Лема 2. Нехай ϑ_{ij}, φ_{ij}, ψ_{ii}, i=1,2,.. j=0,1,2,..такі, що

$$-\frac{\pi}{2} \le \vartheta_{ij} \le 0, \qquad -\frac{\pi}{2} \le \varphi_{ij} \le 0, \qquad -\frac{\pi}{2} \le \psi_{jj} \le 0$$

і, крім того,

$$\vartheta_{i+1,j} < \vartheta_{i,j}, \quad i=1,2,3,..; j=0,1,..,$$

$$\varphi_{i+1,j} < \varphi_{i,j}, \quad i=1,2,3,..; j=0,1,..,$$

$$\psi_{j+1,j+1} < \psi_{j,j}, \quad j=0,1,..,$$

$$\vartheta_{j+1,j} < \psi_{j,j}, \quad j=0,1,..,$$

$$\varphi_{j+1,j} < \psi_{j,j}, \quad j=0,1,\ldots.$$

Тоді

$$U_k^{([(n-1)/2])} \ge 0 \quad k=0,1,..,[(n-1)/2]; \quad n=1,2,...$$

$$V_k^{([(n-1)/2])} \le 0 \quad k=0,1,..,[(n-1)/2]; \quad n=1,2,\ldots.$$

Твердження лем отримують безпосередньо підстановкою їх умов у співвідношення (9), (10).

Аналогічно можна оцінити залишки $Q_k^{([(n-1)/2])}$,k=0,1,..,[(n-1)/2],n=1,2,..,коли елементи ДНД (2) знаходяться у другому чи третьому квадрантах.

1. Bodnar D., Kuchmins'ka Kh.,Sus' O. A survey of analytic theory of branched continued fractions // Communications in the Analytic Theory of Continued Fractions. 1993. 2. P.4–23. 2. Антонова Т. М. Про збіжність періодичних інтегральних ланцюгових дробів із змін-ними межами інтегрування // Мат. методи і фіз.-мех. поля. 1996. 36. № 2. С.20–27.

УДК 517.51

Сухорольський М.А., Микитюк О.А.
НУ "Львівська політехніка", кафедра вищої математики

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЛОКАЛЬНИХ ЗБУРЕНЬ

Analytical presentation of delta-like and leap-like function, delta function and Heavyside function being boundary to them, are systematized for the description of local perturbations in physical processes.

Для опису локальних збурень фізичних процесів систематизовано аналітичні представлення дельта-видних і скачковидних функцій, граничними для яких відповідно є дельта-функція і функція Хевісайда.

Для математичного моделювання величин, локалізованих в малих областях (сил, джерел тепла, зарядів тощо) використовуються як дельтоподібні послідовності функцій (чи дельтоподібні функції), так і їх граничний елемент дельта-функція. Розподіл локалізованих величин реальних фізичних процесів точніше описується варіантою (загальним членом) дельтоподібної послідовністі функцій. Використання дельта-функції більше продиктовано досконалістю математичного апарату, ніж ідентичністю з відповідною фізичною величиною.

Симетричні імпульсні функції. Локалізовану в околі деякої точки дійсної осі функцію, сумарне значення якої дорівнює одиниці, називають одиничним імпульсом, або імпульсною функцією. Розглянемо імпульсні функції, що представляють дельтоподібними функціями виду [3]:

$$\delta_{1r}(x,x_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{2r}g_1\left(\dfrac{|x-x_0|}{r}\right), & |x-x_0|\le r,\\ 0, & |x-x_0|>r, \quad r>0;\end{cases} \tag{1}$$

$$\delta_{2r}(x,x_0)=\frac{1}{2r}g_2\left(\frac{|x-x_0|}{r}\right), \quad |x|<\infty,$$

де $g_1(t)-$ неперервна кусково-гладка функція при $0\le t\le 1$, $g_1(1)=0$; $g_2(t)-$ неперервна кусково-гладка функці при $0\le t<\infty$, $|g_2(t)|\le A/(1+t^{\alpha})$, $A=const$, $\alpha>1$;

$$\int_0^1 g_1(t)dt=1, \quad \int_0^\infty g_2(t)dt=1. \tag{2}$$

Переконаємося, що сумарні значення функцій (1) дорівнюють одиниці,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_{1r}(x,x_0)dx=\frac{1}{2r}\int_{x_0-r}^{x_0+r}g_1\left(\frac{|x-x_0|}{r}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}g_1(|t|)dt=\int_0^1 g_1(t)dt,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_{2r}(x,x_0)dx=\frac{1}{2r}\int_{-\infty}^{\infty}g_2\left(\frac{|x-x_0|}{r}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}g_2(|t|)dt=\int_0^{\infty}g_2(t)dt.$$

Останні інтеграли в одержаних співвідношеннях згідно з (2) дорівнюють одиниці.

Граничним елементом дельтоподібних функцій в (1) в сенсі слабкої збіжності є дельта-функція, тобто справедливе твердження: якщо функція $f(t)$ абсолютно-інтегровна на проміжку $]-\infty;\infty[$ і неперервна в точці $t=0$, то $\lim\limits_{r\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_{ir}^{n}(x,t)dt= f(x)$ $(i=1,2)$.

Цей результат є наслідком теореми Бохнера про представлення функцій [1].

Розвинення імпульсних функцій в тригонометричні ряди й інтеграли Фур'є. Визначимо періодичну імпульсну функцію, що відповідає першій функції в (1). Задамо її значення на основному проміжку періодичності

$$\delta_{1r}(x,x_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{2r}g_1\left(\dfrac{|x-x_0|}{r}\right), & x\in[x_0-r;x_0+r],\\ 0, & x\in[-\pi;x_0-r[\cup]x_0+r;\pi], \quad r>0.\end{cases}$$

Розвиваючи її в ряд Фур'є, знайдемо

$$\delta_{1r}(x,x_0)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_1(kr)\cos k(x-x_0)\right], \ x\in[-\pi;\pi].$$

де

$$\varphi_1(kr) = \int_0^1 \cos krt\, g_1(t)\,dt. \tag{3}$$

Для випадку задання періодичної імпульсної функції на проміжку $[0;\pi]$ і продовження її на проміжок $[-\pi;0]$ як парної або непарної функції маємо такі представлення:

$$\delta_{1r}(x,x_0) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_1(kr)\cos kx_0 \cos kx\right],$$

$$\delta_{1r}(x,x_0) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_1(kr)\sin kx_0 \sin kx, \quad x \in [0;\pi],$$

Представимо функції (1) у вигляді інтегралів Фур'є. Оскільки виконуються достатні умови існування інтеграла Фур'є [2], має місце формула

$$\delta_{ir}(x,x_0) = 1/\pi \int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{ir}(u,x_0)\cos z(u-x)\,du \text{ або}$$

$$\delta_{ir}(x,x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos z(x-x_0)\varphi_i(zr)\,dz \quad (i=1,2),$$

де $\varphi_2(kr) = \int_0^{\infty}\cos krt\, g_2(t)\,dt;$ $\varphi_1(kr) -$ задані формулою (3) функції.

Математичні моделі несиметричних імпульсних функцій. Фізичні процеси, локалізовані за часовою координатою t, $0 \le t < \infty$, відбуваються, переважно, за законами з неоднаковими переднім і заднім фронтами збурення. Ефективними математичними моделями (з міркувань використання перетворення Лапласа) для опису збурень за часовою координатою є дельтоподібні функції виду

$$\delta_r^n(t) = \frac{(t/r)^n}{r\, n!}\exp\{-t/r\} \;\; 0 \le t < \infty, \quad r > 0, \tag{4}$$

де $n -$ фіксоване натуральне число або нуль.

Використовуючи формулу

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n!}\int_0^t \tau^n e^{-\tau}\,d\tau = 1 - \left(1 + \frac{t}{1!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\right)e^{-t}, \tag{5}$$

знайдемо, що сумарне значення функції (4) дорівнює одиниці, $\int_0^{\infty}\delta_r^n(t)\,dt = \int_0^{\infty}\left(t^n/n!\right)e^{-t}\,dt = 1$. Максимальне її значення досягається в точках $t_0 = r\,n$, $\delta_r^n(t_0) = 1/(n!\,r)n^n\exp\{-n\}(1/r)$. Перетворення Лапласа функції (4) задається формулою

$$\int_0^{\infty}\delta_r^n(t)e^{-pt}\,dt = \frac{1}{(1+rp)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} p > 0,$$

Математичні моделі перехідних процесів. Математичними моделями миттєво змінюваних процесів в момент часу $t = t_0$ є інтеграли від функцій (1) і (4). Наприклад, для миттєво змінюваних в початковий момент часу процесів маємо таке представлення

$$S_r^n(t) = \int_0^t S_r^n(\xi)d\xi = \frac{1}{n!}\int_0^t \left(\frac{\xi}{r}\right)^n \exp\left\{-\frac{\xi}{r}\right\}\frac{d}{dt}\left(\frac{\xi}{r}\right)d\xi = \frac{1}{n!}\int_0^{t/r}\xi^n e^{-\xi}d\xi$$

або, врахувавши формулу (5),

$$S_r^n(t) = 1 - \left[1 + \frac{(t/r)}{1!} + \cdots + \frac{(t/r)^n}{n!}\right]\exp\left\{-\frac{t}{r}\right\}. \tag{6}$$

Для інтегралів від дельтоподібних функцій (1) знайдемо такі формули:

$$\begin{gathered} S_{1r}(t) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{sgn}(t - t_0)\int_0^{|t-t_0|/r} g_1(t)dt\right], |t - t_0| \le r;\ S_{1r}(t) = 0,\ t \le t_0 - r;\ S_{1r}(t) = 1,\ t \ge t_0 + r; \\ S_{2r}(t) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{sgn}(t - t_0)\int_0^{|t-t_0|/r} g_2(t)dt\right], |t - t_0| < \infty. \end{gathered} \tag{7}$$

Безпосередньо з (6) і (7) випливає, що граничними для функцій $S_r^n(t), S_{ir}(t)$ при $r \to 0$ є функції Хевісайда

$$\lim_{r\to 0} S_r^n(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ 1, & t > 0; \end{cases} \qquad \lim_{r\to 0} S_{ir}(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ 1/2, & t = t_0, \\ 1, & t > t_0. \end{cases}$$

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. Харьков, 1984. 2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. М., 1969. 3. Сухорольский М.А. Усреднение тригонометрических рядов // Изв. вузов. Математика. 1993. № 6. С.53–56.

УДК 517.91

Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Мазуренко В.В.
НУ “Львівська політехніка”, кафедра будівельної механіки

ПРО ПОРЯДОК ЗРОСТАННЯ РОЗВ’ЯЗКІВ ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З УЗАГАЛЬНЕНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ЯК ФУНКЦІЙ ПАРАМЕТРА

In the paper the analytical properties are investigated of the solutions of the ordinary differential equation with measures as functions of (complex) parameter linearly, included in the equation.

Досліджено аналітичні властивості розв’язків звичайного диференціального рівняння з мірами як функцій (комплексного) параметра, що входить в рівняння лінійним чином.

Для ознайомлення з необхідною термінологією з теорії цілих функцій пропонуємо монографії [1, 2]. У роботі [3] запропонований ефективний критерій визначення порядку