheta_{j+1,j} < \psi_{j,j}, \quad j=0,1,..,$$
$$\varphi_{j+1,j} < \psi_{j,j}, \quad j=0,1,\ldots.$$

Тоді

$$U_k^{([(n-1)/2])} \ge 0 \quad k=0,1,..,[(n-1)/2]; \quad n=1,2,...$$
$$V_k^{([(n-1)/2])} \le 0 \quad k=0,1,..,[(n-1)/2]; \quad n=1,2,\ldots.$$

Твердження лем отримують безпосередньо підстановкою їх умов у співвідношення (9), (10).

Аналогічно можна оцінити залишки $Q_k^{([(n-1)/2])}$,k=0,1,..,[(n-1)/2],n=1,2,..,коли елементи ДНД (2) знаходяться у другому чи третьому квадрантах.

1. Bodnar D., Kuchmins'ka Kh.,Sus' O. A survey of analytic theory of branched continued fractions // Communications in the Analytic Theory of Continued Fractions. 1993. 2. P.4–23. 2. Антонова Т. М. Про збіжність періодичних інтегральних ланцюгових дробів із змін-ними межами інтегрування // Мат. методи і фіз.-мех. поля. 1996. 36. № 2. С.20–27.

УДК 517.51

Сухорольський М.А., Микитюк О.А.
НУ “Львівська політехніка”, кафедра вищої математики

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЛОКАЛЬНИХ ЗБУРЕНЬ

Analytical presentation of delta-like and leap-like function, delta function and Heavyside function being boundary to them, are systematized for the description of local perturbations in physical processes.

Для опису локальних збурень фізичних процесів систематизовано аналітичні представлення дельта-видних і скачковидних функцій, граничними для яких відповідно є дельта-функція і функція Хевісайда.

Для математичного моделювання величин, локалізованих в малих областях (сил, джерел тепла, зарядів тощо) використовуються як дельтоподібні послідовності функцій (чи дельтоподібні функції), так і їх граничний елемент дельта-функція. Розподіл локалізованих величин