з початковими умовами $\overline{\varphi}_{i,n}\left(t^*\right)=\overline{\psi}_{i,n}\left(t^*\right)=x_i\left(t^*\right)$. Схожі до попередніх міркування придатні для деякого сегмента $\left[t^*,t^*+\alpha_1\right]\subseteq\left[t^*,t_1\right]$ при $\alpha_1>0$. В результаті одержимо висновок про правдивість (21) на $\left[t^*,t^*+\alpha_1\right]$. Оскільки це суперечить виборові t^*, то доведення теореми завершене.

Зазначимо, що при $g_{ij}=0$ з теореми 3 випливають, наприклад, відповідні результати із [3].

1. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1973. 2. Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применения. К., 1980. 3. Wazewski T. Systemes equations et des inegalites differentielles ordinares aux deuxiemes membres monotones et leurs applications // Ann.Sok.Pol. Math. 1950. 23. P.112–166.

УДК 517

Федак І.В.

Прикарпатський університет ім. В.Стефаника, м. Ів.-Франківськ

ПРО ОДНЕ ЗАСТОСУВАННЯ РІЗНИЦЕВОЇ СХЕМИ РУНГЕ-КУТТА ДО НАБЛИЖЕНОГО ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ

Here is deduced one optimal formula of the numerical integration.

Виведено одну оптимальну формулу числового інтегрування.

Розглянемо задачу Коші

$$y'=f(x,y),\, y(x_0)=y_0. \tag{1}$$

Для її наближеного розв'язування побудуємо рівномірну сітку $x_i=x_0+ih, i=0,1,...,$ і скористаємося такою різницевою схемою Рунге-Кутта

$$\begin{cases}\dfrac{\overline{y}_{i+1}-\overline{y}_i}{h}-p_1\overline{K}_1-p_2\overline{K}_2=0,\\ \overline{y}_0=y_{0,}\end{cases} \tag{2}$$

де $\overline{y}_i=\overline{y}(x_i)-$ значення наближеного розв'язку у вузлах сітки; p_1,p_2- деякі числа, значення яких встановимо нижче,

$$\overline{K_1}=f(x_i,\overline{y_i}),\ \overline{K_2}=f(x_i+\alpha h,\overline{y_i}+\alpha h\overline{K_1}),$$

де α- деяка стала, 0<α≤1.

Позначимо $\Delta_i(h)$ величину $\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h}-p_1K_1-p_2K$ із лівої частини рівнянь (2), в яких $\overline{y_i}$ замінені на $y_i=y(x_i)$ – значення розв'язку задачі (1) у вузлах сітки.

Якщо f(x,y) двічі диференційовна , то (див.*) при виконанні умов

* *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г..Дифференциальные уравнения. М., 1980.*

$$p_1 + p_2 = 1,\ \alpha p_2 = \frac{1}{2}$$

схема (2) має другий порядок апроксимації, тобто $\Delta_i(h) = O(h^2)$, причому в загальному випадку вищого порядку апроксимації домогттися не вдасться.

Дослідимо умови, при яких такий порядок вдається збільшити на одиницю. Будемо вимагати, щоб f(x,y) мала неперервні треті частинні похідні по обох змінних. На основі (1) цього буде достатньо для неперервності четвертої похідної розв'язку y(x) задачі Коші. За формулою Тейлора одержимо:

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' + \frac{h^2}{2} y_i'' + \frac{h^3}{6} y_i^{(3)} + \frac{h^4}{24} y_*^{(4)},$$

.

де $y_i^{(k)} = y^{(k)}(x_i)$, $y_*^{(4)} = y^{(4)}(x_*)$, $x_i < x_* < x_{i+1}$.

Звідси знаходимо

$$\Delta_i(h) = y_i' + \frac{h}{2} y_i'' + \frac{h^2}{6} y_i''' + O\left(h^3\right) - p_1 f_i - p_2 \left[f_i + \frac{\partial f_i}{\partial x} \alpha h + \frac{\partial f_i}{\partial y} \alpha h f_i + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} (\alpha h)^2 + 2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} \alpha h \alpha h f_i + \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} (\alpha h f_i)^2 \right) + O\left(h^3\right) \right]$$

де $f_i = f\left(x_i, y_i\right)$ і т.д.

Оскільки на основі (1) виконуються рівності

$$y' = f(x,y)$$

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x,y)$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x,y) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f^2(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y} y''$$

то

$$\Delta_i(h) = (1 - p_1 - p_2) y_i' + h\left(\frac{1}{2} - \alpha p_2\right) y_i'' +$$

$$+ h^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\alpha^2 p_2\right) y_i''' + h^2 \cdot \frac{1}{2} \alpha^2 p_2 \cdot \frac{\partial f_i}{\partial y} \cdot y_i'' + O(h^3)$$

Отже, якщо f(x,y) не залежить від змінної y, то для того, щоб схема (2) мала третій порядок апроксимації, необхідно і достатньо виконати співвідношення

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1, \\ \alpha p_2 = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2}\alpha^2 p_2 = \dfrac{1}{6}, \end{cases} \tag{3}$$

з яких знаходимо

$$\alpha = \frac{2}{3}, p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{3}{4} \tag{4}$$

Застосуємо одержаний результат для виведення наближених формул числового інтегрування. При цьому будемо вважати, що функція $f(x)$ тричі неперервно диференційовна на відрізку $[a, b]$, і покладемо

$$y(x) = \int_0^x f(t)dt, \ x \in [a, b].$$

Зрозуміло, що

$$y'(x) = f(x), \ y(a) = 0 \tag{5}$$

є частковим випадком задачі (1).

Нехай $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$. Тоді, враховуючи (2) та (4), одержимо

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{4}\left[f(x_i) + 3f\left(x_i + \frac{2}{3}h\right)\right], \tag{6}$$

де $i = 0,1,..., n-1$, $y(x_0) = y(a) = 0$.

Зокрема, при $i = n-1$ маємо

$$y(x_n) = \int_a^b f(x)dx. \tag{7}$$

Зауважимо, що якщо $f(x)$ є квадратичною функцією, то за формулою (6) інтеграл (7) буде обчислений точно, причому незалежно від n та величини h. Справді, для всякого h маємо

$$\int_0^h \left(ax^2 + bx + c\right)dx = \frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch =$$

$$= 0 + \frac{h}{4}\left[c + 3\left(a\left(\frac{2}{3}h\right)^2 + b\left(\frac{2}{3}h\right) + c\right)\right] = y(h).$$

Встановимо взаємозв'язок одержаного результату з іншими формулами числового інтегрування. Для цього перепишемо (6) у вигляді

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{4}\left[f(x_i) + 3f\left(x_i + \frac{2}{3}h\right)\right]. \tag{8}$$

Зрозуміло, що з міркувань симетрії правильна також рівність

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{4}\left[f(x_{i+1}) + 3f\left(x_{i+1} - \frac{2}{3}h\right)\right].$$

Додавши їх,одержимо

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{8}\left[f(x_i) + 3f\left(x_i + \frac{h}{3}\right) + +3f\left(x_i + \frac{2}{3}h\right) + f\left(x_{i+1}\right)\right] \tag{9}$$

Зауважимо,що (9) збігається із відомою формулою методу кубічних парабол.

Для порівняння відзначимо,що аналогічними міркуваннями можна було одержати також формулу Сімпсона. Для цього достатньо покласти $\alpha = \frac{1}{2}, p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = \frac{2}{3}$. Легко переконатися, що схема (2) при цьому матиме лише перший порядок апроксимації; а відповідні їй формули

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{3}[f(x_i) + 2f(x_i + \frac{h}{2})], \tag{10}$$

де i=0,1,…,n-1, $y(x_0)$=y(a)=0, при тій самій кількості обчислень, що і у (6), приводять до значно гірших результатів. Зокрема, уже для f(x)=ax+b із (10) не випливає рівності

$$y(h) = \int_0^h (ax + b)dx .$$

Отже, при вказаній кількості обчислень виведена нами формула (6) є найбільш оптимальною формулою числового інтегрування функцій однієї змінної.

УДК 518.25

Федунець Л.П.
Академія народного господарства, м. Тернопіль

ВИКОРИСТАННЯ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

The systems of linear algebraical equations with symbolic elements are considered. The square algorithm for solving of the systems of linear algebraical equations by the matrix continued fractions is built in this work. The construction is based on the method of elimination of unknowns.

Розглядаються системи лінійних алгебраїчних рівнянь із символьними елементами. Будується кліткoвий алгоритм розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь матричними ланцюговими дробами. Побудова базується на основі методу виключення невідомих.

Розглядаються системи лінійних алгебраїчних рівнянь виду:

$$Ax=b \tag{1}$$

із символьними елементами. Без обмеження загальності вважається, що $n = 2^s$, де s–ціле число (якщо це не так, то систему можна доповнити $\chi_{n+1} = 1, ..., \chi_{n+k} = 1$).

Відомо багато ефективних методів для обчислення невідомих числових систем (1). Кожен із них полягає у застосуванні певних рекурентних співвідношень, послідовне застосування котрих і дає значення невідомих. Але для аналітичного розв'язування систем (1) із символьними елементами подібний підхід практично непридатний.

Сьогодні існують і успішно розвиваються декілька напрямів і концепцій для виконання символьних перетворень. Із систем універсального характеру найбільшого поширення отримали REDUCE, muMATH, MATHEMATICA, MAPLE, MatLab та DERIVE. Їх можна застосовувати для різних задач комп'ютерної алгебри, зокрема і для розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Проте цей розділ ще не так добре розвинений, як методи для числових систем.