В основу практичної реалізації методу покладено запропонований в [1] підхід. Розроблена методика розрахунку мессбауерівських спектрів була апробована при аналізі квадрупольного розщеплення у ферит-гранаті ітрію. Форма елементарних складових секстиплету задавалася рівнянням:

$$f(x,v_j)=\sum_{i=1}^{6}\frac{A_i}{1+4/\Gamma^2(v_j-c-B_i x)^2}. \tag{6}$$

Вектор $\vec{B}$ визначається ядерними константами $\vec{B}=\{0.5;0.289;0.079;-0.079;-0.289;-0.5\}$.

Величина с – положення центра ваги спектра, яка може бути визначена з умови:

$$c=\sum_{j=1}^{R}v_j\varepsilon^0(v_j)/\sum_{j=1}^{R}\varepsilon^0(v_j). \tag{7}$$

Результат використання описаного підходу до аналізу експериментального спектра та теоретичний вигляд функції P(ΔE), отриманий, виходячи з кристалографічної структури зразка, наведено на рисунку. Задовільна кореляція між теоретичною та експериментальною кривими свідчить про коректність використаного методу до такого роду розрахунків.

Запропонований підхід було реалізовано для аналізу функції розподілу надтонкого магнітного поля на ядрах заліза [2], де показано ефективність використання цього класу задач для аналізу процесів іонної імплантації.

1. Литвинов В.С., Каракишев С.Д., Овчинников В.В. Ядерная гамма-резонансная спектроскопия металлов и сплавов. М., 1982. 2. Tkachuk O.M., Tkachuk V.M. The Local Magnetic $Y_3Fe_5O_{12}$ Structure Implanted by As Ions // Phys. Stat. Sol.(a). 1999. b.172. P.477–484.

УДК 517.948/517.946

Угрин С.З.
НУ “Львівська політехніка”, кафедра обчислювальної математики і програмування

СИСТЕМИ ДВОСТОРОННІХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ НЕРІВНОСТЕЙ З В-КВАЗІМОНОТОННИМИ ПРАВИМИ ЧАСТИНАМИ

Theorems on systems of twosided differential inegualities with ordinary derivatives under assumptions which don’t coincide with the known T. Vazhevski condition in the theory of differential inegualities and dose to the B-monotone condition of Yu. Pokorny have been proved.

Доведені теореми про системи двосторонніх диференціальних нерівностей зі звичайними похідними за припущень, що не збігаються з відомою в теорії диференціальних нерівностей умовою Т. Важевського і близькі до умови В-монотонності Ю.В. Покорного.

У цій статті йдеться про системи двосторонніх диференціальних нерівностей. На сегменті $[t_0, t_1]$будемо розглядати скінченну систему звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$x_i'(t) = f_i(t, x_1, ..., x_N) \quad \left(i = \overline{1, N}\right) \tag{1}$$

з початковими умовами

$$x_i(t_0) = a_i \quad \left(i = \overline{1, N}\right), \tag{2}$$

де $f_i(t, x) \equiv f_i(t, x_1, ..., x_N)$ – неперервні при $t \in [t_0, t_1]$, $x \in S(x_0, M) = \{x \mid \|x - x_0\| \leq$ $\leq M, \ x \in R^N\}$, $\|\cdot\|$ – норма в N -мірному евклідовому просторі R^N.

Назвемо **умовою $\mathbf{A_N}$** припущення про існування невід'ємних неперервних при $t \in [t_0, t_1]$ функцій $g_{ij}(t)$, для яких із співвідношень $y_i \leq z_i$ випливає

$$-\sum_{j=1}^{N} g_{ij}(t)\left(z_j - y_j\right) \leq f_i(t, z) - f_i(t, y) \ \left(i = \overline{1, N}\right). \tag{3}$$

Теорема 1. Нехай справджується умова A_N і неперервно диференційовні при $t \in [t_0, t_1]$ функції $p_i(t), q_i(t)$ задовольняють нерівності

$$\begin{gathered} p_i'(t) < f_i(t, p(t)) - \sum_{j=1}^{N} g_{ij}(t)\left(q_j(t) - p_j(t)\right), \\ q_i(t) > f_i(t, q(t)) + \sum_{j=1}^{N} g_{ij}(t)\left(q_j(t) - p_j(t)\right), \ \left(i = \overline{1, N}\right) \end{gathered} \tag{4}$$

а при $t = t_0$ маємо

$$p_i(t_0) \leq a_i \leq q_i(t_0). \tag{5}$$

Тоді при $t \in [t_0, t_1]$ правдиві оцінки

$$p_i(t) < x_i(t) < q_i(t) \ \left(i = \overline{1, N}\right) \tag{6}$$

для всякого неперервно диференційовного на $[t_0, t_1]$ розв'язку задачі (1), (2).

Доведення. При $t = t_0$ правдивість оцінок (6) випливає із співвідношень

$$\begin{gathered} x_i'(t_0) - p_i'(t_0) \geq -\sum_{j=1}^{N} g_{ij}(t_0)\left(x_j(t_0) - p_j(t_0)\right) + \\ + \sum_{j=1}^{N} g_{ij}(t_0)\left(q_j(t_0) - p_j(t_0)\right) = \sum_{j=1}^{N} g_{ij}(t_0)\left(q_j(t_0) - x_j(t_0)\right) \geq 0, \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} q_j'(t_0) - x_j'(t_0) \geq -\sum_{j=1}^{N} g_{ij}(t_0)\left(q_j(t_0) - x_j(t_0)\right) + \\ + \sum_{j=1}^{N} g_{ij}(t_0)\left(q_j(t_0) - p_j(t_0)\right) = \sum_{j=1}^{N} g_{ij}(t_0)\left(x_j(t_0) - p_j(t_0)\right) \geq 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Тобто $x_i'(t_0) > p_i'(t_0)$, $q_i'(t_0) > x_i'(t_0)$. Тому існує $t_2 \in (t_0, t_1]$ таке, що для $t \in (t_0, t_2]$ оцінки (6) справджуються. Якщо $t_2 < t_1$, то знайдеться таке $t_3 \in (t_2, t_1]$, що при $t \in (t_0, t_2)$ правдиві строгі нерівності (6), а при $t = t_3$ матимемо $p_i(t_3) \leq x_i(t_3) \leq q_i(t_3)$ $\left(i = \overline{1, N}\right)$. Тоді

$$x_i'(t_3)-p_i'(t_3)\geq -\sum_{j=1}^{N} g_{ij}(t_3)\left(x_j(t_3)-p_j(t_3)\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{N} g_{ij}(t_3)\left(q_j(t_3)-p_j(t_3)\right)=\sum_{j=1}^{N} g_{ij}(t_3)\left(q_j(t_3)-x_j(t_3)\right)\geq 0, \tag{9}$$

$$q_j'(t_3)-x_j'(t_3)\geq -\sum_{j=1}^{N} g_{ij}(t_3)\left(q_j(t_3)-x_j(t_3)\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{N} g_{ij}(t_3)\left(q_j(t_3)-p_j(t_3)\right)=\sum_{j=1}^{N} g_{ij}(t_3)\left(x_j(t_3)-p_j(t_3)\right)\geq 0. \tag{10}$$

Отже, $p_i'(t_3)<x_i'(t_3)$, $q_i'(t_3)>x_i'(t_3)$ $\left(i=\overline{1,N}\right)$. Оскільки, якщо для якогось $i=i_0$ маємо $x_{i_0}(t_3)=p_{i_0}(t_3)$, то $p_{i_0}'(t_3)=\lim\limits_{\Delta t\to 0^-}\dfrac{p_{i_0}(t_3+\Delta t)-p_{i_0}(t_3)}{\Delta t}\geq \lim\limits_{\Delta t\to 0^-}\dfrac{x_{i_0}(t_3+\Delta t)-x_{i_0}(t_3)}{\Delta t}=x_{i_0}'(t_3)$.

Суперечність з тим, що $p_i'(t_3)<x_i'(t_3)$ для $i=\overline{1,N}$, означає неможливість ситуації, за якої $t_3<t_1$. Теорему доведено.

Умовою $\mathbf{B_N}$ назвемо припущення про існування неперервних при $t\in[t_0,t_1]$ функцій $h_{ij}(t)$, для яких із співвідношень $y_i\leq z_i$ випливає, що

$$f_i(t,z)-f_i(t,y)\leq \sum_{j=1}^{N} h_{ij}(t)(z_i-y_i)\ \left(i=\overline{1,N}\right) \tag{11}$$

причому $h_{ij}(t)\geq 0$ при $i\neq j$ $\left(i,j=\overline{1,N}\right)$.

Теорема 2. Нехай справджується умова B_N і неперервно диференційовні функції $p_i(t)$, $q_i(t)$ на $[t_0,t_1]$ задовольняють співвідношення

$$p_i'(t)<f_i(t,q(t))-\sum_{j=1}^{N} h_{ij}(t)\left(q_j(t)-p_j(t)\right),$$
$$q_i'(t)>f_i(t,p(t))+\sum_{j=1}^{N} h_{ij}(t)\left(q_j(t)-p_j(t)\right)\ \left(i=\overline{1,N}\right), \tag{12}$$

а при $t=t_0$ правдиві співвідношення (5). Тоді на $(t_0,t_1]$ правдиві оцінки (6) для всякого неперервно диференційовного при $t\in[t_0,t_1]$ розв'язку $x(t)$ задачі (1), (2).

Доведення. Очевидно, що знайдеться проміжок $(t_0,t_2]\subseteq(t_0,t_1]$, на якому оцінки (6) правдиві. Бо як би не так було, то знайшлося би принаймні одне фіксоване значення $i=i_0$, для якого, наприклад, $x_{i_0}'(t_0)=p_{i_0}'(t_0)$. Однак це неможливо, бо для $i=i_0$ можна одержати

$$x_{i_0}'(t_0)-p_{i_0}'(t_0)>f_i(t_0,x(t_0))-f_i(t_0,q(t_0))+\sum_{j=1}^{N} h_{ij}(t_0)\left(q_j(t_0)-p_j(t_0)\right)\geq$$
$$\geq -\sum_{j=1}^{N} h_{ij}(t_0)\left(q_j(t_0)-x_j(t_0)\right)+\sum_{j=1}^{N} h_{ij}(t_0)\left(q_j(t_0)-p_j(t_0)\right)=\sum_{j=1}^{N} h_{ij}(t_0)\left(x_j(t_0)-p_j(t_0)\right)\geq 0,$$

тому що для $i\neq i_0$ маємо $h_{ii_0}(t_0)\geq 0$ і $x_i(t_0)-p_i(t_0)\geq 0$. Схожі міркування придатні й за ситуації, коли $x_{i_0}'(t_0)=q_{i_0}'(t_0)$. Отримана суперечність підтверджує існування потрібного проміжку $(t_0,t_2]$. Маємо, отже, таку саму ситуацію, як і при доведенні теореми 1. Тому такі самі міркування, щодо вибору t_3 призводять до припущення, $p_i(t_3) \le x_i(t_3) \le q_i(t_3)$ $\left(i=\overline{1,N}\right)$, а при $t \in (t_0, t_3)$ правдиві строгі нерівності (6). Тоді для $t \in (t_0, t_3]$ знайдемо

$$\begin{aligned} x_i'(t) - p_i'(t) &\ge -\sum_{j=1}^{N} h_{ij}(t)\left(q_j(t) - x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{N} h_{ij}(t)\left(q_j(t) - p_j(t)\right) = \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{N} h_{ij}(t)\left(x_j(t) - p_j(t)\right) + h_{ij}(t)\left(x_i(t) - p_i(t)\right) \ge h_{ij}(t)\left(x_i(t) - p_i(t)\right), \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} q_j(t) - x_j(t) &\ge -\sum_{j=1}^{N} h_{ij}(t)\left(x_j(t) - p_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{N} h_{ij}(t)\left(q_j(t) - p_j(t)\right) = \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{N} h_{ij}(t)\left(q_j(t) - x_j(t)\right) + h_{ij}(t)\left(q_i(t) - p_i(t)\right) \ge h_{ij}(t)\left(q_j(t) - x_j(t)\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Запроваджуючи до розгляду рівняння

$$\omega'(t) = h_{ij}(t)\omega(t) + \delta(t) \tag{15}$$

з початковою умовою

$$\omega(t_0) = 0, \tag{16}$$

можна знайти

$$\omega(t) = \int_{t_0}^{t} \delta(s) e^{\int_s^t h_{ij}(\xi)d\xi} ds. \tag{17}$$

Звідси випливає, що при $\delta(t) \ge 0$ матимемо $\omega(t) \ge 0$. Оскільки з (13) та з (14) можна отримати рівність (15) з $\omega(t) = x_i(t) - p_i(t)$ та з $\omega(t) = q_i(t) - x_i(t)$ відповідно і при цьому очевидно, що $\delta(t)$ невід'ємна на $[t_0, t_3]$ неперервна функція, при чому $\delta(t) > 0$, якщо $t \in (t_0, t_3)$, то ясно, що для кожного $i = \overline{1,N}$ при $t = t_3$ матимемо $p_i(t_3) < x_i(t_3) < q_i(t_3)$. Це суперечить з вибором точки t_3 як такої, у якій бодай при якомусь одному i матимемо або $p_i(t_3) = x_i(t_3)$ або $q_i(t_3) = x_i(t_3)$. Отримана суперечність доводить теорему.

Перейдемо до нестрогих оцінок розв'язку задачі (1), (2).

Теорема 3. Нехай: 1) справджується умова B_N; 2) неперервно диференційовні на $[t_0, t_1]$ функції $u_i(t), v_i(t)$ задовольняють при $t \in [t_0, t_1]$ співвідношення

$$\begin{aligned} u_i'(t) &\le f_i(t, v(t)) - \sum_{j=1}^{N} h_{ij}(t)\left(v_j(t) - u_j(t)\right), \\ v_i'(t) &\ge f_i(t, u(t)) + \sum_{j=1}^{N} h_{ij}(t)\left(v_j(t) - u_j(t)\right) \quad \left(i = \overline{1,N}\right) \end{aligned} \tag{18}$$

3) система рівнянь

$$\begin{aligned} y_i'(t) &\le f_i(t, z(t)) - \sum_{j=1}^{N} h_{ij}(t)\left(z_j(t) - y_j(t)\right), \\ z_i'(t) &\le f_i(t, y(t)) + \sum_{j=1}^{N} h_{ij}(t)\left(z_j(t) - y_j(t)\right) \quad \left(i = \overline{1,N}\right) \end{aligned} \tag{19}$$

з початковими умовами

$$y_i(t_0)=z_i(t_0)=a_i \quad \left(i=\overline{1,N}\right) \tag{20}$$

має єдиний неперервно диференційовний на $[t_0,t_1]$ розв'язок. Тоді на $[t_0,t_1]$ правдиві оцінки

$$u_i(t)\le x_i(t)\le v_i(t) \quad \left(i=\overline{1,N}\right) \tag{21}$$

для єдиного неперервно диференційовного розв'язку $x(t)$ задачі (1), (2).

Доведення. Розглянемо систему $2n$ рівнянь

$$\begin{gathered}\varphi'_{i,n}(t)=f_i(t,\psi_n(t))-\sum_{j=1}^{N}h_{ij}(t)\left(\psi_{j,n}(t)-\varphi_{j,n}(t)\right)+\frac{1}{n},\\ \psi'_{i,n}(t)=f_i(t,\varphi_n(t))-\sum_{j=1}^{N}h_{ij}(t)\left(\psi_{j,n}(t)-\varphi_{j,n}(t)\right)-\frac{1}{n}\quad (n=n_0,n_0+1,\ldots)\end{gathered} \tag{22}$$

з початковими умовами

$$\varphi_{i,n}(t_0)=\psi_{i,n}(t_0)=a_i \quad (n=n_0,n_0+1,\ldots). \tag{23}$$

Якщо задане число $d>0$, то в області $D=\{(t,\varphi,\psi)\,|\,t\in[t_0,t_1],\ \|\varphi-x_0\|\le d,$ $\|\psi-x_0\|\le d\}$ неперервні вектор-функції

$$\begin{gathered}\alpha_i(t)\overset{df}{=}f_i(t,\psi(t))-\sum_{j=1}^{N}h_{ij}(t)\left(\psi_j(t)-\varphi_j(t)\right)+\frac{1}{n},\\ \beta_i(t)\overset{df}{=}f_i(t,\varphi(t))+\sum_{j=1}^{N}h_{ij}(t)\left(\psi_j(t)-\varphi_j(t)\right)-\frac{1}{n}\quad (i=1,N)\end{gathered} \tag{24}$$

обмежені в сукупності, тобто

$$\|\alpha(t)\|\le M,\ \ \|\beta(t)\|\le M \tag{25}$$

де $\|x\|$ – евклідова норма вектора $x=\{x_1,\ldots,x_N\}$. Скориставшись з методики Тонелі (див. [1, 2]), приймемо

$$\varphi_{i,n,k}(t)=\varphi_{i,n,0}(t),\ \psi_{i,n,k}(t)=\psi_{i,n,0}(t),\ \left(t\in\left[t_0-\frac{1}{k},t_0\right]\right), \tag{26}$$

$$\begin{gathered}\varphi_{i,n,k+1}(t)=\varphi_{i,n,0}(t)+\int_{t_0}^{t}f_i\left(s,\psi_{i,n,k}\left(s-\frac{1}{k}\right)\right)ds-\\ -\sum_{j=1}^{N}h_{ij}(t)\left(\psi_{i,n,k}\left(s-\frac{1}{k}\right)-\varphi_{i,n,k}\left(s-\frac{1}{k}\right)\right)ds+\frac{t-t_0}{n},\\ \psi_{i,n,k+1}(t)=\psi_{i,n,0}(t)+\int_{t_0}^{t}f_i\left(s,\varphi_{i,n,k}\left(s-\frac{1}{k}\right)\right)ds+\\ +\sum_{j=1}^{N}h_{ij}(t)\left(\psi_{i,n,k}\left(s-\frac{1}{k}\right)-\varphi_{i,n,k}\left(s-\frac{1}{k}\right)\right)ds-\frac{t-t_0}{n}\quad \left(t\in\left[t_0,t_0+\frac{1}{k}\right]\right),\end{gathered} \tag{27}$$

де $k=k_0,k_0+1,\ldots,k_0$ – яке-небудь натуральне число, для якого $\dfrac{1}{k_0}<\delta$, $\delta>0$.

Вважаємо заданими неперервно диференційовні на $[t_0-\delta,t_0]$ функції $\varphi_{i,n,0}(t)$, $\psi_{i,n,0}(t)$ для яких

$$\varphi_{i,n,0}(t_0)=\psi_{i,n,0}(t_0)=a_i, \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\varphi'_{i,n,0}(t_0) &= f_i\left(t_0, \psi_{i,n,0}(t_0)\right) - \sum_{j=1}^{N} h_{ij}(t_0)\left(\psi_{i,n,0}(t_0) - \varphi_{i,n,0}(t_0)\right), \\ \psi'_{i,n,0}(t_0) &= f_i\left(t_0, \varphi_{i,n,0}(t_0)\right) + \sum_{j=1}^{N} h_{ij}(t_0)\left(\psi_{i,n,0}(t_0) - \varphi_{i,n,0}(t_0)\right)\end{aligned} \quad (29)$$

$$\left\|\varphi_{n,0}(t_0) - x_0\right\| \le d, \left\|\psi_{n,0}(t_0) - x_0\right\| \le d, \left\|\varphi'_{n,0}(t)\right\| \le M, \left\|\psi'_{n,0}(t)\right\| \le M \quad (t \in [t_0 - \delta, t_0]) \quad (30)$$

Щоб продовжити $\varphi_{i,n,k}(t)$, $\psi_{i,n,k}(t)$ на сегмент $[t_0, t_0 + \alpha]$, де $\alpha = \min\left\{t_1 - t_0, \frac{d}{M}\right\}$, можна скористатися з традиційного для теорії диференціальних рівнянь із запізненням аргументу методу кроків. Застосовуючи методику доведення теореми Пеано за допомогою методу Тонелі (див. [1]), можна переконатися у рівномірній обмеженості і рівнестепеневій неперервності послідовностей $\{\varphi_{i,n,k}(t)\}$, $\{\psi_{i,n,k}(t)\}$ для кожного фіксованого n. Отже, з них можна вибрати обмежені підпослідовності, кожна з яких рівномірно на $[t_0, t_0 + \alpha]$ збігається до компонент $\varphi_{i,n}(t)$, $\psi_{i,n}(t)$ неперервно диференційовного на $[t_0, t_0 + \alpha]$ розв'язку задачі (22), (23). З (25) завдяки тому отримуємо $\left\|\varphi'_n(t)\right\| \le M$, $\left\|\psi'_n(t)\right\| \le M$ в D. Оскільки в D матимемо $\left\|\varphi_n(t) - x_0\right\| \le d$, $\left\|\psi_n(t) - x_0\right\| \le d$ $(n = 0,1,...)$, то послідовності $\{\varphi_n(t)\}$, $\{\psi_n(t)\}$ рівномірно обмежені і рівностепенево неперервні на $[t_0, t_0 + \alpha]$. З них можна вибрати збіжні підпослідовності $\{\varphi_{n_m}(t)\}$, $\{\psi_{n_m}(t)\}$ згідно з лемою Арцела. Ці підпослідовності рівномірно збігаються до своїх границь $\varphi(t)$, $\psi(t)$ відповідно. Здійснюючи граничний перехід щодо n в (26), (27) і покликаючись на лему 2.1 із [1], переконуємося, що $\{\varphi(t), \psi(t)\}$ – неперервно диференційовний на $[t_0, t_0 + \alpha]$ розв'язок задачі (19), (20). За теоремою Пеано задача (1), (2) має на деякому $[t_0, t_0 + \alpha]$ принаймні один неперервно диференційовний розв'язок $x(t)$. Можна вважати обґрунтованим твердження про рівномірну збіжність до $x(t)$ послідовностей $\{\varphi_n(t)\}$ і $\{\psi_n(t)\}$, якщо взяти до уваги те, що пара $(x(t), x(t))$ в цьому випадку є розв'язком задачі (19), (20), бо єдиність розв'язку цієї задачі постулюється умовою (3). Можна довести нерівності

$$u_i(t) < \varphi_{i,n}(t), \ \psi_{i,n}(t) < v_i(t) \ \left(i = \overline{1,N}\right) \quad (31)$$

для деякого $\alpha > 0$.

Залишається підтвердити можливість продовження оцінок (21) на весь проміжок $[t_0, t_1]$, тобто, що можна взяти $t_0 + \alpha = t_1$. Припускаючи, що це не так, тобто, що $t_0 + \alpha < t_1$ і що знайдеться $t' \in (t_0 + \alpha, t_1]$ для якого маємо хибність (21), мусимо припустити існування точної нижньої грані t^* множини таких t'. Побудуємо послідовності вектор-функцій $\{\overline{\varphi}_n(t)\}$, $\{\overline{\psi}_n(t)\}$ як послідовність розв'язків системи

$$\overline{\varphi'}_{i,n}(t) = f_i\left(t, \overline{\psi}_n(t)\right) - \sum_{j=1}^{N} h_{ij}(t)\left(\overline{\psi}_{j,n}(t) - \overline{\varphi}_{j,n}(t)\right) + \frac{1}{n},$$

$$\overline{\psi'}_{i,n}(t) = f\left(t, \overline{\varphi}_n(t)\right) + \sum_{j=1}^{N} h_{ij}(t)\left(\overline{\psi}_{j,n}(t) - \overline{\varphi}_{j,n}(t)\right) - \frac{1}{n},$$

з початковими умовами $\overline{\varphi}_{i,n}(t^*)=\overline{\psi}_{i,n}(t^*)=x_i(t^*)$. Схожі до попередніх міркування придатні для деякого сегмента $[t^*,t^*+\alpha_1]\subseteq[t^*,t_1]$ при $\alpha_1>0$. В результаті одержимо висновок про правдивість (21) на $[t^*,t^*+\alpha_1]$. Оскільки це суперечить виборові t^*, то доведення теореми завершене.

Зазначимо, що при $g_{ij}=0$ з теореми 3 випливають, наприклад, відповідні результати із [3].

1. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1973. 2. Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применения. К., 1980. 3. Wazewski T. Systemes equations et des inegalites differentielles ordinares aux deuxiemes membres monotones et leurs applications // Ann.Sok.Pol. Math. 1950. 23. P.112–166.

УДК 517

Федак І.В.

Прикарпатський університет ім. В.Стефаника, м. Ів.-Франківськ

ПРО ОДНЕ ЗАСТОСУВАННЯ РІЗНИЦЕВОЇ СХЕМИ РУНГЕ-КУТТА ДО НАБЛИЖЕНОГО ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ

Here is deduced one optimal formula of the numerical integration.

Виведено одну оптимальну формулу числового інтегрування.

Розглянемо задачу Коші

$$y'=f(x,y),\, y(x_0)=y_0. \tag{1}$$

Для її наближеного розв'язування побудуємо рівномірну сітку $x_i=x_0+ih, i=0,1,...,$ і скористаємося такою різницевою схемою Рунге-Кутта

$$\begin{cases}\dfrac{\overline{y}_{i+1}-\overline{y}_i}{h}-p_1\overline{K}_1-p_2\overline{K}_2=0,\\ \overline{y}_0=y_0,\end{cases} \tag{2}$$

де $\overline{y}_i=\overline{y}(x_i)-$ значення наближеного розв'язку у вузлах сітки; p_1,p_2- деякі числа, значення яких встановимо нижче,

$$\overline{K_1}=f(x_i,\overline{y_i}),\ \overline{K_2}=f(x_i+\alpha h,\overline{y_i}+\alpha h\overline{K_1}),$$

де α- деяка стала, $0<\alpha\le 1$.

Позначимо $\Delta_i(h)$ величину $\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h}-p_1K_1-p_2K$ із лівої частини рівнянь (2), в яких $\overline{y_i}$ замінені на $y_i=y(x_i)$ – значення розв'язку задачі (1) у вузлах сітки.

Якщо f(x,y) двічі диференційовна , то (див.*) при виконанні умов

* *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г..Дифференциальные уравнения. М., 1980.*